第63卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.4
2020年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)04-0329-06 **文献标识码: A**

广义 n- 赋范空间中的 Vogt 定理

马玉梅

大连民族大学理学院 大连 116600
E-mail: mayumei@dlnu.edu.cn

摘　要　本文推广 Vogt 定理到广义 n- 赋范空间, 即证明了两个广义 n- 赋范空间之间的保持 ρ- 诱导距离映射是仿射的.

关键词　保持 ρ- 诱导距离; 等距; n- 赋范; 广义 n- 赋范; 2- 共线
MR(2010) 主题分类　46B04, 46B20, 51K05
中图分类　O177.2

The Vogt Theorem in G-n-normed Spaces

Yu Mei MA

School of Science, Dalian Minzu University,
Dalian 116600*, P. R. China*
E-mail: *mayumei@dlnu.edu.cn*

Abstract　In this paper, we generalize Vogt theorem in G-n-normed spaces: A mapping between two G-n-normed spaces which preserves ρ-gauge distance is affine.

Keywords　preserving ρ-gauged distance; isometry; n-norm; G-n-norm; 2-collinear
MR(2010) Subject Classification　46B04, 46B20, 51K05
Chinese Library Classification　O177.2

1　引言

设 X, Y 是度量空间. 映射 $f: X \to Y$ 称为等距, 如果对任意 $x, y \in X$, f 满足 $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$. 这里 $d_X(\cdot,\cdot)$ 和 $d_Y(\cdot,\cdot)$ 分别表示空间 X, Y 的距离. 如果 $d_X(x, y) = 1$, 则 $d_Y(f(x), f(y)) = 1$, 称 f 保持单位距离.

1932 年, Mazur–Ulam 给出定理 [14]: 两个实赋范线性空间之间的到上等距是一个仿射变换 (即线性平移).

1970 年, Aleksandrov [1] 给出了与此相关的问题: 两个度量空间之间保持单位距离的映射是否为等距映射?

在赋范空间中, 上世纪 90 年代以来, Rassias 等许多学者针对等距 (保持距离) 研究 Mazur–Ulam 定理和 Aleksandrov 问题, 给出了很多有意义的结果 [10, 19].

收稿日期: 2019-08-15; 接受日期: 2019-11-07

1973 年, Vogt [20] 推广等距为保持 ρ- 诱导距离 (f 是保持 ρ- 诱导距离的映射是指 $d(f(x), f(y)) = \rho(d(x,y)))$, 这里 $\rho:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是连续函数, 称为 f 的诱导函数.

Vogt 证明了两个赋范空间之间保持 ρ- 诱导距离的映射 f 是仿射的.

1964 年, Gähler [7] 给出了 2- 赋范空间的定义, 性质和一些几何问题. 1989 年, Misiak [15] 给出 n- 赋范空间的相应概念. 30 多年以来有关 n- 赋范空间的几何问题以及空间结构等课题一直得到广泛关注. 2004 年以来, Chu 等学者将等距仿射延拓问题的研究推广到 n- 赋范空间 $(n\ge 2)$. 得到了关于 Mazur–Ulam 定理和 Aleksandrov 问题的一系列结果 [4–8].

2009 年, 有关 Vogt 定理在 n- 赋范空间的研究也取得了一定的进展, Jia [9] 在某些条件下将 Vogt 定理推广到 2- 赋范空间.

在赋范空间中, 很多问题的研究依赖于范数的三角不等式, 研究 Mazur–Ulam 定理和 Aleksandrov 问题时三角不等式的作用不可替代. 然而在 n- 赋范空间研究这两个问题时, 发现三角不等式的条件可以去掉, 我们定义该空间为广义 n- 赋范空间 (G-n-normed space). 2017 年马玉梅证明了该空间上 Mazur–Ulam 定理和 Aleksandrov 问题是等价的 [13].

本文将证明 Vogt 定理在广义 n- 赋范空间是成立的, 即两个广义 n- 赋范空间之间保持 ρ- 诱导 n- 距离的映射是仿射的, 并且是 n- 等距映射的伸缩.

以下假定 $n\ge 2$.

定义 1.1 [13] 设 X 是实线性空间 $(\dim X\ge n)$, 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$ 及 $x_1,\dots,x_n\in X$, 函数 $\|\cdot,\dots,\cdot\|:X^n\to\mathbb{R}$ 满足如下条件:

(1) $\|x_1,\dots,x_n\|=0$ 当且仅当 $x_1,\dots,x_n$ 是线性无关的;

(2) $\|x_1,\dots,x_n\|=\|x_{j_1},\dots,x_{j_n}\|$, $(j_1,\dots,j_n)$ 是 $(1,\dots,n)$ 的任意排列;

(3) $\|\alpha x_1,\dots,x_n\|=|\alpha|\|x_1,\dots,x_n\|$,

那么 $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ 称为 X 上的广义 n- 范数 (G-n-norm), $(X,\|\cdot,\dots,\cdot\|)$ 称为广义 n- 赋范空间 (G-n-normed space).

下面是已知的两个 G-n- 赋范空间 [18, 21].

定义 1.2 设 X 是实线性空间 $(\dim X\ge n)$, 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $t\in[0,1]$ 及 $x_1,\dots,x_n\in X$, 函数 $\|\cdot,\dots,\cdot\|:X^n\to\mathbb{R}$ 满足如下条件:

(1) $\|x_1,\dots,x_n\|=0$ 当且仅当 $x_1,\dots,x_n$ 是线性无关的;

(2) $\|x_1,\dots,x_n\|=\|x_{j_1},\dots,x_{j_n}\|$, $(j_1,\dots,j_n)$ 是 $(1,\dots,n)$ 的任意排列;

(3) $\|\alpha x_1,\dots,x_n\|=|\alpha|\|x_1,\dots,x_n\|$;

(4) $\|tx+(1-t)y,x_2,\dots,x_n\|\le\max\{\|x,x_2,\dots,x_n\|,\|y,x_2,\dots,x_n\|\}$,

则 $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ 称为 X 的 n- 拟凸范数 (n-quasi-convex norm), $(X,\|\cdot,\dots,\cdot\|)$ 称为 n- 拟凸范空间.

定义 1.3 设 X 是实线性空间 $(\dim X\ge n)$, 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $K\ge 1$ 及 $x_1,\dots,x_n\in X$, 函数 $\|\cdot,\dots,\cdot\|:X^n\to\mathbb{R}$ 满足如下条件:

(1) $\|x_1,\dots,x_n\|=0$ 当且仅当 $x_1,\dots,x_n$ 是线性无关的;

(2) $\|x_1,\dots,x_n\|=\|x_{j_1},\dots,x_{j_n}\|$, $(j_1,\dots,j_n)$ 是 $(1,\dots,n)$ 的任意排列;

(3) $\|\alpha x_1,\dots,x_n\|=|\alpha|\|x_1,\dots,x_n\|$;

(4) $\|x+y,x_2,\dots,x_n\|\le K(\|x,x_2,\dots,x_n\|+\|y,x_2,\dots,x_n\|)$,

则 $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ 称为 X 上的 n- 拟范数 (n-quasi norm), $(X,\|\cdot,\dots,\cdot\|)$ 称为 n- 拟范空间.

定义 1.4　特别地, 当 $K=1$, $\|\cdot,\ldots,\cdot\|$ 就是大家通常讨论的 X 上的 n- 范数 (n-norm), $(X,\|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ 称为 n- 赋范空间 (n-normed space) [15].

文献 [15] 通过下面的例子给出 n- 范数的直观含义: 设 $X=\mathbb{R}$,

$$\|x_1,\ldots,x_n\|=\mathrm{abs}\begin{vmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

因此, 当 $n=2$ 时, 2- 范数可以看成平行四边形的面积, 当 $n=3$ 时, 3- 范数可以看成立体的体积.

设 X,Y 是广义 n- 赋范空间 $(\dim X,\dim Y\geq n)$, $f:X\to Y$ 是一个映射.

定义 1.5　如果对于任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n,\, c\in X$, 有

$$\|f(x_1)-f(c),f(x_2)-f(c),\ldots,f(x_n)-f(c)\|=\rho(\|x_1-c,x_2-c,\ldots,x_n-c\|),$$

称 f 为保持 ρ- 诱导 n- 距离的映射.

特别地, 当 ρ 是恒等映射时, 即

定义 1.6　对于任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n,\, c\in X$, 有

$$\|f(x_1)-f(c),f(x_2)-f(c),\ldots,f(x_n)-f(c)\|=\|x_1-c,x_2-c,\ldots,x_n-c\|,$$

则称 f 为 n- 等距映射.

定义 1.7　如果对任意 $x,y,z\in X$, 存在 $t\in\mathbb{R}$, 使得 $z-x=t(y-x)$, 则 x,y,z 称为 2- 共线的; 进一步如果存在 $s\in\mathbb{R}$ 满足 $f(z)-f(x)=s(f(y)-f(x))$, 则称 f 保持 2- 共线.

2　主要结果

引理 2.1　设 X, Y 为两个实广义 n- 赋范空间, 如果非零函数 $\rho:\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}_+^0$ 满足 $\rho(0)=0$ 是连续函数, $f:X\to Y$ 为保持 ρ- 诱导 n- 距离的映射, 并且 $\rho\neq 0$, 则 f 是单射.

证明　假设 f 不是单射, 也即存在 $u,v\in X$ 以及 $u\neq v$, 但是 $f(u)=f(v)$. 由于 $\rho\neq 0$ 存在 $\alpha,\beta>0$, 使得 $\rho(\beta)=\alpha$. 因为 $\dim X\geq n$ 和 $u-v\neq 0$, 这蕴含存在 $x_2,x_3,\ldots,x_n\in X$, 使得

$$\|u-v,x_2-v,x_3-v,\ldots,x_n-v\|\neq 0.$$

令

$$z_2=v+\frac{\beta(x_2-v)}{\|u-v,x_2-v,x_3-v,\ldots,x_n-v\|},$$

这样 $\|u-v,z_2-v,x_3-v,\ldots,x_n-v\|=\beta$, 即

$$\|f(u)-f(v),f(z_2)-f(v),f(x_3)-f(v),\ldots,f(x_n)-f(v)\|=\alpha>0,$$

这与 $f(u)=f(v)$ 矛盾. 证毕.

引理 2.2　令 X, Y 为两个实广义 n- 赋范空间, 如果非零函数 $\rho:\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}_+^0$ 满足 $\rho(0)=0$ 是连续函数, 且 $f:X\to Y$ 为保持 ρ- 诱导 n- 距离的映射, 则 f 保持 2- 共线.

证明　由引理 2.1, f 为单射.

如果 $n=2$, 根据 $\|x_1-x_0,x_2-x_0\|=0$ 以及 $\rho(0)=0$, 这样 $\|f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0)\|=0$. 于是 f 为 2- 共线的.

如果 $n>2$, 假设 x_0,x_1,x_2 是 X 中互不相同的元且为 2- 共线的, 那么 x_1-x_0,x_2-x_0 是线性相关的, 同时 f 是单射意味着 $f(x_0),f(x_1),f(x_2)$ 也是互不相同的.

由于 $\rho\neq 0$ 以及 $\rho(0)=0$. 那么存在 $\alpha,\beta>0$ 满足 $\rho(\alpha)=\beta$, 由于 $\dim X\geq n$, 这样存在 $y_1,y_2,\ldots,y_n\in X$, 使得 $y_1-x_0,y_2-x_0,\ldots,y_n-x_0$ 是线性无关的, 并且

$$\|y_1-x_0,y_2-x_0,\ldots,y_n-x_0\|=\alpha.$$

因此, 我们有

$$\|f(y_1)-f(x_0),f(y_2)-f(x_0),\ldots,f(y_n)-f(x_0)\|=\beta\neq 0.$$

可见, 集合 $A=\{f(x)-f(x_0):x\in X\}$ 包含 n 个线性无关的向量. 由于 x_0,x_1,x_2 是 2- 共线的, 则对于任何 $x_3,\ldots,x_n\in X$, 有

$$\|x_1-x_0,x_2-x_0,x_3-x_0,\ldots,x_n-x_0\|=0,$$

于是

$$\|f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_n)-f(x_0)\|=0,$$

也即 $f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_n)-f(x_0)$ 是线性相关的.

如果存在 $x_3,\ldots,x_{n-1}$, 使得 $f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_0)$ 是线性无关的, 那么集合

$$\begin{aligned}A&=\{f(x_n)-f(x_0):x_n\in X\}\\&\subset\operatorname{span}\{f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_0)\},\end{aligned}$$

与 A 包含 n 个线性无关向量矛盾.

因此 $f(x_1)-f(x_0),\ldots,f(x_{n-1})-f(x_0)$ 是线性相关的.

如果存在 $x_3,\ldots,x_{n-2}$, 使得 $f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_{n-2})-f(x_0)$ 是线性无关的, 那么

$$\begin{aligned}A&=\{f(x_{n-1})-f(x_0):x_{n-1}\in X\}\\&\subset\operatorname{span}\{f(x_1)-f(x_0),f(x_2)-f(x_0),f(x_3)-f(x_0),\ldots,f(x_{n-2})-f(x_0)\},\end{aligned}$$

与 A 包含 n 个线性无关向量矛盾.

以此类推, $f(x_1)-f(x_0)$ 和 $f(x_2)-f(x_0)$ 是线性相关的, 也即 $f(x_0),f(x_1),f(x_2)$ 是 2- 共线的. 这蕴含 f 保持 2- 共线. 证毕.

定理 2.3 设 X 和 Y 为两个实线性广义 n- 赋范空间, 如果满足 $\rho(0)=0$ 的非零函数 $\rho:\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}_+^0$ 是连续的, $f:X\to Y$ 为保持 ρ- 诱导 n- 距离的映射: 对任意 $c\in X$, 有

$$\|f(x_1)-f(c),f(x_2)-f(c),\ldots,f(x_n)-f(c)\|=\rho(\|x_1-c,x_2-c,x_3-c,\ldots,x_n-c\|),$$

则 ρ 是正齐次的, 并且 f 是仿射的.

证明 首先, 证明 ρ 是正齐次的. 设 $x,y,z\in X$ 为互不相同的元素, 令 $x=\frac{y+z}{2}$, 这样 $y-x=-(z-x)$. 由于 f 是单射并且保持 2- 共线 (引理 2.2), 那么有 $s\neq 0$, 使得

$$f(y)-f(x)=s(f(z)-f(x)). \tag{2.1}$$

这样, 存在 $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\in X$ 满足 $\|y-x,x_1-x,x_2-x,\ldots,x_{n-1}-x\|\neq 0$, $\|z-x,\ x_1-x,\ x_2-x,\ldots,x_{n-1}-x\|=\|y-x,\ x_1-x,\ x_2-x,\ldots,x_{n-1}-x\|$, 以及

$$\|f(z)-f(x),f(x_1)-f(x),\ldots,f(x_{n-1})-f(x)\|=\|f(y)-f(x),f(x_1)-f(x),\ldots,f(x_{n-1})-f(x)\|.$$

显然, 根据 (2.1) 有

$$\|f(z)-f(x),\dots,f(x_{n-1})-f(x)\|=\frac{1}{|s|}\|f(y)-f(x),\dots,f(x_{n-1})-f(x)\|.$$

因为 f 是单射, 于是必有 $s=-1$. 这样 $f(y)-f(x)=f(x)-f(z)$, 并且

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right)=\frac{f(y)+f(z)}{2}.$$

令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则对任何 $x\in X$ 以及任意正有理数 r,p, 有

$$g(rx)=rg(x),\quad g(rx+py)=rg(x)+pg(y). \tag{2.2}$$

设 r 为正有理数, 记 $\|x_1-y_1,x_2-y_2,\dots,x_n-y_n\|=a$, 于是根据 (2.2) 有

$$\begin{aligned}\rho(ra)&=\rho(r\|x_1-y_1,x_2-y_2,\dots,x_n-y_n\|)\\&=\|f(rx_1)-f(ry_1),f(x_2)-f(y_2),\dots,f(x_n)-f(y_n)\|\\&=\|g(rx_1)-g(ry_1),g(x_2)-g(y_2),\dots,g(x_n)-g(y_n)\|\\&=r\|g(x_1)-g(y_1),g(x_2)-g(y_2),\dots,g(x_n)-g(y_n)\|\\&=r\|f(x_1)-f(y_1),f(x_2)-f(y_2),\dots,f(x_n)-f(y_n)\|=r\rho(a).\end{aligned}$$

又由于 $\rho:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ 是连续函数, 这样 ρ 是正齐次的.

其次, 我们证明 f 是仿射的. 设 $t\in\mathbb{R}^+$, 由于 $f(0),f(x)$ 和 $f(tx)$ 是 2- 共线的, $g(0),g(x)$ 和 $g(tx)$ 也是 2- 共线的, 于是存在唯一实数 s, 使得 $g(tx)=sg(x)$. 这样

$$\begin{aligned}t\rho(\|x,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|)&=\rho(\|tx,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|)\\&=\|g(tx),g(x_1),g(x_2),\dots,g(x_{n-1})\|\\&=|s|\,\|g(x),g(x_1),g(x_2),\dots,g(x_{n-1})\|\\&=|s|\rho(\|x,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\|).\end{aligned}$$

因此, $t=|s|$, $g(tx)=t(x)$ 或者 $g(tx)=-tg(x)$.

假设 $g(tx)=-tg(x)$, 由于 $\dim X\geq n$, 于是存在正有理数 $q>t$ 以及存在 $z_1,\dots,z_{n-1}\in X$, 使得 $\rho(\|x,z_1-qx,z_2-qx,\dots,z_{n-1}-qx\|)\neq 0$. 这样

$$\begin{aligned}&(q+t)\|g(x),g(z_1)-g(qx),g(z_2)-g(qx),\dots,g(z_{n-1})-g(qx)\|\\&=\|qg(x)-(-tg(x)),g(z_1)-g(qx),g(z_2)-g(qx),\dots,g(z_{n-1})-g(qx)\|\\&=\|g(qx)-g(tx),g(z_1)-g(qx),g(z_2)-g(qx),\dots,g(z_{n-1})-g(qx)\|\\&=\rho(\|qx-tx,z_1-qx,z_2-qx,\dots,z_{n-1}-qx\|)\\&=\rho((q-t)\|x,z_1-qx,z_2-qx,\dots,z_{n-1}-qx\|)\\&=(q-t)\rho(\|x,z_1-qx,z_2-qx,\dots,z_{n-1}-qx\|)\\&=(q-t)\|g(x),g(z_1)-g(qx),g(z_2)-g(qx),\dots,g(z_{n-1})-g(qx)\|,\end{aligned}$$

矛盾. 于是对任意 $t\in\mathbb{R}$, 我们有 $g(tx)=tg(x)$. 根据 g 的可加性, 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 有 $g(tx)=tg(x)$. 我们得到 f 是仿射的.

进一步, 记 $r=\rho(1)$, 那么 $\rho(t)=rt$ 以及 $g=\frac{f}{\sqrt[n]{r}}$. 这样 g 是一个 n- 等距. 证毕.

注 2.4 如果 ρ 不是正齐次的, 则不存在映射 $f: X \to Y$ 满足

$$\|f(x_1)-f(c), f(x_2)-f(c), \ldots, f(x_n)-f(c)\| = \rho(\|x_1-c, x_2-c, x_3-c, \ldots, x_n-c\|).$$

下面的推论即为广义 n- 赋范空间的 Mazur–Ulam 定理:

推论 2.5 设 X 和 Y 为两个实线性广义 n- 赋范空间, 如果 $f: X \to Y$ 是一个 n- 等距映射, 那么 f 是仿射的.

注 2.6 如果 X 和 Y 为两个实线性 n- 赋范空间, 此推论 2004 年由 Chu 等给出 [4]; 如果 X 和 Y 为两个实线性广义 n- 赋范空间, 此推论 2017 年由马玉梅给出 [13].

致谢 感谢评审专家的建议和细心指正, 感谢 2018 年清华三亚 Banach 空间国际研讨会专家的邀请, 跟各位老师学习和讨论使我受益匪浅.

参 考 文 献

[1] Aleksandrov A. D., Mappings of families of sets, *Soviet Math. Dokl.*, 1970, **190**(3): 116–120.
[2] Chen X., Song M., Characterizations on isometries in linear n-normed spaces, *Nonl. Anal.*, 2010, **72**(3): 1895–1901.
[3] Chu H., Choi S., Kang D., Mapping of conservative distance in linear n-normed spaces, *Nonlinear Anal.*, 2009, **70**(3): 1168–1174.
[4] Chu H., Lee K., Park C., On the Aleksandrov problem in linear n-normed spaces, *Nonlinear Anal.*, 2004, **59**(7): 1001–1011.
[5] Ekariani S., Gunawan H., Idris M., A contractive mapping theorem on the n-normed space of p-summable sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **4**(1): 1–7.
[6] Gao J., On the Aleksandrov problem of distance preserving mapping, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **352**: 583–590.
[7] Gähler S., Lineare 2-normierte Räume (in German), *Math. Nachr.*, 1965, **28**: 1–43.
[8] Huang X., Tan D., Mappings of preserving n-distance one in n-normed spaces, *Aequat. Math.*, 2018, **92**(3): 401–413.
[9] Jia W., On the mappings preserving equality of 2-distance, *Quaest. Math.*, 2010, **33**(1): 11–20.
[10] Ma Y., The Aleksandrov problem for unit distance preserving mapping, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 2000, **20**(3): 359–364.
[11] Ma Y., Isometriy on linear n-normed spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2014, **39**(2): 973–981.
[12] Ma Y., The Aleksandrov problem and the Mazue-Ulam theorem on linear n-normed space, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2013, **50**(5): 1631–1637.
[13] Ma Y., Isometry on linear n-G-quasi normed spaces, *Canad. Math. Bull.*, 2017, **60**(2): 350–363.
[14] Mazur S., Ulam S., Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés (in Frcech), *C. R. Acad. Sci.*, 1932, **194**: 946–948.
[15] Misiak A., n-inner product spaces, *Math. Nach.*, 1989, **140**(1): 299–319.
[16] Park C., Rassias T. M., Isometries on linear n-normed spaces, *J. Ineq. Pure. Appl. Math.*, 2006, **7**(5): 1–17.
[17] Park C., Cihangir A., A new version of Mazur–Ulam theorem under weaker conditions in linear n-normed spaces, *J. Comp. Anal. Appl.*, 2014, **16**(1): 827–832.
[18] Park C., Rassias T. M., Isometric additive in generalized quasi-Banach spaces, *Banach J. Math. Anal.*, 2008, **2**(1): 59–69.
[19] Rassias T. M., Šemrl P., On the Mazur–Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, 118(3): 919–925.
[20] Vogt A., Maps which preserve equality of distance, *Stud. Math.*, 1973, **45**(1): 43–48.
[21] Zheng F., Ren W., The Aleksandrov problem in quasi convex normed linear space, *Acta Sci. Natur. Nankai Univ.*, 2014, **47**(3): 49–56.