第63卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.3
2020年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2020

文章编号: 0583-1431(2020)03-0245-08 **文献标识码: A**

二面体群的 Grothendieck 环结构

唐 帅

泰州学院数理学院 泰州 225300
E-mail: tangshuaixs@163.com

摘 要 二面体群的表示范畴为对称半单 monoidal 范畴, 因而其 Grothendieck 环为有限多个元素生成的交换环. 本文确定了该 Grothendieck 环的极小生成元, 并且进一步证明了该 Grothendieck 环与某一多项式环的商环同构.

关键词 二面体群; Grothendieck 环; 表示范畴
MR(2010) 主题分类 20C15, 22D20
中图分类 O153.3

The Structure of Grothendieck Rings of Dihedral Groups

Shuai TANG

Department of Mathematics, Taizhou College,
Taizhou 225300, *P. R. China*
E-mail: *tangshuaixs@163.com*

Abstract The representation category of a dihedral group is a symmetric semisimple monoidal category, so the Grothendieck ring of such a category is a commutative ring generated by finitely many elements. In this paper, the minimal generators of the Grothendieck ring are determined. Moreover, it is shown that the Grothendieck ring is isomorphic to a quotient of a polynomial ring.

Keywords dihedral group; Grothendieck ring; representation category
MR(2010) Subject Classification 20C15, 22D20
Chinese Library Classification O153.3

1 引言

对于有限群 G 而言, 群 G 在复数域上的表示范畴 $\mathrm{Rep}(G)$ 为只含有有限多个单对象的半单张量范畴, 因此任意两个表示的张量积仍然为群 G 的表示, 因而可以分解为不可约表示的直和. 一般而言, 这种张量积分解公式很难用公式统一描述, 为了解决这一问题, 人们引入了群 G 的 Grothendieck 环 $G_0(G)$ 这一张量范畴不变量. Grothendieck 环 $G_0(G)$ 作为自由 Abelian 群

收稿日期: 2018-08-22; 接受日期: 2019-10-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871063); 江苏省自然科学基金项目 (BK20170589)

以群 G 的所有互不等价的不可约表示为基, 环的加法就是表示的直和、乘法就是表示的张量积. 此时群表示的张量积分解公式就转化为 Grothendieck 环 $G_0(G)$ 中元素的乘积公式. 这种思想已经被推广到更一般的 (非半单) 张量范畴 [2, 3], 在张量范畴中人们借助于 Green 环这一范畴不变量来研究范畴中对象的张量积分解公式.

具体刻画有限群的 Grothendieck 环结构是很有意义的工作, 这不仅可以帮助人们深入认识任意两个表示的张量积分解式, 而且为研究 Grothendieck 环自身的一些性质 (如 Frobenius 性质等) 发挥作用. 目前一些特殊的半单张量范畴的 Grothendieck 环结构已经得到具体的刻画. 比如 Verlinde modular 范畴的 Grothendieck 环结构 [14]、near-group 范畴的 Grothendieck 环结构 [11]、秩为 3 的 fusion 范畴的 Grothendieck 环结构 [9] 等等. 一些非半单张量范畴的 Green 环的结构也得到了描述, 比如 (广义)Taft Hopf 代数的 Green 环结构 [1, 5]、秩分别为 1 与 2 的 pointed Hopf 代数的 Green 环结构 [6, 12, 13]、有限型点张量范畴的 Green 环 [4] 等等.

二面体群是一类非常重要的有限群, 虽然二面体群在复数域上的不可约表示以及任意两个不可约表示的张量积分解式早已发现, 但是其 Grothendieck 环的结构 (生成元与生成关系) 似乎没有明确刻画. 本文主要工作就是借助于经典的 Dickson 多项式, 给出 $2n$ 阶的二面体群 D_n 的 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 的生成元与生成关系. 结果表明: 当 n 为偶数时, $G_0(D_n)$ 为三个元素生成的、模去五个生成关系的整系数多项式环的商环; 当 n 为奇数时, $G_0(D_n)$ 为两个元素生成的、模去三个生成关系的整系数多项式环的商环.

2 二面体群的表示

本节主要介绍二面体群及其在复数域 $\mathbb{C}$ 上的不可约表示, 具体内容见文 [10, 5.3 节]. 二面体群 (dihedral group) 是一种保持平面上正 n $(n>2)$ 边形不变的线性变换所构成的群, 即二面体群由保持正 n 边形不变的 n 个旋转和 n 个反射所组成, 记为 D_n, D_n 是 $2n$ 阶非交换群. 从生成元和生成关系的角度来定义, 二面体群 D_n 是由生成元 r 与 s 生成, 并满足如下的生成关系:

$$r^n=1,\quad s^2=1,\quad srs=r^{-1}.$$

因此, 二面体群 D_n 中的每一个元素都可以写成 r^k, $0\le k\le n-1$ 或 sr^k, $0\le k\le n-1$.

当 n 为偶数时, 二面体群 D_n 的不可约表示可以描述如下: 四个 1 维表示 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$, 分别定义为:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

(2.1)

令 $\omega=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$, 则 D_n 有 $(n/2)-1$ 个 2 维不可约表示 $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{(n/2)-1}$, 分别定义为:

$$\rho_j(r^k)=\begin{pmatrix}\omega^{jk}&0\\0&\omega^{-jk}\end{pmatrix},\quad \rho_j(sr^k)=\begin{pmatrix}0&\omega^{-jk}\\\omega^{jk}&0\end{pmatrix},\quad 1\le j\le(n/2)-1. \tag{2.2}$$

上面构造的 1 维与 2 维不可约表示构成 D_n 的所有互不等价的不可约表示. 事实上, 它们的维数平方和为 D_n 的阶数:

$$4\times1+((n/2)-1)\times4=2n.$$

当 n 为奇数时, 二面体群 D_n 的不可约表示可以描述如下: 两个 1 维表示 ψ_1, ψ_2, 分别定义为:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

令 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$, 则 D_n 有 $(n-1)/2$ 个 2 维不可约表示 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{(n-1)/2}$, 其定义与 (2.2) 相同. 上面构造的 1 维与 2 维不可约表示构成 D_n 的所有互不等价的不可约表示, 因为它们的维数平方和为 D_n 的阶数:

$$2 \times 1 + ((n-1)/2) \times 4 = 2n.$$

因为 D_n 的任一表示在复数域 $\mathbb{C}$ 上都是可约的, 因此任意两个表示的张量积作为 D_n 的表示总可以分解为不可约表示的直和. 因为 D_n 的表示范畴为对称范畴, 因此任意两个表示 ρ 与 ψ, 总有 $\rho \otimes \psi \cong \psi \otimes \rho$, 因此我们仅考虑其中之一的张量积分解式. 以下两个命题所描述的张量积分解公式见文 [8, 定理 4.2] 中的证明.

命题 2.1 当 n 为偶数时, D_n 的一维表示 $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ 在张量积运算下构成克莱因四元群, 其余不可约表示的张量积分解公式如下:

当 $n = 4$ 时, $\rho \otimes \rho \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3 \oplus \psi_4$, $\rho \otimes \psi_j \cong \rho$, 其中 ρ 为唯一的二维不可约表示, $j = 1, 2, 3, 4$.

当 $n > 4$ 时, 分以下三种情形:

(1) 当 $1 \leq i \leq (n/2) - 1$ 时,

$$\rho_i \otimes \psi_j \cong \begin{cases} \rho_i, & j = 1, 2; \\ \rho_{(n/2)-i}, & j = 3, 4. \end{cases}$$

(2) 当 $1 \leq i < j \leq (n/2) - 1$ 时,

$$\rho_i \otimes \rho_j \cong \begin{cases} \rho_{j-i} \oplus \rho_{j+i}, & i + j < n/2; \\ \psi_3 \oplus \psi_4 \oplus \rho_{j-i}, & i + j = n/2; \\ \rho_{j-i} \oplus \rho_{n-(j+i)}, & i + j > n/2. \end{cases}$$

(3)

$$\rho_i \otimes \rho_i \cong \begin{cases} \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho_{2i}, & 1 \leq i < n/4; \\ \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3 \oplus \psi_4, & i = n/4 \text{ 且 } n/4 \text{ 为整数}; \\ \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho_{n-2i}, & n/4 < i \leq (n/2) - 1. \end{cases}$$

命题 2.2 当 n 为奇数时, D_n 的一维表示 $\{\psi_1, \psi_2\}$ 在张量积运算下构成二阶循环群, 其余不可约表示的张量积分解公式如下:

当 $n = 3$ 时, $\rho \otimes \rho \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho$, $\rho \otimes \psi_j \cong \rho$, 其中 ρ 为唯一的二维不可约表示, $j = 1, 2$.

当 $n > 3$ 时, 分以下三种情形:

(1) $\rho_i \otimes \psi_j \cong \rho_i$, 其中 $j = 1, 2$; $1 \leq i \leq (n-1)/2$.

(2) 当 $1 \leq i < j \leq (n-1)/2$ 时,

$$\rho_i \otimes \rho_j \cong \begin{cases} \rho_{j-i} \oplus \rho_{j+i}, & i + j < (n+1)/2; \\ \rho_{j-i} \oplus \rho_{n-(j+i)}, & i + j \geq (n+1)/2. \end{cases}$$

(3)

$$\rho_i \otimes \rho_i \cong \begin{cases} \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho_{2i}, & 1 \leq i < (n+1)/4; \\ \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho_{(n-1)/2}, & i = (n+1)/4 \text{ 且 } (n+1)/4 \text{ 为整数}; \\ \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \rho_{n-2i}, & (n+1)/4 < i \leq (n-1)/2. \end{cases}$$

3 二面体群的 Grothendieck 环结构

注意到, 二面体群 D_n 的表示范畴为对称半单张量范畴, 因此 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 必为有限个元素生成的交换环, 从而与某一多项式环的商环同构. 本节将借助于一类特殊的多项式, 即 Dickson 多项式来具体描述这一同构.

注意到, 二面体群 D_n 的所有互不等价的不可约表示构成 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基, 即当 n 为偶数时, 集合 $\{\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{(n/2)-1}\}$ 构成 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基; 当 n 为奇数时, 集合 $\{\psi_1,\psi_2,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{(n-1)/2}\}$ 构成 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基.

考虑如下递推关系式: $D_0(X,Y)=2$, $D_1(X,Y)=X$,

$$D_j(X,Y)=XD_{j-1}(X,Y)-YD_{j-2}(X,Y),\quad j\geq 2,$$

则 $D_j(X,Y)$ 称为第一类型的 Dickson 多项式 [7], 该多项式可以具体描述如下:

$$D_j(X,Y)=\sum_{i=0}^{[\frac{j}{2}]}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}X^{j-2i}(-Y)^i. \tag{3.1}$$

当 $X=\rho_1$, $Y=(\psi_1+\psi_2)/2$ 时,

$$D_j(\rho_1,(\psi_1+\psi_2)/2)=\sum_{i=0}^{[\frac{j}{2}]}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-(\psi_1+\psi_2)/2)^i,$$

该式实际上为 $G_0(D_n)$ 中的元素. 因为在 $G_0(D_n)$ 中 $\rho_1\psi_1=\rho_1\psi_2=\rho_1$, 因此 $\rho_1(\psi_1+\psi_2)/2=\rho_1$, 于是当 j 为奇数时,

$$\begin{aligned}D_j(\rho_1,(\psi_1+\psi_2)/2)&=\sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-(\psi_1+\psi_2)/2)^i\\ &=\sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-1)^i\\ &=D_j(\rho_1,1)\in G_0(D_n).\end{aligned}$$

当 j 为偶数时, 一方面 $\rho_1(\psi_1+\psi_2)/2=\rho_1$; 另一方面 $(\psi_1+\psi_2)/2$ 为幂等元, 因此

$$\begin{aligned}D_j(\rho_1,(\psi_1+\psi_2)/2)&=\sum_{i=0}^{\frac{j}{2}}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-(\psi_1+\psi_2)/2)^i\\ &=2(-(\psi_1+\psi_2)/2)^{\frac{j}{2}}+\sum_{i=0}^{\frac{j}{2}-1}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-(\psi_1+\psi_2)/2)^i\\ &=(-1)^{\frac{j}{2}}(\psi_1+\psi_2)+\sum_{i=0}^{\frac{j}{2}-1}\frac{j}{j-i}\begin{pmatrix} j-i\\ i\end{pmatrix}\rho_1^{j-2i}(-1)^i\\ &=D_j(\rho_1,1)+(-1)^{\frac{j}{2}}(\psi_2-\psi_1)\in G_0(D_n).\end{aligned}$$

下面介绍 $G_0(D_n)$ 的另外一组 $\mathbb{Z}$- 基. 方便起见, 规定

$$\theta_n=\begin{cases}(n/2)-1, & 2\mid n;\\ (n-1)/2, & 2\nmid n.\end{cases}$$

引理 3.1 在 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 中, 有如下结果:

(1) 对任意 $1 \le j \le \theta_n$, $\rho_j = D_j(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2)$.

(2) 对任意 $1 \le j \le \theta_n$, $(\rho_1)^j$ 总可以表示为 $\psi_1, \psi_2, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_j$ 的非负整系数线性组合, 且该线性组合中 ρ_j 前面的系数为 1.

(3) 当 n 为偶数时, 集合 $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \rho_1, (\rho_1)^2, \dots, (\rho_1)^{(n/2)-1}\}$ 构成 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基; 当 n 为奇数时, 集合 $\{\psi_1, \psi_2, \rho_1, (\rho_1)^2, \dots, (\rho_1)^{(n-1)/2}\}$ 构成 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基.

证明 (1) 对 j 用数学归纳法. 当 $j=1$ 时, $D_1(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2) = \rho_1$, 结论成立. 归纳假设当 $2 \le j \le s$ 时等式成立. 对于 $j = s+1 \le \theta_n$ 情形, 由 Dickson 多项式的递推关系式以及归纳假设知

$$\begin{aligned} D_{s+1}(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2) &= \rho_1 D_s(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2) - ((\psi_1+\psi_2)/2) D_{s-1}(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2) \\ &= \rho_1\rho_s - ((\psi_1+\psi_2)/2)\rho_{s-1} \\ &= (\rho_{s+1} + \rho_{s-1}) - \rho_{s-1} \\ &= \rho_{s+1}. \end{aligned}$$

由数学归纳法知所证等式成立.

(2) 对 j 用数学归纳法. 当 $j=1$ 时, 结论自然成立; 假设结论对 $j=s$ 成立, 即

$$(\rho_1)^s = \rho_s + m_{s-1}\rho_{s-1} + \cdots + m_1\rho_1 + a\psi_1 + b\psi_2$$

为非负整系数线性组合; 对于 $j = s+1 \le \theta_n$ 情形,

$$\begin{aligned} (\rho_1)^{s+1} &= (\rho_s + m_{s-1}\rho_{s-1} + \cdots + m_1\rho_1 + a\psi_1 + b\psi_2)\rho_1 \\ &= (\rho_{s+1} + \rho_{s-1}) + m_{s-1}(\rho_s + \rho_{s-2}) + \cdots + m_1(\rho_2 + \psi_1 + \psi_2) + (a+b)\rho_1 \\ &= \rho_{s+1} + m_{s-1}\rho_s + (1+m_{s-1})\rho_{s-1} + \cdots + (m_2+a+b)\rho_1 + m_1(\psi_1+\psi_2) \end{aligned}$$

为非负整系数线性组合并且 ρ_{s+1} 前面的系数为 1.

(3) 仅证 n 为偶数的情形. 由 (1) 知 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ 以及 ρ_j, $1 \le j \le (n/2)-1$ 都可以表示为 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \rho_1, (\rho_1)^2, \dots, (\rho_1)^{(n/2)-1}$ 的线性组合. 设整系数线性组合

$$a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + m_1\rho_1 + m_2(\rho_1)^2 \cdots + m_{(n/2)-1}(\rho_1)^{(n/2)-1} = 0.$$

由 (2) 知每个 $(\rho_1)^j$, $1 \le j \le (n/2)-1$ 都可以表示为 $\rho_j, \rho_{j-1}, \dots, \rho_1, \psi_1, \psi_2$ 的非负整系数线性组合且 ρ_j 前面系数为 1, 因此将 $0 = a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + m_1\rho_1 + \cdots + m_{(n/2)-1}(\rho_1)^{(n/2)-1}$ 表示为 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ 以及 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{(n/2)-1}$ 的线性组合时, $\rho_{(n/2)-1}$ 前面的系数为 $m_{(n/2)-1}$, 这就推出 $m_{(n/2)-1} = 0$. 以此类推, 可得

$$m_{(n/2)-2} = m_{(n/2)-3} = \cdots = m_1 = a = b = c = d = 0.$$

于是 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \rho_1, (\rho_1)^2, \dots, (\rho_1)^{(n/2)-1}$ 线性无关, 从而为 $G_0(D_n)$ 的一组 $\mathbb{Z}$- 基. 证毕.

命题 3.2 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 的极小生成元论述如下:

(1) 当 n 为偶数时, $G_0(D_n)$ 由 ψ_2, ψ_3 以及 ρ_1 生成.

(2) 当 n 为奇数时, $G_0(D_n)$ 由 ψ_2 与 ρ_1 生成.

证明 (1) 当 n 为偶数时, $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ 构成克莱因四元群, 其生成元为 ψ_2, ψ_3; 另外, 由引理 3.1 (1) 知每个 2 维不可约表示 $\rho_j = D_j(\rho_1, (\psi_1+\psi_2)/2)$, 即 ρ_j 可以由 ρ_1 与 ψ_2 生成. 综上所述, D_n 的每一个不可约表示都可以由 ρ_1, ψ_2, ψ_3 生成.

(2) 当 n 为奇数时, $\{\psi_1, \psi_2\}$ 构成 2 阶循环群, 其生成元为 ψ_2; 另外由引理 3.1 (1) 知每个 2 维不可约表示 ρ_j 都可以由 ρ_1, ψ_2 生成. 因此, D_n 的每一个不可约表示都可以由 ρ_1, ψ_2生成. 证毕.

当 n 为偶数时, 设 I_0 为多项式环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]$ 中的如下元素生成的理想:

$$X^2-1,\ Y^2-1, XZ-Z,\ YZ-D_{(n/2)-1}(Z,(1+X)/2),$$

$$ZD_{(n/2)-1}(Z,(1+X)/2)-(Y+XY+D_{(n/2)-2}(Z,(1+X)/2)).$$

当 n 为奇数时, 设 I_1 为多项式环 $\mathbb{Z}[X,Y]$ 中的如下元素生成的理想:

$$X^2-1,\ XY-Y,\ YD_{(n-1)/2}(Y,(1+X)/2)-D_{(n-1)/2}(Y,(1+X)/2)-D_{(n-3)/2}(Y,(1+X)/2).$$

定理 3.3 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 与如下商环同构:

(1) 当 $n>4$ 且为偶数时, $G_0(D_n)\cong\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$.

(2) 当 $n>3$ 且为奇数时, $G_0(D_n)\cong\mathbb{Z}[X,Y]/I_1$.

证明 这里仅给出 (1) 的证明, (2) 的结果类似可证. 为方便起见, 我们简记多项式

$$D_j=D_j(Z,(1+X)/2),\quad 1\le j\le (n/2)-1.$$

由命题 3.2 知 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 是由 ψ_2,ψ_3 以及 ρ_1 生成的交换环, 因此必存在从多项式环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]$ 到 Grothendieck 环 $G_0(D_n)$ 的环满同态

$$\Psi:\mathbb{Z}[X,Y,Z]\to G_0(D_n),$$

使得

$$\Psi(1)=\psi_1,\quad \Psi(X)=\psi_2,\quad \Psi(Y)=\psi_3,\quad \Psi(Z)=\rho_1.$$

注意到 $I_0\subseteq\ker\Psi$, 这是因为由命题 2.1 知

$$\Psi(X^2-1)=(\psi_2)^2-1=0,\quad \Psi(Y^2-1)=(\psi_3)^2-1=0,$$

$$\Psi(XZ-Z)=\psi_2\rho_1-\rho_1=0,\quad \Psi(YZ-D_{(n/2)-1})=\psi_3\rho_1-\rho_{(n/2)-1}=0,$$

$$\Psi(ZD_{(n/2)-1}-(Y+XY+D_{(n/2)-2}))=\rho_1\rho_{(n/2)-1}-(\psi_3+\psi_2\psi_3+\rho_{(n/2)-2})=0.$$

因此, 环满同态 Ψ 诱导出商环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$ 到 $G_0(D_n)$ 的环满同态

$$\overline{\Psi}:\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0\to G_0(D_n),$$

使得 $\overline{\Psi}\circ\pi=\Psi$, 其中 $\pi:\mathbb{Z}[X,Y,Z]\to\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$ 为自然同态.

下面证明商环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$ 有一组 $\mathbb{Z}$- 基:

$$\Omega=\{\overline{1},\overline{X},\overline{Y},\overline{XY},\overline{Z},\overline{Z^2},\ldots,\overline{Z^{(n/2)-1}}\}.$$

首先, 设整系数线性组合

$$a\overline{1}+b\overline{X}+c\overline{Y}+d\overline{XY}+m_1\overline{Z}+\cdots+m_{(n/2)-1}\overline{Z^{(n/2)-1}}=0,$$

则由 $\overline{\Psi}\circ\pi=\Psi$ 可知

$$\begin{aligned}0&=\overline{\Psi}(a\overline{1}+b\overline{X}+c\overline{Y}+d\overline{XY}+m_1\overline{Z}+\cdots+m_{(n/2)-1}\overline{Z^{(n/2)-1}})\\&=\Psi(a+bX+cY+dXY+m_1Z+\cdots+m_{(n/2)-1}Z^{(n/2)-1})\\&=a\psi_1+b\psi_2+c\psi_3+d\psi_4+m_1\rho_1+\cdots+m_{(n/2)-1}(\rho_1)^{(n/2)-1}.\end{aligned}$$

由引理 3.1 (3) 知

$$m_{(n/2)-1}=m_{(n/2)-2}=\cdots=m_1=a=b=c=d=0.$$

因此, 集合 Ω 中的元素线性无关. 另外, $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$ 中的任意元素 $\overline{X^iY^jZ^k}$ 都可以表示为集合 Ω 中的元素的线性组合. 事实上, 当 $k=0$ 时, 由理想 I_0 的生成元知

$$\overline{X^iY^jZ^k}=\overline{X^iY^j}=\begin{cases}\overline{1}, & 2\mid i \text{ 且 } 2\mid j;\\ \overline{X}, & 2\nmid i \text{ 且 } 2\mid j;\\ \overline{Y}, & 2\mid i \text{ 且 } 2\nmid j;\\ \overline{XY}, & 2\nmid i \text{ 且 } 2\nmid j.\end{cases}$$

当 $k>0$ 时, 由于 $\overline{XZ}=\overline{Z}$, 故

$$\overline{X^iY^jZ^k}=\overline{Y^jZ^k}=\begin{cases}\overline{Z^k}, & 2\mid j;\\ \overline{YZ^k}, & 2\nmid j.\end{cases}$$

对于 $\overline{Z^k}$, 当 $1\le k\le (n/2)-1$ 时, 已有 $\overline{Z^k}\in\Omega$, 故只要说明 $\overline{Z^{n/2}}$ 也可以表示为集合 Ω 中元素的线性组合, 从而由数学归纳法可知对于任意 $k>0$, $\overline{Z^k}$ 都可以表示为集合 Ω 中元素的线性组合. 由 (3.1) 知

$$\begin{aligned}D_{(n/2)-1}&=D_{(n/2)-1}(Z,(1+X)/2)\\&=\sum_{i=0}^{[\frac{n-2}{4}]}\frac{(n/2)-1}{(n/2)-1-i}\binom{(n/2)-1-i}{i}Z^{(n/2)-1-2i}(-(1+X)/2)^i\\&=Z^{(n/2)-1}+\sum_{i=1}^{[\frac{n-2}{4}]}\frac{(n/2)-1}{(n/2)-1-i}\binom{(n/2)-1-i}{i}Z^{(n/2)-1-2i}(-(1+X)/2)^i.\end{aligned}$$

因此

$$Z^{(n/2)-1}=D_{(n/2)-1}-\sum_{i=1}^{[\frac{n-2}{4}]}\frac{(n/2)-1}{(n/2)-1-i}\binom{(n/2)-1-i}{i}Z^{(n/2)-1-2i}(-(1+X)/2)^i.$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{Z^{n/2}}&=\overline{ZZ^{(n/2)-1}}\\&=\overline{ZD_{(n/2)-1}}-\sum_{i=1}^{[\frac{n-2}{4}]}\frac{(n/2)-1}{(n/2)-1-i}\binom{(n/2)-1-i}{i}\overline{Z^{(n/2)-2i}(-(1+X)/2)^i}\\&=\overline{Y}+\overline{XY}+\overline{D_{(n/2)-2}}\\&\quad-\sum_{i=1}^{[\frac{n-2}{4}]}\frac{(n/2)-1}{(n/2)-1-i}\binom{(n/2)-1-i}{i}\overline{Z^{(n/2)-2i}(-(1+X)/2)^i}\end{aligned}$$

为集合 Ω 中的元素的线性组合. 对于 $\overline{YZ^k}$, 当 $k=1$ 时, $\overline{YZ}=\overline{D_{(n/2)-1}}$ 为集合 Ω 中的元素的线性组合; 当 $k>1$ 时, 由于 $\overline{YZ}=\overline{D_{(n/2)-1}}$, 故

$$\overline{YZ^k}=\overline{(YZ)Z^{k-1}}=\overline{D_{(n/2)-1}Z^{k-1}}.$$

由 $\overline{XZ}=\overline{Z}$ 可知, 上式可以表示为以 $\overline{Z}$ 为变量的多项式, 而每个 $\overline{Z^k}$ 都可以表示为集合 Ω 中的元素的线性组合, 因而以 $\overline{Z}$ 为变量的多项式也可以表示为集合 Ω 中的元素的线性组合. 综上所述, 集合 Ω 为商环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0$ 的一组基.

最后, 证明 $\overline{\Psi}$ 为单射. 设

$$\overline{\Psi}(a\overline{1}+b\overline{X}+c\overline{Y}+d\overline{XY}+m_1\overline{Z}+\cdots+m_{(n/2)-1}\overline{Z^{(n/2)-1}})=0,$$

则由上面交换图知

$$\begin{aligned}0&=\overline{\Psi}(a\overline{1}+b\overline{X}+c\overline{Y}+d\overline{XY}+m_1\overline{Z}+\cdots+m_{(n/2)-1}\overline{Z^{(n/2)-1}})\\&=\Psi(a+bX+cY+dXY+m_1Z+\cdots+m_{(n/2)-1}Z^{(n/2)-1})\\&=a\psi_1+b\psi_2+c\psi_3+d\psi_4+m_1\rho_1+\cdots+m_{(n/2)-1}(\rho_1)^{(n/2)-1}.\end{aligned}$$

于是由引理 3.1 (3) 知所有系数为 0. 综上所述, 映射

$$\overline{\Psi}:\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_0\to G_0(D_n)$$

为环同构, 证毕.

注 3.4 当 $n=4$ 时, 由命题 2.1 知 Grothendieck 环 $G_0(D_4)$ 同构于商环 $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/I_2$, 其中 I_2 为由 $X^2-1,Y^2-1,XZ-Z,YZ-Z,Z^2-1-X-Y-XY$ 生成的理想; 当 $n=3$ 时, 由命题 2.2 知 Grothendieck 环 $G_0(D_3)$ 同构于商环 $\mathbb{Z}[X,Y]/I_3$, 其中 I_3 为 $X^2-1,XY-Y,Y^2-1-X-Y$ 生成的理想.

致谢 感谢审稿人所提的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Chen H., Oystaeyen F. V., Zhang Y., The Green rings of Taft algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2014, **142**: 765–775.
[2] Green J. A., The modular representation algebra of a finite group, *Ill. J. Math.*, 1962, **6**(4): 607–619.
[3] Green J. A., A transfer theorem for modular representations, *J. Algebra*, 1964, **1**: 71–84.
[4] Huang H., Oystaeyen F. V., Yang Y., Zhang Y., The Green rings of pointed tensor categories of finite type, *J. Pure Appl. Algebra*, 2014, **218**: 333–342.
[5] Li L., Zhang Y., The Green rings of the generalized Taft Hopf algebras, *Contemp. Math.*, 2013, **585**: 275–288.
[6] Li Y., Hu N., The Green rings of the 2-rank Taft algebra and its two relatives twisted, *J. Algebra*, 2014, **410**: 1–35.
[7] Lidl R., Mullen G. L., Turnwald G., Dickson polynomials, Harlow: Longman Scientific & Technical, 1993.
[8] Naidu D., Rowell E. C., A finiteness property for braided fusion categories, *Algebr. Represent. Theory*, 2011, **14**(5): 837–855.
[9] Ostrik V., Pivotal fusion categories of rank 3, *Mosc. Math. J.*, 2015, **15**(2): 373–396.
[10] Serre J. P., Linear Representations of Finite Groups, Springer-Verlag, New Yark, 1995.
[11] Siehler J., Near-group categories, *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, **3**(2): 719–775.
[12] Wang Z., Li L., Zhang Y., Green rings of pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type, *Algebr. Represent. Theory*, 2014, **17**: 1901–1924.
[13] Wang Z., Li L., Zhang Y., Green rings of pointed rank one Hopf algebras of non-nilpotent type, *J. Algebra*, 2016, **449**: 108–137.
[14] Wang Z., Li L. B., The Casimir Number of a Verlinde Modular Category and Its Applications, *Acta Math. Sin., Chin. Series*, 2018, **61**(1): 59–66.