第63卷第4期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.63, No.4
2020年7月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Jul., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)04-0397-06　　**文献标识码: A**

多项式的特征和与二项指数和的混合均值

祁 兰

榆林学院数学与统计学院 榆林 719000
E-mail: qilanmail@163.com

陈卓钰

西北大学数学学院 西安 710127
E-mail: chenzymath@163.com

摘　要　本文主要利用解析方法以及二项指数和与 Dirichlet 特征的性质, 研究多项式的特征和与二项三次指数和的混合均值的计算问题, 并得到一个较强的渐近公式.

关键词　多项式特征和; 二项指数和; 混合方幂均值; 渐近公式
MR(2010) 主题分类　11L03, 11L05, 11L10
中图分类　O156.4

The Hybrid Power Mean of Character Sums of Polynomials and Two-term Exponential Sums

Lan QI

School of Mathematics and Statistics, Yulin University, Yulin 719000*, P. R. China*
E-mail: *qilanmail@163.com*

Zhuo Yu CHEN

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127*, P. R. China*
E-mail: *chenzymath@163.com*

Abstract　In this paper, we discuss the computational problem of a hybrid power mean involving character sums of polynomials and two-term cubic exponential sums, by using analytic methods and the properties of two-term exponential sums and Dirichlet characters. Meanwhile, we obtain a sharp asymptotic formula.

Keywords　character sums of polynomials; two-term exponential sums; hybrid power mean; asymptotic formula
MR(2010) Subject Classification　11L03, 11L05, 11L10
Chinese Library Classification　O156.4

收稿日期: 2019-07-04; 接受日期: 2019-12-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771351, 11826203, 11826205)

1 引言

对于任意整数 m, n, $k \geq 2$ 及 $q \geq 3$, 二项指数和定义为 $A(m, n, k; q)$,

$$A(m,n,k;q)=\sum_{a=1}^{q-1} e\left(\frac{ma^k+na}{q}\right),$$

其中 $e(y)=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y}$.

设 χ 是模 q 的一个 Dirichelet 特征, M 和 N 是任意正整数且 $M > N$, $f(x)$ 是关于 x 的 n 次有理系数多项式, 模 q 的多项式特征和定义为 $\sum_{a=N+1}^{N+M}\chi(f(a))$, 经典的 Gauss 和定义为 $\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q-1}\chi(a)e\left(\frac{a}{q}\right)$.

设 χ 是模 q 的本原特征, 经典的 Gauss 和满足恒等式 [5, 7]

$$\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{na}{q}\right)=\overline{\chi}(n)\tau(\chi) \text{ 以及 } |\tau(\chi)|=\sqrt{q}.$$

众所周知, Gauss 和、二项指数和以及多项式的特征和在解析数论中占有十分重要的作用, 许多数论专家和学者都热衷于其性质及应用的研究 [1–3, 11, 12]. 特别是在二项指数和、多项式特征和的上界估计方面, 现已取得了大量有意义的结果.

例如, 设 p 是素数, 对任意非主特征, Pólya 和 Vinogradov 得到估计式 [6, 8]

$$\left|\sum_{a=1}^{p}\chi(a)\right| \leq c\sqrt{p}\ln p, \tag{1.1}$$

其中 c 是一个正常数.

设 p 是奇素数, χ 是模 p 的一个 q 次特征, $f(x)$ 不是模 p 的 q 次幂, Weil 证明了 [9]

$$\sum_{x=N+1}^{N+M}\chi\left(f(x)\right) \ll p^{\frac{1}{2}}\ln p, \tag{1.2}$$

其中主项 $p^{\frac{1}{2}}$ 可能是最好的结果.

韩迪在文献 [4] 中研究了包含二项指数和与多项式的特征和的混合均值, 并得到

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{ma^k+na}{p}\right)\right|^2\left|\sum_{b=1}^{p-1}\chi(mb+\overline{b})\right|^2=\begin{cases} 2p^3+O(|k|p^2), & \text{若 } k \text{ 是偶数},\\ 2p^3+O(|k|p^{\frac{5}{2}}), & \text{若 } k \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

张晗和张文鹏在文献 [10] 中给出了二项指数和的四次均值的一个有趣的恒等式. 受上述学者的启发, 结合二项指数和的性质, 本文主要利用解析方法研究多项式的特征和与二项三次指数和的混合均值的计算问题, 并给出一个较强的渐近公式. 即我们将证明下面的结论:

定理 设 p为奇素数, χ是模 p的任意非主特征且 $\chi(-1)=1$, 则对任意整数 m且 $(m,p)=1$, 有

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a^3+ma)\right|^2\left|\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^4=\begin{cases}4p^4+O(p^{\frac{7}{2}}\log p), & \text{若 } \chi^3\neq\chi_0,\\ 2p^4+O(p^{\frac{7}{2}}\log p), & \text{若 } \chi^3=\chi_0.\end{cases}$$

2 若干引理

为了完成定理的证明, 我们需要引入下面几个简单的引理.

引理 1 设 p 是奇素数, χ 是模 p 的任意非主特征, 对任意整数 m 且 $(m,p)=1$, $\chi(-1)=1$,

如果 $\chi^3 \neq \chi_0$, 则有恒等式

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1} \chi\left(a^3+ma\right)\right|^2 = 2p + \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right);$$

如果 $\chi^3 = \chi_0$, 则有恒等式

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1} \chi\left(a^3+ma\right)\right|^2 = p+1 + \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right),$$

其中 $\chi_2 = (\frac{*}{p})$ 表示模 p 的 Legendre 符号.

证明 对任意整数 m 且 $(m,p)=1$, 我们有恒等式

$$\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^2}{p}\right) = 1 + \sum_{a=1}^{p-1}\left(1+\chi_2(a)\right)e\left(\frac{ma}{p}\right) = \chi_2(m)\tau(\chi_2). \tag{2.1}$$

注意到 χ 是模 p 的非主特征, 于是有

$$\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a) = 0. \tag{2.2}$$

当 $\chi^3 \neq \chi_0$ 时, 结合 (2.1), (2.2) 及经典 Gauss 和的性质, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{a=1}^{p-1} \chi\left(a^3+ma\right)\right|^2 &= \left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)\chi\left(a^2+m\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\tau\left(\overline{\chi}\right)}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)\ e\left(\frac{b\left(a^2+m\right)}{p}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\sum_{d=1}^{p-1}\overline{\chi}(b\overline{d})\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{c=1}^{p-1}\chi(a\overline{c})\ e\left(\frac{b\left(a^2+m\right)-d\left(c^2+m\right)}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\sum_{d=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\chi(a)\ e\left(\frac{dc^2\left(ba^2-1\right)+dm\left(b-1\right)}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi\left(a\overline{b}\right)\tau(\chi_2)\chi_2\left(ba^2-1\right)\sum_{d=1}^{p-1}\chi_2(d)e\left(\frac{dm\left(b-1\right)}{p}\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{a=1 \\ ba^2\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi\left(a\overline{b}\right)\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{dm\left(b-1\right)}{p}\right) \\
&= \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi\left(a\overline{b}\right)\chi_2\left(ba^2-1\right)\chi_2(b-1) \\
&\quad + 2(p-1) + \sum_{\substack{a=1 \\ ba^2\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=2}^{p-1}\chi\left(a\overline{b}\right)\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{dm\left(b-1\right)}{p}\right) \\
&= \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left(b-a^3\right)\chi_2(b-a) + 2p - \sum_{a=1}^{p-1}\chi^3(a) \\
&= 2p + \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left(b-a^3\right)\chi_2(b-a).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

当 $\chi^3=\chi_0$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+ma\right)\right|^2=p+1+\frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a\right)\sum_{b=1}^{p-1}\chi_2\left(b-a^3\right)\chi_2(b-a). \tag{2.4}$$

根据 (2.3) 和 (2.4), 我们就可以得到引理 1 的结果.

引理 2 设 p 是素数, 且 $p>3$, 那么对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 有

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+na}{p}\right)\right|^4=\begin{cases}2p^3-p^2, & \text{若 } 3\nmid(p-1),\\ 2p^3-7p^2, & \text{若 } 3\mid(p-1).\end{cases}$$

证明 参阅文献 [10, 定理的证明].

引理 3 设 p 是素数, 且 $p>3$, 我们有 $\sum_{m=1}^{p-1}\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^4\ll p^{\frac{5}{2}}\log p$.

证明 首先, 当 χ 是模 p 的任意非主特征, 且 χ 不是模 p 的一个三阶特征时, 由 Gauss 和的性质, 我们有 (参阅文献 [10, 引理 2 的证明])

$$\sum_{m=1}^{p-1}\chi(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2=\chi(4)\chi_2(3)\tau(\overline{\chi}^3)\tau(\chi_2)\tau(\chi\chi_2) \tag{2.5}$$

和

$$\sum_{m=1}^{p-1}\overline{\chi}(m)\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2=\overline{\chi}(4)\chi_2(3)\tau(\chi^3\chi_2)\tau(\chi_2)\tau(\overline{\chi}). \tag{2.6}$$

如果 $\chi=\chi_0$ 是模 p 的主特征, 或 $\chi=\chi_2$, 我们易得

$$\sum_{m=1}^{p-1}\chi_0(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2=\chi_2(3)\tau(\chi_0)\tau^2(\chi_2)=-\chi_2(3)\tau^2(\chi_2) \tag{2.7}$$

和

$$\sum_{m=1}^{p-1}\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2=\chi_2(3)\tau(1)\tau^2(\chi_2)=-\chi_2(3)\tau^2(\chi_2). \tag{2.8}$$

然后, 由 (2.5)–(2.8) 及特征的正交性, 可得

$$\begin{aligned}
&(p-1)\sum_{m=1}^{p-1}\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^4\\
&=\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_2}\left(\sum_{m=1}^{p-1}\chi(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{p-1}\overline{\chi}(m)\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2\right)\\
&\quad+2\left(\sum_{m=1}^{p-1}\chi_0(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{p-1}\chi_2(m)\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^2\right)\\
&=p\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_2}\tau(\overline{\chi}^3)\tau(\chi^3\chi_2)\cdot\tau(\overline{\chi})\tau(\chi\chi_2)+O(p^2)\\
&=p\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_2}\left(\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi}^3(a)e\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{b=1}^{p-1}\chi^3(b)\chi_2(b)e\left(\frac{b}{p}\right)\right)\left(\sum_{c=1}^{p-1}\overline{\chi}(c)e\left(\frac{c}{p}\right)\sum_{d=1}^{p-1}\chi(d)\chi_2(d)e\left(\frac{d}{p}\right)\right)+O(p^2)\\
&=p\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_2}\left(\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}^3(a)\chi_2(b)e\left(\frac{b(a+1)}{p}\right)\right)\left(\sum_{c=1}^{p-1}\sum_{d=1}^{p-1}\overline{\chi}(c)\chi_2(d)e\left(\frac{d(c+1)}{p}\right)\right)+O(p^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_2} \left(\tau(\chi_2) \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi}^3(a) \chi_2(a+1) \right) \left(\tau(\chi_2) \sum_{c=1}^{p-1} \overline{\chi}(c) \chi_2(c+1) \right) + O(p^2) \\
&= p^2 \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_2} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{c=1}^{p-1} \overline{\chi}(a^3 c) \chi_2((a+1)(c+1)) + O(p^2) \\
&= p^2 (p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{c=1}^{p-1} \overline{\chi}(a^3 c) \chi_2((a+1)(c+1)) + O(p^2) \\
&= p^2 (p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{\substack{c=1 \\ a^3 c \equiv 1 \bmod p}}^{p-1} \chi_2((a+1)(\overline{a}^3+1)) + O(p^2) \\
&= p^2 (p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(\overline{a}^3) \chi_2((a+1)(a^3+1)) + O(p^2) \\
&= p^2 (p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \chi_2(a^2-a+1) + O(p^2) \\
&= p^2 (p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a^3-a^2+a) + O(p^2).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

结合 (1.2) 及 (2.9), 可以得到

$$
(p-1) \sum_{m=1}^{p-1} \chi_2(m) \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p} \right) \right|^4 \ll p^2(p-1)\sqrt{p} \log p. \tag{2.10}
$$

由 (2.10) 易证 $\sum_{m=1}^{p-1} \chi_2(m) \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right) \right|^4 \ll p^{\frac{5}{2}} \log p$. 这样, 就完成了引理 3 的证明.

3 定理的证明

下面完成定理的证明. 设 p 是奇素数, χ 模是 p 的任意非主特征, 对任意整数 m 且 $(m,p) = 1$, 当 $\chi^3 \neq \chi_0$ 时, 结合引理 1, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{p-1} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^3+ma) \right|^2 \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p} \right) \right|^4 \\
&\quad = \sum_{m=1}^{p-1} \left(2p + \frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p} \sum_{b=1}^{p-1} \overline{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2\left((b-a^3)(b-a) \right) \right) \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p} \right) \right|^4 \\
&\quad = 2p \sum_{m=1}^{p-1} \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p} \right) \right|^4 \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{p-1} \chi_2(m) \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+a}{p} \right) \right|^4 \frac{\tau^2(\chi_2)}{p} \sum_{b=1}^{p-1} \overline{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2\left((b-a^3)(b-a) \right).
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

根据引理 2, 得

$$
\sum_{m=1}^{p-1} \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3+na}{p} \right) \right|^4 = 2p^3 + O(p^2). \tag{3.2}
$$

根据引理 1, 对于任意模 p 的二次非剩余, 我们可证

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+rma\right)\right|^2+\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+ma\right)\right|^2$$
$$=4p+\frac{(\chi_2(r)+1)\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right)=4p$$

和

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+ma\right)\right|^2\leq 4p. \tag{3.3}$$

另一方面, 由引理 1 得

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+ma\right)\right|^2-2p\right|&=\left|\frac{\chi_2(m)\tau^2(\chi_2)}{p}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right)\right|\\&=\left|\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right)\right|.\end{aligned} \tag{3.4}$$

利用不等式的性质和式 (1.2), (3.3) 及 (3.4), 得

$$\left|\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\chi_2\left((b-a^3)(b-a)\right)\right|\leq\left|\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi\left(a^3+ma\right)\right|^2\right|+2p\leq 4p+2p\ll p. \tag{3.5}$$

结合 (3.1), (3.2) 及 (3.5), 可证得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a^3+ma)\right|^2\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+a}{p}\right)\right|^4&=4p^4+O(p^{\frac{5}{2}}\log p\cdot p)+O(p^3)\\&=4p^4+O(p^{\frac{7}{2}}\log p).\end{aligned}$$

同样的方法, 当 $\chi^3=\chi_0$ 时, 我们可以很容易得到结果.

参考文献

[1] Bourgain J., Garaev M. Z., Konyagin S. V., et al., On the hidden shifted power problem, *SIAM J. Comput.*, 2012, **41**: 1524–1557.

[2] Burgess D. A., On character sums and primitive roots, *Proc. London Math. Soc.*, 1962, **12**: 179–192.

[3] Burgess D. A., On Dirichlet characters of polynomials, *Proc. London Math. Soc.*, 1963, **31**: 537–548.

[4] Han D., A hybrid mean value involving two-term exponential sums and polynomial character sums, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2014, **64**(1): 53–62.

[5] Pan C. D., Pan C. B., Goldbach Conjecture, Science Press, Beijing, 1992.

[6] Pólya G., Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, *Nachrichten Göttingen*, 1918: 21–29.

[7] Tom M. A., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[8] Vinogradov I. M., Sur la distribution des résidus et des non-résidus des puissances, *Journal Physico-Math. Soc. Univ. Perm*, 1918, **1**: 94–96.

[9] Weil A., On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1948, **34**: 203–210.

[10] Zhang H., Zhang W. P., The fourth power mean of two-term exponential sums and its application, *Mathematical Reports*, 2017, **19**: 75–81.

[11] Zhang W. P., Yao W. L., A note on the Dirichlet characters of polynomials, *Acta Arith.*, 2004, **115**: 225–229.

[12] Zhang W. P., Yi Y., On Dirichlet characters of polynomials, *Bull. London Math. Soc.*, 2002, **34**: 469–473.