第63卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.3
2020年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2020

文章编号: 0583-1431(2020)03-0253-08 **文献标识码: A**

p-adic 超几何函数与 Dwork 超曲面上的有理点

曹茹月 方程成 曹 炜

宁波大学数学与统计学院 宁波 315211
E-mail: 1586579618@qq.com; 511203238@qq.com; caowei@nbu.edu.cn

摘 要 p-adic 超几何函数是经典的 Gauss 超几何函数在有限域上的模拟, 与许多数论问题都有联系. 设 $\mathbb{F}_q$ 是 q 元有限域, $\lambda \in \mathbb{F}_q, n$ 为正整数. 本文研究了 Dwork 超曲面 $D_\lambda^n : x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = n\lambda x_1 x_2 \cdots x_n$ 及其推广形式上的 $\mathbb{F}_q$- 有理点, 并在 n 与 $q(q-1)$ 互素时给出了由 p-adic 超几何函数表示的各种 $\mathbb{F}_q$- 有理点个数的公式, 从而修正和改进了 Barman 与 Goodson 等人的结论.

关键词 p-adic 超几何函数; Gauss 和; Dwork 超曲面
MR(2010) 主题分类 11G25, 11T24
中图分类 O156.2

p-adic Hypergeometric Functions and Rational Points on Dwork Hypersurfaces

Ru Yue CAO Cheng Cheng FANG Wei CAO

School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, *P. R. China*
E-mail: 1586579618*@qq.com*; 71804461*@qq.com*; *caowei@nbu.edu.cn*

Abstract p-adic hypergeometric functions are hypergeometric functions over finite fields analogous to the classical Gaussian hypergeometric functions, which have been found applications in diverse number theory problems. Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field of q elements, $\lambda \in \mathbb{F}_q$ and n be a positive integer. This paper investigates the $\mathbb{F}_q$-rational points on the Dwork hypersurface $X_\lambda^n : x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = n\lambda x_1 x_2 \cdots x_n$ as well as its generalized form, and provides the formula for the number of the $\mathbb{F}_q$-rational points in terms of a p-adic hypergeometric function when n and $q(q-1)$ are coprime, which revises and improves the results given by Barman and Goodson et al.

Keywords p-adic hypergeometric function; Gauss sum; Dwork hypersurface
MR(2010) Subject Classification 11G25, 11T24
Chinese Library Classification O156.2

收稿日期: 2019-07-17; 接受日期: 2019-10-23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871291); 宁波市自然科学基金资助项目 (2019A610035)

1 引言

经典的超几何函数 (又称 Gauss 超几何函数) 是定义在复数域上, 其推广形式为

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} a_0, & a_1, & \dots, & a_n \\ & b_1, & \dots, & b_n \end{matrix}\,\middle|\, z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k\cdots(a_n)_k}{(b_1)_k\cdots(b_n)_k k!} z^k, $$

其中 $a_i, b_j, z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, Pochhammer 符号 $(a)_0 := 1$, $(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1)$, 若 $k\geq 1$. Gauss 超几何函数满足众多恒等式并在许多数学领域具有重要应用.

1987 年, Greene 利用有限域上的乘法特征构造了有限域上的超几何函数. 设 $\mathbb{F}_q$ 是 q 元有限域, 其中 $q=p^r$, p 是奇素数, $r\in\mathbb{Z}^+$. 用 $\widehat{\mathbb{F}_q^*}$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 的乘法特征群. 对任意的 $A, B\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}$, $\bar{B}$ 表示 B 的逆, 正规化的 Jacobi 和 $\binom{A}{B} := \frac{B(-1)}{q}\sum_{x\in\mathbb{F}_q} A(x)\bar{B}(1-x)$. Greene [11] 定义有限域上的超几何函数为

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} A_0, & A_1, & \dots, & A_n \\ & B_1, & \dots, & B_n \end{matrix}\,\middle|\, c\right)_q := \frac{q}{q-1}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} \binom{A_0\chi}{\chi}\binom{A_1\chi}{B_1\chi}\cdots\binom{A_n\chi}{B_n\chi}\chi(c), $$

其中 $A_i, B_j\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}$, $c\in\mathbb{F}_q$, $n\in\mathbb{Z}^+$. 此外, Katz [17] 与 McCarthy [23] 分别独立地构造了有限域上的超几何函数 (其相互之间的关系见文 [23]). 有限域上的超几何函数满足众多同余恒等式且与椭圆曲线及模形式等诸多数论问题有密切联系 [1, 9, 12, 20, 22].

由于应用有限域上的超几何函数所得到的结论仅局限于特殊的素数, McCarthy [21–24] 利用 p-adic Gamma 函数定义了 p-adic 超几何函数. 用 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p-adic 整数环, Γ_p 表示 p-adic Gamma 函数, ω 表示 $\mathbb{F}_q$ 上的 Teichmüller 特征. 对于任意的 $x\in\mathbb{Q}$, 定义 $\lfloor x\rfloor$ 为不大于 x 的最大整数 $\langle x\rangle = x-\lfloor x\rfloor$.

定义 1.1 [24] 设 n 为正整数, $t\in\mathbb{F}_q$, $a_i, b_i\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p$, $1\leq i\leq n$. 定义 p-adic 超几何函数

$$ \begin{aligned} {}_nG_n\left[\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{matrix}\,\middle|\, t\right]_q := {} & \frac{-1}{q-1}\sum_{j=0}^{q-2}(-1)^{jn}\bar{\omega}^j(t) \\ & \times\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=0}^{r-1}(-p)^{-\lfloor\langle a_ip^k\rangle-(jp^k/(q-1))\rfloor-\lfloor\langle -b_ip^k\rangle+(jp^k/(q-1))\rfloor} \\ & \times\frac{\Gamma_p(\langle(a_i-\frac{j}{q-1})p^k\rangle)}{\Gamma_p(\langle a_ip^k\rangle)}\frac{\Gamma_p(\langle(-b_i+\frac{j}{q-1})p^k\rangle)}{\Gamma_p(\langle -b_ip^k\rangle)}. \end{aligned} $$

McCarthy 定义的 p-adic 超几何函数不仅扩展了与有限域上超几何函数有关的结论的适用范围, 而且与许多数论问题有联系. 特别值得关注的是, 近年来有不少作者利用 p-adic 超几何函数研究 Dwork 超曲面 [2, 3, 10], 即由下列方程所确定的超曲面

$$ D_\lambda^n : x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = n\lambda x_1x_2\cdots x_n, \quad \lambda\in\mathbb{F}_q^*. \tag{1.1} $$

因 Dwork [6–8] 用 p-adic 分析方法研究了上述超曲面的 Zeta 函数并证明了 Weil 猜想的 "有理性" 部分, 故而得名. Dwork 超曲面是 Calabi–Yau 簇的一种重要特例, 且它的 Zeta 函数及其根与 Picard–Fuch 微分方程的解联系紧密, 因而有大量文献研究这类超曲面 [10,14,27]. 显见 D_λ^n 是齐次的, 用 $\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_q)$ 表示方程 (1.1) 所确定的 Dwork 超曲面在射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ 中有理点的个数. Goodson [10] 得到了当 $q\equiv 1 \pmod n$ 时, $\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_q)$ 的表达式, 并提出如下猜想:

猜想 1.2 (见文 [10, Conjecture 8.2]) 设 p 是素数. 若 n 是奇素数且 $p \not\equiv 1 \pmod n$, 则有

$$\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_p) = \frac{p^{n-1}-1}{p-1} + {}_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix} \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n} \\ 0, & 0, & \dots, & 0 \end{matrix} \middle| \lambda^n \right]_p.$$

本文将修正 Goodson 猜想中的符号错误并进一步证明

定理 1.3 设 $q = p^r$, p 是奇素数, r, n 均为正整数. 若 $\gcd(n, q(q-1)) = 1$, 则有

$$\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_q) = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - {}_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix} \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n} \\ 0, & 0, & \dots, & 0 \end{matrix} \middle| \lambda^n \right]_q. \tag{1.2}$$

本文还将利用次数矩阵将上述结论推广到非齐次情形上去. 第 2 节介绍相关的预备知识, 最后一节给出定理 1.3 及其推论的证明.

2 预备知识

本节将简要介绍 Gauss 和、次数矩阵与 p-adic Gamma 函数等定义及若干引理 (详见文献 [16, 18, 19, 25]). 用 $\mathbb{Q}_p$ 表示 p-adic 数域, $\mathbb{Z}_p$ 为其整数环, $\mathbb{C}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的代数封闭域的完备化. 固定 ζ_p 为 $\mathbb{C}_p$ 中的一个本原 p 次单位根. 用 Tr 表示从 $\mathbb{F}_q$ 到素域 $\mathbb{F}_p$ 的绝对迹映射. 设 ω 是 $\mathbb{F}_q$ 的 Teichmüller 特征, 则对于 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $\omega(a)$ 是 $(q-1)$ 次单位根. 因 ω 的阶为 $(q-1)$, 故 $\mathbb{F}_q^*$ 的所有乘法特征可由 ω 生成, 即 $\widehat{\mathbb{F}_q^*} = \{\omega^k : k = 0, 1, \dots, q-2\}$.

引理 2.1 [5] 设 k 为整数, 则有

$$\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*} \omega(a)^k = \begin{cases} 0, & 若\ (q-1) \nmid k, \\ q-1, & 若\ (q-1) \mid k. \end{cases}$$

定义 2.2 [5] 设 $0 \le k \le q-2$, 定义 $\mathbb{F}_q$ 上的 Gauss 和 $G(k) = \sum_{a\in\mathbb{F}_q^*} \omega(a)^{-k} \zeta_p^{\mathrm{Tr}(a)}$.

引理 2.3 [5] 设 $a \in \mathbb{F}_q^*$, 则 Gauss 和满足下面的插值关系 $\zeta_p^{\mathrm{Tr}(a)} = \sum_{k=0}^{q-2} \frac{G(k)}{q-1} \omega(a)^k$.

设 n 元多项式 $f(X) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ 具有如下形状

$$f(X) = a_1 {x_1}^{d_{11}} \cdots {x_n}^{d_{n1}} + \cdots + a_m {x_1}^{d_{1m}} \cdots {x_n}^{d_{nm}}, \quad a_i \in \mathbb{F}_q^*, \quad d_{ij} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \tag{2.1}$$

则 $f(X)$ 的次数矩阵定义为 $n \times m$ 阶矩阵 $D_f = (D_1, \dots, D_m)$, 其中 $D_j = (d_{1j}, \dots, d_{nj})^{\mathrm{T}}$, $j = 1, \dots, m$; $f(X)$ 的增广矩阵定义为 $\widetilde{D}_f = (\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_m)$, 其中 $\widetilde{D}_j^{\mathrm{T}} = (1, D_j^{\mathrm{T}})$; $f(X)$ 的系数向量记为 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. 由于多项式 $f(X)$ 完全由其次数矩阵 D_f 及其系数向量 $\mathbf{a}$ 所决定, 因此在已知次数矩阵 D_f 和系数向量 $\mathbf{a}$ 时, 亦简记 $f(X) = (D_f; \mathbf{a})$. 我们分别用 $N(f)$ 与 $N^*(f)$ 表示方程 $f(X) = 0$ 在 $\mathbb{F}_q$ 与 $\mathbb{F}_q^*$ 中有理点的个数, 即

$$N(f) = \#\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q)^n \mid f(X) = 0\}, \quad N^*(f) = \#\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q^*)^n \mid f(X) = 0\}.$$

引理 2.4 [5, 26] 令多项式 $f(X)$ 如 (2.1) 所设, 则有

$$N(f) = \frac{1}{q} \sum_{x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q} \zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0 f(X))}, \quad N^*(f) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{x_0 \in \mathbb{F}_q \\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q^*}} \zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0 f(X))}.$$

接下来, 介绍 p-adic Gamma 函数 Γ_p. 对于 $n \in \mathbb{Z}^+$, 定义 $\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{0<j<n, p\nmid j} j$. 设 $x \in \mathbb{Z}_p$. 通过下面求极限的方式可将 Γ_p 延拓到 $\mathbb{Z}_p$ 上:

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to x} \Gamma_p(n).$$

令 $\Gamma_p(0)=1$. 易证 p-adic Gamma 函数 Γ_p 具有以下基本性质:

$$\frac{\Gamma_p(x+1)}{\Gamma_p(x)}=\begin{cases}-1, & 若\ x\in p\mathbb{Z}_p,\\ -x, & 若\ x\notin p\mathbb{Z}_p.\end{cases}$$

用 $\langle x\rangle_p$ 表示 x 模 p 的最小非负剩余, 则有

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x)=(-1)^{\langle x\rangle_p}.$$

下面给出与 p-adic Gamma 函数 Γ_p 积式有关的两条引理.

引理 2.5 [2] 设 $q=p^r$, p 是素数. 若 $0\le k\le q-2$, $t\in\mathbb{Z}^+$, 且 $p\nmid t$, 则有

$$\omega(t^{-tk})\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p\Big(\Big\langle\frac{-tp^ik}{q-1}\Big\rangle\Big)\prod_{h=1}^{t-1}\Gamma_p\Big(\Big\langle\frac{hp^i}{t}\Big\rangle\Big)=\prod_{i=0}^{r-1}\prod_{h=0}^{t-1}\Gamma_p\Big(\Big\langle\frac{p^i(1+h)}{t}-\frac{p^ik}{q-1}\Big\rangle\Big).$$

引理 2.6 [3] 设 $q=p^r$, p 是素数. 若 $0<k\le q-2$, 则有

$$\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p\Big(\Big\langle\Big(1-\frac{k}{q-1}\Big)p^i\Big\rangle\Big)\Gamma_p\Big(\Big\langle\frac{kp^i}{q-1}\Big\rangle\Big)=(-1)^r\bar{\omega}^k(-1).$$

令 π 是 $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ 中唯一满足下列关系的元

$$\pi^{p-1}=-p,\quad \pi\equiv\zeta_p-1\pmod{(\zeta_p-1)^2},$$

则 π 是环 $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ 中的一个素元. 由二项式定理和 Hensel 引理可知, 方程 $(1+\pi t)^p=1$ 在 $\mathbb{Z}_p[\pi]$ 中恰有 p 个不同的根, 因此 $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]=\mathbb{Z}_p[\pi]$.

引理 2.7 (Gross–Koblitz 公式) [13,15] 设 $0\le k\le q-2$, 则有

$$G(k)=-\pi^{(p-1)\sum_{i=0}^{r-1}\langle\frac{kp^i}{q-1}\rangle}\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p\Big(\Big\langle\frac{kp^i}{q-1}\Big\rangle\Big).$$

3 主要结论

引理 3.1 设 $q=p^r$, p 是素数, 正整数 n 与 $q(q-1)$ 互素. 对于 $1<k\le q-2$ 及 $0\le i\le r-1$, 则有

$$n\Big\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor+\Big\lfloor\frac{-nkp^i}{q-1}\Big\rfloor=(n-1)\Big\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor+\sum_{h=1}^{n-1}\Big\lfloor\Big\langle\frac{hp^i}{n}\Big\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor-1.\tag{3.1}$$

证明 设 $\lfloor\frac{-nkp^i}{q-1}\rfloor=nt+s$, 其中 $t,s\in\mathbb{Z}$, $0\le s\le n-1$. 由 $1<k\le q-2$ 及 $\gcd(n,p(q-1))=1$ 可知, $\frac{-nkp^i}{q-1}$ 不是整数, 故可设 $nt+s<\frac{-nkp^i}{q-1}<nt+s+1$. 由此可得 $t+\frac{s}{n}<\frac{-kp^i}{q-1}<t+\frac{s+1}{n}$. 从而有 $-t-\frac{s+1}{n}<\frac{kp^i}{q-1}<-t-\frac{s}{n}$. 因此 $\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\rfloor=-t-1$. 所以 (3.1) 的左边等于 $s-n$.

另一方面, 由于 $\gcd(n,p(q-1))=1$, 故有

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n-1}\Big\lfloor\Big\langle\frac{hp^i}{n}\Big\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor&=\sum_{h=1}^{n-1}\Big\lfloor\Big\langle\frac{h}{n}\Big\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor\\&=\sum_{h=1}^{n-s-1}\Big\lfloor\Big\langle\frac{h}{n}\Big\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor+\sum_{h=n-s}^{n-1}\Big\lfloor\Big\langle\frac{h}{n}\Big\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\Big\rfloor\\&=(n-s-1)t+s(t+1)=nt-t+s.\end{aligned}$$

前已证 $\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\rfloor=-t-1$, 所以 (3.1) 的右边亦等于 $s-n$. 由此引理得证.

设 $n\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda\in\mathbb{F}_q^*$. 定义 $\mathbb{F}_q$ 上的两个 n 元多项式

$$\begin{aligned}g(X)&=x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n,\\ f(X)&=x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n-n\lambda x_1x_2\cdots x_n.\end{aligned}\tag{3.2}$$

引理 3.2 [4] 设 $b\in\mathbb{F}_q$. 若 $\gcd(n,q-1)=1$, 则有

$$N^*(g-b)=\begin{cases}\dfrac{(q-1)^n-(-1)^n}{q}, & \text{当}\quad b\neq 0,\\ \dfrac{(q-1)^n-(-1)^n}{q}+(-1)^n, & \text{当}\quad b=0.\end{cases}$$

显然, 由多项式 $f(X)$ 所确定的超曲面就是 Dwork 超曲面 D_λ^n. $f(X)$ 的系数向量为 $\mathbf{a}=(1,\dots,1,-n\lambda)$, $f(X)$ 的次数矩阵为 $n\times(n+1)$ 阶矩阵

$$D_f=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0&1\\0&n&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n&1\end{pmatrix}.\tag{3.3}$$

记 $f(X)=(D_f;\mathbf{a})$. 设 A 为 $n\times(n+1)$ 阶整数矩阵, 若 A 中所有元素均为正数, 则简记为 $A>0$; 若 A 与 D_f 在环 $\mathbb{Z}/(q-1)$ 中行等价, 则简记为 $A\overset{r_q}{\sim}D_f$.

定理 1.3 的证明 显然有

$$\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_q)=\frac{N(f)-1}{q-1}.\tag{3.4}$$

接着我们求 $N(f)$. 由引理 2.4,

$$\begin{aligned}N(f)&=\frac{1}{q}\sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}\\&=\frac{1}{q}\Bigg(\sum_{\substack{x_0=0\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}+\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q\\x_1\cdots x_n=0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}+\sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}\Bigg)\\&=q^{n-1}+\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q\\x_1\cdots x_n=0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}+\frac{1}{q}\sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

类似地, 由引理 2.4 和 3.2, 可得

$$N(g)=q^{n-1}+\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q\\x_1\cdots x_n=0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0g(X))}+\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0g(X))}=q^{n-1},\tag{3.6}$$

$$N^*(g)=\frac{(q-1)^n}{q}+\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0g(X))}=\frac{(q-1)^n-(-1)^n}{q}+(-1)^n.\tag{3.7}$$

比较 (3.5), (3.6) 和 (3.7), 我们有

$$\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q\\x_1\cdots x_n=0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}=\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q\\x_1\cdots x_n=0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0g(X))}=-\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0g(X))}=(-1)^{n+1}(q-1).\tag{3.8}$$

记 $\Delta(f)=\sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0f(X))}$. 由引理 2.1 和 2.3 可得

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\prod_{j=1}^{n+1}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(a_jX^{\widetilde{D}_j})} = \sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\prod_{j=1}^{n+1}\sum_{k_j=0}^{q-2}\frac{G(k_j)}{q-1}\omega(a_j)^{k_j}\omega(X^{\widetilde{D}_j})^{k_j}\\ &= \sum_{k_1=0}^{q-2}\cdots\sum_{k_{n+1}=0}^{q-2}\left(\prod_{j=1}^{n+1}\frac{G(k_j)}{q-1}\omega(a_j)^{k_j}\right)\sum_{x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}\omega(X^{k_1\widetilde{D}_1+\cdots+k_{n+1}\widetilde{D}_{n+1}})\\ &= \sum_{\sum_{j=1}^{n+1}k_j\widetilde{D}_j\equiv 0 \pmod{q-1}}\prod_{j=1}^{n+1}\omega(a_j)^{k_j}G(k_j).\end{aligned}\tag{3.9}$$

由 (3.3) 易得同余方程组 $\sum_{j=1}^{n+1}k_j\widetilde{D}_j\equiv 0 \pmod{q-1}$ 的解为 $k_1=\cdots=k_n=k$, $k_{n+1}=-nk$, 其中 $k=0,1,\dots,q-2$. 代入 (3.9) 并应用引理 2.7 中的 Gross–Koblitz 公式, 我们有

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \sum_{k=0}^{q-2}(G(k))^nG(-nk)\omega^{-nk}(-n\lambda)\\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{q-2}\pi^{(p-1)\sum_{i=0}^{r-1}\{n\langle\frac{kp^i}{q-1}\rangle+\langle\frac{-nkp^i}{q-1}\rangle\}}\bar{\omega}^{nk}(-n\lambda)\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p^n\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\Gamma_p\left(\left\langle\frac{-nkp^i}{q-1}\right\rangle\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

由引理 2.5 可得

$$\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p\left(\left\langle\frac{-nkp^i}{q-1}\right\rangle\right)=\omega^{nk}(n)\prod_{i=0}^{r-1}\frac{\prod_{h=1}^{n}\Gamma_p(\langle(\frac{h}{n}-\frac{k}{q-1})p^i\rangle)}{\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma_p(\langle\frac{hp^i}{n}\rangle)}.\tag{3.11}$$

注意到 $\pi^{p-1}=-p$. 由 (3.10) 和 (3.11) 得

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\Delta(f) &= \sum_{k=0}^{q-2}(-p)^{\sum_{i=0}^{r-1}\{n\langle\frac{kp^i}{q-1}\rangle+\langle\frac{-nkp^i}{q-1}\rangle\}}\bar{\omega}^{nk}(-\lambda)\\ &\quad\times\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p^n\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\frac{\prod_{h=1}^{n}\Gamma_p(\langle(\frac{h}{n}-\frac{k}{q-1})p^i\rangle)}{\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma_p(\langle\frac{hp^i}{n}\rangle)}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{q-2}(-p)^{\sum_{i=0}^{r-1}\{-n\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\rfloor-\lfloor\frac{-nkp^i}{q-1}\rfloor\}}\bar{\omega}^{nk}(-\lambda)\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\Gamma_p\left(\left\langle\left(1-\frac{k}{q-1}\right)p^i\right\rangle\right)\\ &\quad\times\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p^{n-1}\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\prod_{h=1}^{n-1}\frac{\Gamma_p(\langle(\frac{h}{n}-\frac{k}{q-1})p^i\rangle)}{\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma_p(\langle\frac{hp^i}{n}\rangle)}.\end{aligned}$$

应用引理 2.6 和 3.1, 我们有

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\Delta(f) &= 1+\sum_{k=1}^{q-2}(-1)^r(-p)^{\sum_{i=0}^{r-1}\{1-(n-1)\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\rfloor-\sum_{h=1}^{n-1}\lfloor\langle\frac{hp^i}{n}\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\rfloor\}}\bar{\omega}^k((-1)^{n+1}\lambda^n)\\ &\quad\times\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p^{n-1}\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\prod_{h=1}^{n-1}\frac{\Gamma_p(\langle(\frac{h}{n}-\frac{k}{q-1})p^i\rangle)}{\Gamma_p(\langle\frac{hp^i}{n}\rangle)}\\ &= 1-q+q\sum_{k=0}^{q-2}(-p)^{\sum_{i=0}^{r-1}\{-(n-1)\lfloor\frac{kp^i}{q-1}\rfloor-\sum_{h=1}^{n-1}\lfloor\langle\frac{hp^i}{n}\rangle-\frac{kp^i}{q-1}\rfloor\}}\bar{\omega}^k((-1)^{n+1}\lambda^n)\\ &\quad\times\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma_p^{n-1}\left(\left\langle\frac{kp^i}{q-1}\right\rangle\right)\prod_{h=1}^{n-1}\frac{\Gamma_p(\langle(\frac{h}{n}-\frac{k}{q-1})p^i\rangle)}{\Gamma_p(\langle\frac{hp^i}{n}\rangle)}\\ &= 1-q-q(q-1)_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{n+1}\lambda^n\right]_q.\end{aligned}\tag{3.12}$$

由于 n 与 $q(q-1)$ 互素, 故 n 必为奇数. 由 (3.4), (3.5), (3.8) 和 (3.12), 可得

$$\#D_\lambda^n(\mathbb{F}_q)=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-{}_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\middle|\,\lambda^n\right]_q.$$

这就证明了 (1.2). 定理得证.

推论 3.3 设 $f(X)=(D_f;\mathbf{a})$, $h(X)=(D_h;\mathbf{a})$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的两个 n 元多项式, 其中 $f(X)$ 如 (3.2) 所设, n 与 $q(q-1)$ 互素.

(i) 若 $D_h\overset{r_q}{\sim}D_f$, 则有

$$N^*(h)=\frac{(q-1)^n+1}{q}-1-(q-1)_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\middle|\,\lambda^n\right]_q. \tag{3.13}$$

(ii) 若 $0<D_h\overset{r_q}{\sim}D_f$, 则有

$$N(h)=q^n-\frac{(q-1)^{n+1}-1}{q}-1-(q-1)_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\middle|\,\lambda^n\right]_q. \tag{3.14}$$

证明 (i) 设 $D_h\overset{r_q}{\sim}D_f$. 令 $\Omega=\{0,1,\dots,q-2\}$. 类似定理 1.3 的证明, 由引理 2.1, 2.3 和 2.4, 可得

$$N^*(h)=\frac{(q-1)^n}{q}+\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\in\mathbb{F}_q^*\\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{F}_q^*}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0h(X))}=\frac{(q-1)^n}{q}+\sum\prod_{j=1}^{n+1}\omega(a_j)^{k_j}G(k_j), \tag{3.15}$$

其中最右边式中和号遍历所有的向量 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_m)\in\Omega^m$ 且满足 $\widetilde{D}_h\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\equiv 0 \pmod{q-1}$. 由于 $D_h\overset{r_q}{\sim}D_f$, 故 $\widetilde{D}_h\overset{r_q}{\sim}\widetilde{D}_f$, 从而同余方程组 $\widetilde{D}_h\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\equiv 0 \pmod{q-1}$ 与 $\widetilde{D}_f\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\equiv 0 \pmod{q-1}$ 同解. 因此, 由 (3.12) 与 (3.15) 可得

$$N^*(h)=\frac{(q-1)^n+1}{q}-1-(q-1)_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\middle|\,\lambda^n\right]_q. \tag{3.16}$$

由此 (3.13) 得证.

(ii) 设 $0<D_h\overset{r_q}{\sim}D_f$. 我们有

$$N(h)=\frac{1}{q}\Bigg(\sum_{\substack{x_0\,\in\,\mathbb{F}_q\\ x_1,\,\dots,\,x_n\,\in\,\mathbb{F}_q\\ x_1\cdots x_n\,=\,0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0h(X))}+\sum_{\substack{x_0\,\in\,\mathbb{F}_q\\ x_1,\,\dots,\,x_n\,\in\,\mathbb{F}_q^*}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0h(X))}\Bigg). \tag{3.17}$$

由于 $D_h>0$, 故

$$\frac{1}{q}\sum_{\substack{x_0\,\in\,\mathbb{F}_q\\ x_1,\,\dots,\,x_n\,\in\,\mathbb{F}_q\\ x_1\cdots x_n\,=\,0}}\zeta_p^{\mathrm{Tr}(x_0h(X))}=q^n-(q-1)^n. \tag{3.18}$$

由 (3.16), (3.17) 和 (3.18) 可得

$$N(h)=q^n-\frac{(q-1)^{n+1}-1}{q}-1-(q-1)_{n-1}G_{n-1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \dots, & \frac{n-1}{n}\\ 0, & 0, & \dots, & 0\end{matrix}\middle|\,\lambda^n\right]_q.$$

由此 (3.14) 得证.

参 考 文 献

[1] Ahlgren S., Ono K., A Gaussian hypergeometric series evaluation and Apéry number congruences, *J. Reine Angew. Math.*, 2000, **518**: 187–212.
[2] Barman R., Rahman H., Saikia N., Counting points on Dwork hypersurfaces and p-adic hypergeometric functions, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2016, **94**: 208–216.
[3] Barman R., Saikia N., McCarthy D., Summation identities and special values of hypergeometric series in the p-adic setting, *J. Number Theory*, 2015, **153**: 63–84.
[4] Berndt B. C., Evans R. J., Williams K. S., Gauss and Jacobi Sums, Wiley-Interscience, New York, 1998.
[5] Chen J. M., Cao W., Smith normal form of augmented degree matrix and rational points on toric hypersurface, *Algebra Colloquium*, 2013, **20**: 327–332.
[6] Dwork B., On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.*, 1960, **82**: 631–648.
[7] Dwork B., On the zeta function of a hypersurface, *Publ Math. IHES.*, 1962, **12**: 5–68.
[8] Dwork B., p-adic Cycles, *Publ Math. IHES.*, 1969, **37**: 27–115.
[9] Fuselier J., Hypergeometric functions over F_p and relations to elliptic curves and modular forms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, **138**: 109–123.
[10] Goodson H., Hypergeometric functions and relations to Dwork hypersurfaces, *Int. J. Number Theory*, 2017, **13**: 439–485.
[11] Greene J., Hypergeometric functions over finite fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1987, **301**: 77–101.
[12] Greene J., Hypergeometric functions over finite fields and representations of $SL(2;q)$, *Rocky Mountain J. Math.*, 1993, **23**: 547–568.
[13] Gross B. H., Koblitz N., Gauss sums and the p-adic Γ-function, *Ann. Math.*, 1979, **109**(2): 569–581.
[14] Harris M., Shepherd-Barron N., Taylor R., A family of Calabi–Yau varieties and potential automorphy, *Ann. Math.*, 2010, **171**: 779–813.
[15] Hong S. F., L-functions of twisted diagonal exponential sums over finite fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2007, **135**: 3099–3108.
[16] Ireland K., Rosen M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, GTM 84, Springer-Verlag, New York, 1982.
[17] Katz N. M., Exponential Sums and Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.
[18] Koblitz N., p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions, GTM 58, Springer-Verlag, New York, 1996.
[19] Lidl R., Niederreiter H., Finite Fields, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
[20] Lennon C., Gaussian hypergeometric evaluations of traces of Frobenius for elliptic curves, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2011, **139**: 1931–1938.
[21] McCarthy D., Extending Gaussian hypergeometric series to the p-adic setting, *Int. J. Number Theory*, 2012, **8**: 1581–1612.
[22] McCarthy D., On a supercongruence conjecture of Rodriguez-Villegas, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2012, **140**: 2241–2254.
[23] McCarthy D., Transformations of well-poised hypergeometric functions over finite fields, *Finite Fields Appl.*, 2012, **18**: 1133–1147.
[24] McCarthy D., The trace of Frobenius of elliptic curves and the p-adic gamma function, *Pacific J. Math.*, 2013, **261**: 219–236.
[25] Robert A. M., A Course in p-adic Analysis, GTM 198, Springer-Verlag, New York, 2000.
[26] Wang R. Y., Wen B. B., Cao W., Degree matrices and enumeration of rational points of some hypersurfaces over finite fields, *J. Number Theory*, 2017, **177**: 91–99.
[27] Yu Y. D., Variation of the unit root along the Dwork family of Calabi–Yau varieties, *Math. Ann.*, 2009, **343**: 53–78.