第63卷第3期 数学学报中文版 Vol.63, No.3
2020年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2020

文章编号: 0583-1431(2020)03-0229-16 **文献标识码: A**

四元 Heisenberg 群上次拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解

王海蒙　周　璇　赵玉娟

江苏第二师范学院数学与信息技术学院 南京 210013
E-mail: wanghaimeng1027@163.com; zhouxuanseu@126.com;
d0801@njupt.edu.cn

摘　要　本文研究了四元 Heisenberg 群上次拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解, 该结论是 Heisenberg 群上结果的推广. 本文利用了四元 Heisenberg 群上的 Fourier 变换理论构造了该群上次拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解, 并且给出了基本解的积分表示.

关键词　四元 Heisenberg 群; 群上的 Fourier 变换; 次拉普拉斯算子; Plancherel 公式; 基本解
MR(2010) 主题分类　35A08, 35H20
中图分类　O174.5

The Fundamental Solution for the m-th Powers of the sub-Laplacian on the Quaternionic Heisenberg Group

Hai Meng WANG　Xuan ZHOU　Yu Juan ZHAO

Department of Mathematics and Information Technology, Jiangsu Second Normal University, Nanjing 210013*, P. R. China*
E-mail: *wanghaimeng*1027*@*163*.com*; *zhouxuanseu@*126*.com*;
*d*0801*@njupt.edu.cn*

Abstract　We discuss the fundamental solution for m-th powers of the sub-Laplacian on the quaternionic Heisenberg group, This result is the extension of the conclusion on the Heisenberg group. We use the representation theory of nilpotent Lie groups of step two to analyze the associated m-th powers of the sub-Laplacian on the quaternionic Heisenberg group and to construct its fundamental solution.

Keywords　quaternionic Heisenberg group; group Fourier transform; Sub-Laplacian; Plancherel formula; fundamental solution
MR(2010) Subject Classification　35A08, 35H20
Chinese Library Classification　O174.5

收稿日期: 2019-02-25; 接受日期: 2019-10-09
基金项目: 江苏省高校自然科学基金面上项目 (18KJD0004)

1 引言

有很多方法可以用来求解 Heisenberg 群上拉普拉斯算子的基本解. 比如拟微分算子理论、Laguerre 积分理论、热核理论等等, 可见文 [1, 2, 5, 14] 及其参考文献. 一般地, 拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解也有一些结果. Berenstein 和 Chang 等人 [5] 利用 Laguerre 积分的方法得到了 Heisenberg 群上拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解. Laguerre 积分理论是求解算子基本解的有效工具, 很多偏微分算子的基本解都可以通过该理论来求解, 可见文 [5, 6, 8] 及其参考文献. 类似地, 希望寻求方法去解决四元 Heisenberg 群上次拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解的问题. 当 $m=1$ 时, 朱 [26] 构造了四元 Heisenberg 群上拉普拉斯算子的基本解. 进一步地, Chang 和 Markina [9] 以及 Tie 和 Wong [19] 得到了次拉普拉斯算子的基本解. 这里, 我们希望利用群上的 Fourier 变换理论的方法来构造四元 Heisenberg 群上次拉普拉斯算子的 m 幂次的基本解.

对 $q=(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{H}^n$, 这里 $\mathbb{H}$ 表示四元数代数. 记

$$q_{l+1}=x_{4l+1}+x_{4l+2}i_1+x_{4l+3}i_2+x_{4l+4}i_3,$$

其中 $x_{4l+j}\in\mathbb{R}$, $l=0,\ldots,n-1$, $j=1,\ldots,4$, i_1, i_2, i_3 是 $\mathbb{H}$ 的虚部单位元, 并且满足

$$i_1^2=i_2^2=i_3^2=-1,\quad i_1i_2=i_3.$$

x 的共轭为 $\overline{x}=x_0-x_1i_1-x_2i_2-x_3i_3$, $\operatorname{Re}x=x_0$, $\operatorname{Im}x=x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3$. 通常把 x 的虚部记作 (x_1,x_2,x_3).

四元 Heisenberg 群 $\mathscr{H}_n$ 是 $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}^3$, 运算为

$$(q,t)\cdot(q',t')=\left(q+q',s+s'+2\sum_{l=0}^{n-1}\operatorname{Im}(\overline{q}_{l+1}q'_{l+1})\right),$$

其中 (q,t), $(q',t')\in\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}^3$.

群 $\mathscr{H}_n$ 上的次拉普拉斯算子为 Δ_κ, 具体为

$$\Delta_\kappa:=-\sum_{j=1}^{4n}X_j^2+4\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\partial_{t_\beta},$$

其中 $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\in\mathbb{R}^3$, X_j 是 $\mathscr{H}_n$ 上的左不变向量场 (参见第 2 节).

记 Δ_κ^m 是 Δ_κ 的 m 次幂, 与 Heisenberg 群类似, 算子 Δ_κ 是 $\Box_b=\bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^*+\bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b$ 作用在 $\mathscr{H}_n$ 上的 $(0,1)$- 形式产生的. 这里 $\bar{\partial}_b$ 是切向 Cauchy–Riemann–Fueter 算子, $\bar{\partial}_b^*$ 是 $\bar{\partial}_b$ 的形式共轭, 关于 Δ_κ 的相关讨论可见文 [9, 19]. 本文的目的是构造 Δ_κ^m 的基本解.

为了给出主要结论, 我们先引入一些概念.

对 $\lambda\in\mathbb{R}^3$, 记

$$B^\lambda=\sum_{\beta=1}^{3}\lambda_\beta B^\beta,\tag{1.1}$$

其中 B^β 是一个 $4n\times4n$ 矩阵, 具体为

$$B^\beta=\operatorname{diag}\{b^\beta,b^\beta,\ldots,b^\beta\},\quad \beta=1,2,3,\tag{1.2}$$

其中 b^β, $\beta=1,2,3$ 是四元数单位元的矩阵表示 (见 (2.2)).

记 $|B^\lambda| := [(B^\lambda)^T B^\lambda]^{\frac{1}{2}}$,

$$g(x,t;\lambda) := \langle |B^\lambda|\coth(|B^\lambda|)x, x\rangle - \mathrm{i}\lambda(t), \quad \lambda(t) = \sum_{\beta=1}^{3}\lambda_\beta t_\beta. \tag{1.3}$$

定理 1.1 设 $\kappa \notin \varepsilon_\kappa$. 那么 Δ_κ^m 的基本解为

$$\mathscr{G}_\kappa^m(x,t) := \frac{\Gamma(2n-m+3)}{2^{2n+2m}(2\pi)^{2n+3}\Gamma(m)}\int_{\mathbb{R}^3}\det\left(\frac{|B^\lambda|}{\sinh|B^\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3} i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}}{g(x,t;\lambda)^{2n-m+3}}d\lambda,$$

这里 $(x,t)\in\mathbb{R}^{4n}\times\mathbb{R}^3$, $x\neq 0$, 其中

$$\varepsilon_\kappa = \left\{\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3} i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta + \sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)=0,\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})\in\mathbb{N}^{2n}\right\}. \tag{1.4}$$

本文共 5 节. 第 2 节给出了四元 Heisenberg 群的定义以及该群上 Fourier 变换理论. 关于 Heisenberg 群上的 Fourier 理论有很多应用, 可见文 [10, 16, 25]. 幸运地, 这些理论可以推广到其他的 H- 型群上, 比如四元 Heisenberg 群和八元 Heisenberg 群. 王 [22] 构造了超曲面上切向拉普拉斯的相对基本解. 施和王 [18] 利用该理论构造了四元 Heisenberg 群上 k -CF 函数的 Szegö 核. 王等人 [24] 利用了八元数 Heisenberg 群上的相关理论研究了群上的正则函数. 第 3 节得到了 Δ_κ^m 的 Fourier 变换, 变换之后是一个 Hilbert–Schmidt 算子. 第 4 节利用 Plancherel 公式得到了 Δ_κ^m 的基本解的积分表示. 最后, 对 $m=1,2,3$ 的情形, 得到了基本解更具体的表达式.

2 四元 Heisenberg 群上的 Fourier 变换

在实坐标系下, 四元 Heisenberg 群可以写为

$$(x,t)\cdot(x',t') = \left(x+x', t_\beta + t'_\beta + 2\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k,j=1}^{4} b_{kj}^\beta x_{4l+k}x'_{4l+j}\right), \tag{2.1}$$

这里 $\beta=1,2,3$, $x=(x_1,\dots,x_{4n})\in\mathbb{R}^{4n}$, $t=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3$, x', t' 可以类似给出定义, b^1, b^2, b^3 是反对称矩阵:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

容易验证 b^1, b^2, b^3 满足关系式:

$$(b^1)^2 = (b^2)^2 = (b^3)^2 = -I, \quad b^1b^2 = b^3.$$

我们可以将运算 (2.1) 写为

$$(x,t)(x',t') = \left(x+x', t_\beta + t'_\beta + 2\sum_{k,j=1}^{4n} B_{kj}^\beta x_k x'_j\right),$$

其中 B^β 由 (1.2) 给出. 向量场

$$X_j = \partial_{x_j} + 2\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{4n} B_{kj}^\beta x_k\partial_{t_\beta}, \tag{2.3}$$

$j=1,\dots,4n$, 是 $\mathscr{H}_n$ 上的左不变向量场, 并且满足以下关系:

$$[X_k, X_j] = 4\delta_{jk}\sum_{\beta=1}^{3} B_{kj}^{\beta}\partial_{t_\beta}, \tag{2.4}$$

其中 $j,k=1,\dots,4n$, B^β 由 (1.2) 给出.

现在我们要利用二步幂零群上的群表示论来研究算子 Δ_κ^m, 此理论可见文 [16, 18, 22–25].

设 $\Phi:\mathbb{R}^{4n}\times\mathbb{R}^{4n}\to\mathbb{R}^3$ 为反对称映射:

$$\Phi(x,x') = (\Phi^1(x,x'),\Phi^2(x,x'),\Phi^3(x,x')),\quad \Phi^\beta(x,x') = \sum_{j,k=1}^{4n} B_{jk}^{\beta}x_k x'_j,\quad \beta=1,2,3,$$

其中 $x,x'\in\mathbb{R}^{2n}$, 群 $\mathscr{H}_n$ 的运算可以写为

$$(x,t)\cdot(x',t') = (x+x', t+t'+2\Phi(x,x')).$$

关于二步幂零群上 Hermitian 映射的群表示论可以参考文 [16]. 进一步地, 该理论对于反对称映射 Φ 也是成立的, 具体可以见文 [18, 22–24]. 这里, 将重新叙述四元 Heisenberg 群上的 Fourier 变换理论.

设 $\upsilon=(\upsilon_1,\dots,\upsilon_{4n})\in\mathbb{R}^{4n}$, $\{e_j\}$ 为 $\mathbb{R}^{4n}$ 的正交基. 设 $\partial_\upsilon f$ 是 f 在 $\mathbb{R}^{4n}$ 沿方向 υ 的方向导数, 即 $\partial_\upsilon=\sum_{j=1}^{4n}\upsilon_j\partial_{x_j}$. 从而

$$X_j = \partial_{x_j} + 2\Phi(x,e_j)\partial_t,\quad j=1,\dots,4n.$$

令

$$X_\upsilon := \sum_{j=1}^{4n}\upsilon_j X_j = \partial_\upsilon + 2\Phi(x,\upsilon)\partial_t$$

是 $\mathscr{H}$ 上的左不变向量场, 李括号满足

$$[X_\upsilon, X_{\upsilon'}] = 4\Phi(\upsilon,\upsilon')\cdot\partial_t,$$

其中 $\Phi(\upsilon,\upsilon')\cdot\partial_s := \sum_{\beta=1}^{3}\Phi^\beta(\upsilon,\upsilon')\cdot\partial_{t_\beta}$. 对 $\lambda\in\mathbb{R}^3$, 记

$$\Phi^\lambda(\upsilon,\upsilon') := \lambda\cdot(\Phi(\upsilon,\upsilon')) = \upsilon^t B^\lambda \upsilon'.$$

因为 Φ^λ 是反对称的, 在一组正交基 $\{\upsilon_1^\lambda,\dots,\upsilon_{4n}^\lambda\}$ 下可以写为标准型, 即

$$\Phi^\lambda(\upsilon_j^\lambda,\upsilon_{2n+j}^\lambda) = -\Phi^\lambda(\upsilon_{2n+j}^\lambda,\upsilon_j^\lambda) = |\lambda|,\quad |\lambda|\ge 0,\quad j=1,\dots,n$$

对其它的下标有 $\Phi^\lambda(\upsilon_k^\lambda,\upsilon_l^\lambda)=0$. 容易验证 $\pm\mathrm{i}|\lambda|$ 是 B^λ 的特征值, $j=1,\dots,n$.

设 $X_j^\lambda = X_{\upsilon_j^\lambda}$, $j=1,2,\dots,4n$. 记 π 为 $\mathscr{H}$ 的不可约酉表示. 于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}^p$, 使得 $\pi(0,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(s)}$, 并且

$$d\pi([X_\upsilon, X_{\upsilon'}]) = 4\mathrm{i}\lambda(\Phi(\upsilon,\upsilon')) = 4\mathrm{i}\Phi^\lambda(\upsilon,\upsilon'). \tag{2.5}$$

注意到

$$[X_j^\lambda, X_{2n+j}^\lambda] = 4\Phi(\upsilon_j^\lambda,\upsilon_{2n+j}^\lambda)\cdot\partial_s,$$

并且对其它下标有 $[X_k^\lambda, X_l^\lambda]=0$. 由 (2.5) 可以得到

$$d\pi([X_j^\lambda, X_{2n+j}^\lambda]) = 4\mathrm{i}|\lambda|,$$

以及对其它下标有 $d\pi([X_k^\lambda, X_l^\lambda])=0$. 设 $|\lambda|\neq 0, \pi$ 可以实现为 $\mathscr{H}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上的不可约酉表示.

$$d\pi_\lambda(X_j^\lambda)=2\partial_{\xi_j},\quad d\pi_\lambda(X_{2n+j}^\lambda)=2\mathrm{i}|\lambda|\xi_j,\quad j=1,2,\dots,2n. \tag{2.6}$$

事实上, 我们可以把 $x\in\mathbb{R}^{4n}$ 写为 $x=x^{\lambda\prime}+x^{\lambda\prime\prime}$, 其中

$$x^{\lambda\prime}:=\sum_{j=1}^{2n}x_j^\lambda\upsilon_j^\lambda\in\mathbb{R}^{4n},\quad x^{\lambda\prime\prime}:=\sum_{j=1}^{2n}x_{2n+j}^\lambda\upsilon_{2n+j}^\lambda\in\mathbb{R}^{4n}, \tag{2.7}$$

这里 $x_1^\lambda,\dots,x_{4n}^\lambda\in\mathbb{R}$.

由

$$(x,t)=\big(0,t-2\Phi(x^{\lambda\prime\prime},x^{\lambda\prime})\big)\cdot(x^{\lambda\prime\prime},0)\cdot(x^{\lambda\prime},0), \tag{2.8}$$

可得

$$\pi_\lambda(x,t)=\pi_\lambda\left(0,t-2\Phi(x^{\lambda\prime\prime},x^{\lambda\prime})\right)\circ\pi_\lambda(x^{\lambda\prime\prime},0)\circ\pi_\lambda(x^{\lambda\prime},0), \tag{2.9}$$

其中 $\Phi(x^{\lambda\prime\prime},x^{\lambda\prime})=-\sum_{j=1}^{2n}x_{2n+j}^\lambda x_j^\lambda|\lambda|$. 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, $d\pi_\lambda$ 的积分形式为

$$\begin{aligned}&(\pi_\lambda(x^{\lambda\prime},0)\phi)(\xi)=\phi(\xi+2\widetilde{x}),\quad \widetilde{x}=(x_1^\lambda,\dots,x_{2n}^\lambda),\\&(\pi_\lambda(x^{\lambda\prime\prime},0)\phi)(\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|\xi_jx_{2n+j}^\lambda}\phi(\xi).\end{aligned} \tag{2.10}$$

由 (2.7)–(2.10), 我们有

$$[\pi_\lambda(x,t)\phi](\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)+\mathrm{i}2|\lambda|\sum_{j=1}^{2n}x_{2n+j}^\lambda(\xi_j+x_j^\lambda)}\phi(\xi+2\widetilde{x}). \tag{2.11}$$

$\pi_\lambda(x,t)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上的酉算子. 通过验证 $\pi_\lambda((y,s)\cdot(x,t))=\pi_\lambda(y,s)\pi_\lambda(x,t)$ 可知 $\pi_\lambda(x,t)$ 是 $\mathscr{H}_n$ 上的酉表示.

设 $f\in L^1(\mathscr{H}_n)$, 定义

$$\pi_\lambda(f)=\int_{\mathscr{H}_n}f(x,t)\pi_\lambda(x,t)^{-1}dyds,$$

以及 $\mathscr{H}_n$ 上的卷积为

$$f*g(x,t)=\int_{\mathscr{H}_n}g((y,s)^{-1}\cdot(x,t))f(y,s)dyds.$$

可以验证以下性质成立.

性质 2.1 (i) $\pi_\lambda(f)^*=\pi_\lambda(f^*)$, 其中 $f^*(x,t)=\overline{f(-x,-t)}$.

(ii) $\pi_\lambda(f*k)=\pi_\lambda(k)\pi_\lambda(f), f,k\in L^1(\mathscr{H}_n)$.

(iii) $\pi_\lambda(Yf)=\pi_\lambda(Y)\pi_\lambda(f)$, Y 是任意的左不变向量场.

于是可以得到群 $\mathscr{H}_n$ 上的 Plancherel 公式.

性质 2.2 (Plancherel 公式和逆公式) 设 $f,g\in L^1(\mathscr{H}_n)\cap L^2(\mathscr{H}_n)$, $\lambda\in\mathbb{R}^3$, $\pi_\lambda(f)$ 是一个 Hilbert–Schmidt 算子, 并且

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{2n+3}}\int_{\mathbb{R}^3}\langle\pi_\lambda(f),\pi_\lambda(g)\rangle_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{2n}d\lambda, \tag{2.12}$$

其中 $\langle\pi_\lambda(f),\pi_\lambda(g)\rangle_{\mathrm{HS}}=\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(g)^*)$. 对 $f\in\mathscr{S}(\mathscr{H})$, Plancherel 逆公式为:

$$f(y,s)=\frac{1}{(2\pi)^{2n+3}}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(y,s))|\lambda|^{2n}d\lambda. \tag{2.13}$$

当 $n=1$ 时, 公式 (2.12) 在文 [18, 22] 中给出. 四元 Heisenberg 群上的 Plancherel 公式的证明与八元 Heisenberg 群的证明类似, 可见文 [24, 定理 4.1]. 在这里就不赘述了.

3 $\boldsymbol{\Delta_{\kappa}^{m}}$ 的 Fourier 变换

记 h_j 为第 j 个 Hermitian 函数:

$$h_j(t)=\frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^j j!}}\mathrm{e}^{t^2/2}\frac{d^j}{dt^j}\mathrm{e}^{-t^2},$$

它构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组基. 给定多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})\in\mathbb{N}^{2n}$, 记

$$h_\alpha^\lambda(\xi):=\prod_{j=1}^{2n}|\lambda|^{1/4}h_{\alpha_j}(|\lambda|^{1/2}\xi_j).$$

设 $\mathrm{HS}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ 为 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上所有的 Hilbert–Schmidt 算子构成的空间, 我们有引理如下.

引理 3.1 $d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)\in\mathrm{HS}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$, 并且

$$d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)=2^{2m}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\partial_{\xi_j}^2-|\lambda|^2\xi_j^2\right)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\right]^m,$$

$$d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)h_\alpha^\lambda=2^{2m}\left[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\right]^m h_\alpha^\lambda. \tag{3.1}$$

证明 由 (2.6) 可得

$$d\pi_\lambda\bigg(-\sum_{j=1}^{4n}X_j^2\bigg)=d\pi_\lambda\bigg(-\sum_{j=1}^{4n}(X_j^\lambda)^2\bigg)=-4\sum_{j=1}^{2n}(\partial_{\xi_j}^2-|\lambda|^2\xi_j^2).$$

又由 $d\pi_\lambda(\partial_{t_\beta})=\mathrm{i}\lambda_\beta$ 可知

$$d\pi_\lambda(\Delta_\kappa)=-4\sum_{j=1}^{2n}\left(\partial_{\xi_j}^2-|\lambda|^2\xi_j^2\right)+4\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta,$$

因为

$$(-(d/dt)^2+t^2)h_j=(2j+1)h_j,$$

于是

$$d\pi_\lambda(\Delta_\kappa)h_\alpha^\lambda=4\left[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\right]h_\alpha^\lambda.$$

最后的结论是从 $d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)=[d\pi_\lambda(\Delta_\kappa)]^m$ 得出. 证毕.

从 (3.1) 可以看出, 当且仅当 $\kappa\notin\varepsilon_\kappa$, 算子 $d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)$ 是可逆的, 其中 ε_κ 由 (1.4) 给出, 这样就得到了以下的引理.

引理 3.2 假设 $\kappa\notin\varepsilon_\kappa$, $d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)$ 是可逆的, $d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)$ 的逆算子为

$$G_\kappa^m(\lambda)=\sum_\alpha\frac{A_{\alpha,\alpha}^\lambda}{2^{2m}\left[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\right]^m},$$

其中 $A_{k,l}^{\lambda} \in \mathrm{HS}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ 满足:

$$A_{\alpha,\beta}^{\lambda} h_{\alpha'}^{\lambda} = \delta_{\alpha',\beta} h_{\alpha}^{\lambda}.$$

于是

$$d\pi_{\lambda}(\Delta_{\kappa}^{m}) G_{\kappa}^{m}(\lambda) = \mathrm{id}.$$

π_{λ} 的矩阵元定义为

$$\chi_{\alpha,\alpha'}^{\lambda}(y,s) := \langle \pi_{\lambda}(y,s) h_{\alpha}^{\lambda}, h_{\alpha'}^{\lambda} \rangle.$$

引理 3.3 对 $(x,t) \in \mathbb{R}^{4n} \times \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, 于是

$$\chi_{\alpha,\alpha}^{\lambda}(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)} \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{e}^{-|\lambda|\,|z_j^{\lambda}|^2} L_{\alpha_j}^{(0)}(2|\lambda|\,|z_j^{\lambda}|^2),$$

其中 $z_j^{\lambda} = x_j^{\lambda} + i x_{2n+j}^{\lambda}$, $j = 1, \ldots, 2n$, $L_j^{(0)}$ 是 Laguerre 多项式:

$$L_j^{(0)}(x) = \sum_{m=0}^{j} \frac{j!}{(j-m)!m!} \frac{(-x)^m}{m!}.$$

证明 矩阵元的计算可见文 [18, 22–24]. 这里计算与 [22, 引理 4.2] 类似. 由文 [22, 引理 4.1.1] 可得

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}qs} h_j(s+p/2) h_j(s-p/2) ds = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}|p+\mathrm{i}q|^2} L_{\alpha_j}^{(0)}(|p+\mathrm{i}q|^2/2), \tag{3.2}$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}$.

那么

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha,\alpha}^{\lambda}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)+\mathrm{i}\sum_{j=1}^{2n} 2|\lambda| x_{2n+j}^{\lambda}(\xi_j + x_j^{\lambda})} \prod_{j=1}^{2n} h_{\alpha_j}\big(|\lambda|^{\frac{1}{2}}(\xi_j + 2x_j^{\lambda})\big) h_{\alpha_j}\big(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\xi_j\big) |\lambda|^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2|\lambda|^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2n} x_{2n+j}^{\lambda}\xi_j} \prod_{j=1}^{2n} h_{\alpha_j}\big(\xi_j + |\lambda|^{\frac{1}{2}} x_j^{\lambda}\big) h_{\alpha_j}\big(\xi_j - |\lambda|^{\frac{1}{2}} x_j^{\lambda}\big) d\xi \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)} \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{e}^{-|\lambda|(|x_j^{\lambda}|^2 + |x_{2n+j}^{\lambda}|^2)} L_{\alpha_j}^{(0)}\big(2|\lambda|(|x_j^{\lambda}|^2 + |x_{2n+j}^{\lambda}|^2)\big).
\end{aligned}$$

在第二个等式中我们利用了坐标变换

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}(\xi_j + x_j^{\lambda}) \mapsto \xi_j.$$

最后的等式是在 (3.2) 中令

$$p = 2|\lambda|^{\frac{1}{2}} x_j^{\lambda}, \quad q = 2|\lambda|^{\frac{1}{2}} x_{2n+j}^{\lambda}$$

得到的. 证毕.

4 Δ_{κ}^{m} 的基本解

本节计算 Δ_{κ}^{m} 的基本解的积分形式. 对于 Heisenberg 群的情形, Berenstein 和 Chang 等 [5] 利用 Laguerre 积分的方法得到了基本解, 而 Kumar 和 Mishra [15] 利用了另一个方法.

这里我们利用的方法与文 [22–25] 的相关计算是类似的.

对 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathscr{H}_n)$, 利用 Plancherel 公式定义分布 $\mathscr{G}_\kappa^m\in\mathscr{S}'(\mathscr{H}_n)$:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{2n+3}\langle\mathscr{G}_\kappa^m,\varphi\rangle:&=\int_{\mathbb{R}^3}\langle G_\kappa^m(\lambda),\pi_\lambda(\varphi)\rangle_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{2n}d\lambda\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\sum_\alpha\frac{\operatorname{tr}\big(A^\lambda_{\alpha,\alpha}\pi^*_\lambda(\varphi)\big)}{2^{2m}\big[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\big]^m}|\lambda|^{2n}d\lambda\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\sum_\alpha\frac{\langle\pi_\lambda(\varphi)^*h^\lambda_\alpha,h^\lambda_\alpha\rangle}{2^{2m}\big[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\big]^m}|\lambda|^{2n}d\lambda\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\sum_\alpha\frac{\langle\pi_\lambda(\varphi^*)h^\lambda_\alpha,h^\lambda_\alpha\rangle}{\big[2^{2m}\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\big]^m}|\lambda|^{2n}d\lambda,\end{aligned}\tag{4.1}$$

在第四个等式中用到了性质 2.1.

注意到

$$\begin{aligned}\langle\pi_\lambda(f)h^\lambda_\alpha,h^\lambda_\alpha\rangle&=\int_{\mathscr{H}_n}f(x,t)\langle\pi_\lambda(x,t)^{-1}h^\lambda_\alpha,h^\lambda_\alpha\rangle dxdt\\&=\int_{\mathscr{H}_n}f(x,t)\chi^\lambda_{\alpha,\alpha}(-x,-t)dxdt,\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中 $f\in\mathscr{S}(\mathscr{H}_n)$. 将 (4.2) 代入 (4.1), 可得

$$2^{2m}(2\pi)^{2n+3}\langle\mathscr{G}_\kappa^m,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}d\lambda\int_{\mathscr{H}_n}\Psi_m(x,t,\lambda)\overline{\varphi(x,t)}|\lambda|^{2n}dxdt,$$

其中

$$\Psi_m(x,t,\lambda)=\sum_\alpha\frac{\chi^\lambda_{\alpha,\alpha}(x,t)}{\big[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\big]^m}.\tag{4.3}$$

设 $f\in\mathscr{S}(\mathscr{H}_n)$, 记 $\widehat{f}(\lambda;\alpha,\alpha):=\langle\pi_\lambda(f)h^\lambda_\alpha,h^\lambda_\alpha\rangle$. 对每个 $N\geq 2n-m+1$, 存在一个 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{N'}$ 和常数 $c_N\geq 0$, 使得对任意 $f\in\mathscr{S}(\mathscr{H}_n)$,

$$\widehat{f}(\lambda;\alpha,\alpha)\leq c_N\frac{\|f\|_{N'}}{(1+|\lambda|^N)(1+\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1))^N}$$

(见文 [16, 引理 3.6]). 进一步地, 对同一个 N, 存在 $C_{n,N}\geq 0$, 使得

$$\sum_k\frac{1}{(1+\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1))^{[\frac{N}{m}]}\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)}\leq C_{m,n,N}\frac{1+|\lambda|^n}{|\lambda|^{2n}}\tag{4.4}$$

(见文 [16, 引理 6.2]). 那么

$$\begin{aligned}|\langle\mathscr{G}_\kappa^m,\varphi\rangle|&\leq C\bigg|\int\frac{\widehat{\varphi}(\lambda;\alpha,\alpha)}{\big[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+|\lambda|\big]^m}|\lambda|^{2n}d\lambda\bigg|\\&\leq C\|\varphi\|_{N'}\bigg|\int\sum_\kappa\frac{|\lambda|^{2n}}{(1+|\lambda|^N)(1+\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1))^N\big[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+|\lambda|\big]^m}d\lambda\bigg|\\&\leq C'\|\varphi\|_{N'}\int S^m(\lambda,k)\frac{|\lambda|^{2n}}{1+|\lambda|^N}d\lambda\leq C''\|\varphi\|_{N'},\end{aligned}$$

其中 $S(k,\lambda)$ 是 (4.4) 的左端, 从而 K_m 是一个分布.

现在要计算这个级数 (4.3). 为了这个目的, 我们希望把这个系数

$$\bigg[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\bigg]^{-m}$$

写为一个积分形式. 注意到

$$\frac{1}{A^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-Ar}dr,\quad \mathrm{Re}(A)>0. \tag{4.5}$$

由积分 (4.5) 和引理 3.3, 可得

$$\begin{aligned}\Psi_m(x,t,\lambda)&=\sum_\alpha\frac{\chi^\lambda_{\alpha,\alpha}(x,t)}{\left[\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1)+\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^{3}i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta\right]^m}\\&=\sum_\alpha\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)}}{\Gamma(m)}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta-r(\sum_{j=1}^{2n}|\lambda|(2\alpha_j+1))}\\&\quad\cdot\prod_{j=1}^{2n}\mathrm{e}^{-|\lambda|\,|z_j^\lambda|^2}L^{(0)}_{\alpha_j}(2|\lambda|\,|z^\lambda_j|^2)dr.\end{aligned}$$

下面利用 Laguerre 多项式的生成公式对上式求和, 由

$$\sum_\alpha L^{(0)}_\alpha(t)\omega(\lambda)^k=\frac{1}{1-\omega(\lambda)}\mathrm{e}^{-\frac{t\omega(\lambda)}{1-\omega(\lambda)}},$$

得

$$\begin{aligned}\Psi_m(x,t,\lambda)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)}}{\Gamma(m)}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}\prod_{j=1}^{2n}\mathrm{e}^{-|\lambda|r-|\lambda|\,|z_j^\lambda|^2}\sum_{\alpha_j=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-2|\lambda|r})^{\alpha_j}L^{(0)}_{\alpha_j}(2|\lambda|\,|z^\lambda_j|^2)dr\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)}}{\Gamma(m)}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}\prod_{j=1}^{2n}\frac{\mathrm{e}^{-|\lambda|r}}{1-\mathrm{e}^{-2|\lambda|r}}\mathrm{e}^{-|\lambda|\,|z_j^\lambda|^2\left[1+\frac{2\mathrm{e}^{-2|\lambda|r}}{1-\mathrm{e}^{-2|\lambda|r}}\right]}dr\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)}}{\Gamma(m)}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}\prod_{j=1}^{2n}\frac{1}{2\sinh(|\lambda|r)}\mathrm{e}^{-|\lambda|\,|z_j^\lambda|^2\coth(|\lambda|r)}dr\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)}}{\Gamma(m)|\lambda|^m}\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\hat\lambda_\beta}\prod_{j=1}^{2n}\frac{1}{2\sinh r}\mathrm{e}^{-|\lambda|\,|z_j^\lambda|^2\coth r}dr.\end{aligned}$$

在最后的等式中利用了坐标变换 $|\lambda|r\mapsto r$.

为了简便起见, 我们引入新的函数:

$$g(x,t;r,\hat\lambda)=-\mathrm{i}\hat\lambda(t)+|z|^2\coth r,$$

其中 $|z|^2=\sum_{j=1}^{2n}|z_j^\lambda|^2$. 对 $x\neq0$, 存在一个常数 c, 使得 $|g(x,t;r,\hat\lambda)|\geq c|z|^2>0$, 从而

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_m(x,t,\lambda)\overline{\varphi}|\lambda|^{2n}d\lambda\\&=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_{S^2}d\hat\lambda\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}dr\int_0^\infty|\lambda|^{2n-m+2}\prod_{j=1}^{2n}\frac{1}{2\sinh r}\mathrm{e}^{-g(x,t;r,\hat\lambda)|\lambda|}\overline{\varphi}d|\lambda|\\&=\frac{\Gamma(2n-m+3)}{\Gamma(m)}\int_{S^2}d\hat\lambda\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\hat\lambda_\beta}\prod_{j=1}^{2n}\frac{1}{2\sinh r}\frac{1}{g(x,t;r,\hat\lambda)^{2n-m+3}}\overline{\varphi}dr.\end{aligned}$$

记 $\lambda:=r\hat\lambda$, 由 $|z_j^{\hat\lambda}|=|z_j^\lambda|$, 我们得

$$g(x,t;r,\hat\lambda)r=-\mathrm{i}\lambda(t)+|\lambda|\,|z|^2\coth r.$$

当 $\mathrm{supp}\varphi \cap \{(x,t);x=0\}=\emptyset$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_m(x,t,\lambda)\overline{\varphi}|\lambda|^{2n}d\lambda = \frac{\Gamma(2n-m+3)}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{R}^3}\det\left(\frac{|B^\lambda|}{2\mathrm{sinh}|B^\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}}{g(x,t;\lambda)^{2n-m+3}}\overline{\varphi}d\lambda, \tag{4.6}$$

其中 $g(x,t;\lambda)$ 由 (1.3) 给出.

于是

$$\langle \mathscr{G}_\kappa^m,\varphi\rangle = \frac{\Gamma(2n-m+3)}{2^{2n+2m}(2\pi)^{2n+3}\Gamma(m)}\int_{\mathbb{R}^3}\det\left(\frac{|B^\lambda|}{\mathrm{sinh}|B^\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta}}{g(x,t;\lambda)^{2n-m+3}}\overline{\varphi}d\lambda. \tag{4.7}$$

定理 1.1 的证明 由 (2.12) 和 $\overline{i_\beta}=-i_\beta$, $\overline{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ 可得

$$d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)=d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)^*.$$

对 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathscr{H}_n)$, 有

$$\begin{aligned}(2\pi)^{2n+3}\langle\Delta_\kappa^m\mathscr{G}_\kappa^m,\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}\langle d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)\pi_\lambda(\mathscr{G}_\kappa^m),\pi_\lambda(\varphi)\rangle_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{2n}d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\langle \pi_\lambda(\mathscr{G}_\kappa^m),d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)\pi_\lambda(\varphi)\rangle_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{2n}d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\langle G_\kappa^m(\lambda),d\pi_\lambda(\Delta_\kappa^m)\pi_\lambda(\varphi)\rangle_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{2n}d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\sum_\alpha\langle\pi_\lambda(\varphi^*)h_\alpha^\lambda,h_\alpha^\lambda\rangle|\lambda|^{2n}d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{tr}(\pi_\lambda^*(\varphi))|\lambda|^{2n}d\lambda\\ &= (2\pi)^{2n+3}\overline{\varphi}(0,0).\end{aligned}$$

最后一个等式用到了逆公式 (2.13).

5 $\mathscr{G}_\kappa^1,\mathscr{G}_\kappa^2,\mathscr{G}_\kappa^3$ 的具体表示

第一种情形 $m=1$.

当 $m=1$, $n=1$ 时, Tie 和 Wong [19] 给出了基本解的具体表达式. 他们也给出了 Δ_0 的 Green 函数, 而 Chang 和 Markina [9] 用了另外一种方法. 在本节中, 我们希望基于公式 (4.7) 对任意的 $n\geq 1$ 去计算基本解的具体表达式.

设 $\lambda(\kappa)=\sum_{\beta=1}^3 i_\beta\kappa_\beta\lambda_\beta$. 当 $m=1$ 时, 积分 (4.6) 为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_1(x,t,\lambda)\overline{\varphi}|\lambda|^{2n}d\lambda &= \frac{\Gamma(2n+2)}{2^{2n}}\int_{S^2}d\hat{\lambda}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\mathrm{sinh}^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\mathrm{coth}r\big]^{2n+2}}\overline{\varphi}dr\\ &= \frac{\Gamma(2n+2)}{2^{2n+1}}\int_{S^2}d\hat{\lambda}\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\mathrm{sinh}^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\mathrm{coth}r\big]^{2n+2}}\overline{\varphi}dr.\end{aligned}$$

我们希望计算积分

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\mathrm{sinh}^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\mathrm{coth}r\big]^{2n+2}}dr.$$

由

$$\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{-2n-2}=-\frac{1}{2n(2n-1)\hat{\lambda}_k^2}\frac{\partial^2}{\partial_{t_k^2}}\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{-2n},$$

得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n+2}}dr\\&=-\frac{1}{2n(2n+1)\hat{\lambda}_k^2}\frac{\partial^2}{\partial_{t_k^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr.\end{aligned}\tag{5.1}$$

为了计算积分 (5.1) 的右端, 假设

$$r=[|z|^4+(\hat{\lambda}(t))^2]^{\frac{1}{4}}\tag{5.2}$$

和

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=r^{-2}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)),\tag{5.3}$$

其中

$$\phi\in\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big).$$

利用恒等式

$$\cosh(r+\mathrm{i}\phi)=\cosh r\cos\phi+\mathrm{i}\sinh r\sin\phi,\tag{5.4}$$

得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr=\frac{1}{r^{4n}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\cosh^{2n}(r+\mathrm{i}\phi)}dr.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}}{\cosh^{v}(ax+b)}dx=\frac{2^{v-1}}{a\Gamma(v)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yb/a}\Gamma\Big(\frac{v}{2}-\mathrm{i}\frac{y}{2a}\Big)\Gamma\Big(\frac{v}{2}+\mathrm{i}\frac{y}{2a}\Big),$$

那么

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr\\&=\frac{1}{r^{4n}}\frac{2^{2n-1}}{\Gamma(2n)}\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}\Gamma\left(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

将 (5.2), (5.3) 代入 (5.5), 可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr=\frac{2^{2n-1}\Gamma\big(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)}{\Gamma(2n)(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}.$$

令

$$a=n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2},\quad b=n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}.$$

通过计算 $(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{-a}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{-b}$ 关于 t_k 的一阶偏导数得

$$\frac{\partial}{\partial_{t_k}}\big[(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{-a}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{-b}\big]=\frac{\big[(b-a)|z|^2+(a+b)\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)\big]\mathrm{i}\lambda_\beta}{(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{a+1}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{b+1}}.$$

再计算二阶偏导数, (5.1) 具体为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n+2}}dr\\&=\frac{2^{2n-1}\Gamma(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2})\Gamma(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2})}{2n(2n+1)\Gamma(2n)}\cdot\frac{(2n-\lambda^2(\kappa))|z|^2+(4n+2)\lambda(\kappa)\hat{\lambda}(t)|z|^2-2n(2n+1)\hat{\lambda}^2(t)}{(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+2-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+2+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}.\end{aligned}$$

到此, 我们就证明了以下定理:

定理 5.1 设 κ 取适当的值. Δ_κ 的 Green 函数 $\mathscr{G}_\kappa^1$ 为

$$\mathscr{G}_\kappa^1=\frac{\tilde{\Gamma}(\lambda,\kappa)}{8(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{(2n-\lambda^2(\kappa))|z|^2+(4n+2)\lambda(\kappa)\hat{\lambda}(t)|z|^2-2n(2n+1)\hat{\lambda}^2(t)}{(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+2-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+2+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}d\hat{\lambda},$$

其中

$$\tilde{\Gamma}(\lambda,\kappa)=\Gamma\Big(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\Big).$$

如果 $\kappa=0$, 算子 Δ_0 为

$$\Delta_0:=-\sum_{j=1}^{4n}X_j^2,$$

由定理 5.1 我们可以迅速地得到以下结论.

推论 5.2 $\mathscr{H}_n$ 上算子 Δ_0 的基本解为

$$\mathscr{G}_0^1=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{4(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{|z|^2-(2n+1)\hat{\lambda}^2(t)}{(|z|^4+\hat{\lambda}^2(t))^{n+2}}d\hat{\lambda},\quad(z,t)\in\mathscr{H}_n. \tag{5.6}$$

当 $n=1$ 时, Tie 和 Wong [19] 给出了 $\mathscr{G}_0^1$ 更具体的公式.

第二种情形 $m=2$.

当 $m=2$ 时, 积分 (4.6) 可以写为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_2(x,t,\lambda)\overline{\varphi}|\lambda|^{2n}d\lambda=\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}}\int_{S^2}d\hat{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n+1}}\overline{\varphi}dr.$$

由

$$\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{-2n-1}=\frac{1}{2n\mathrm{i}\hat{\lambda}_k}\frac{\partial}{\partial_{t_k}}\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{-2n},$$

可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n+1}}dr\\&=\frac{1}{2n\mathrm{i}\hat{\lambda}_k}\frac{\partial}{\partial_{t_k}}\int_0^{\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr.\end{aligned} \tag{5.7}$$

再一次利用等式 (5.4), 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr\\&=\frac{1}{r^{4n}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\cosh^{2n}(r+\mathrm{i}\phi)}dr\\&=\frac{1}{r^{4n}}\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt-\frac{1}{r^{4n}}\mathrm{i}\phi\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt\\&=\frac{2^{2n-2}}{r^{4n}}\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}(I_1-I_2).\end{aligned}\tag{5.8}$$

积分 (5.8) 的第一部分为

$$\begin{aligned}I_1=2^{2-2n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt&=\int_0^{+\infty}\frac{v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}\ln v}{(1+v)^{2n}}dv\\&=\int_0^1\frac{\big(v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}-v^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}\big)\ln v}{(1+v)^{2n}}dv.\end{aligned}$$

利用级数展开式

$$\frac{1}{(1+v)^{2n}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}v^k,\tag{5.9}$$

可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\big(v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}-v^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}\big)\ln v}{(1+v)^{2n}}dv\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\left[\frac{1}{\big(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}-\frac{1}{\big(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}\right].\end{aligned}$$

那么

$$I_1=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}}{r^{4n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\left[\frac{1}{\big(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}-\frac{1}{\big(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}\right].$$

已知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{\cosh^{2n}t}dt=2^{2n-1}\frac{\Gamma(n-\frac{a}{2})\Gamma(n+\frac{a}{2})}{\Gamma(2n)},$$

从而

$$I_2=\frac{2\mathrm{i}\phi\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}}{r^{4n}}\cdot\frac{\Gamma\big(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)}{\Gamma(2n)}.$$

记

$$\zeta(\kappa)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\left[\frac{1}{\big(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}-\frac{1}{\big(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^2}\right],\tag{5.10}$$

$$\eta(\kappa)=\frac{2\Gamma\big(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)}{\Gamma(2n)}.\tag{5.11}$$

通过计算 $I_1 - I_2$ 关于 t_k 的一阶偏导数, 公式 (5.7) 转化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n+1}}dr$$
$$=\frac{\eta(\kappa)\big[|z|^2+\arctan\frac{\hat{\lambda}(t)}{|z|^2}\big(\lambda(\kappa)|z|^2-2n\hat{\lambda}(t)\big)\big]-\mathrm{i}\zeta(\kappa)[\lambda(\kappa)|z|^2-2n\hat{\lambda}(t)]}{2n(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+1+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+1-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}.$$

于是我们有如下结果.

定理 5.3 设 κ 取适当的值. Δ_κ^2 的 Green 函数 $\mathscr{G}_\kappa^2$ 为

$$\mathscr{G}_\kappa^2=\frac{\Gamma(2n)}{2^6(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{\eta(\kappa)\big[|z|^2+\arctan\frac{\hat{\lambda}(t)}{|z|^2}(\lambda(\kappa)|z|^2-2n\hat{\lambda}(t))\big]-\mathrm{i}\zeta(\kappa)[\lambda(\kappa)|z|^2-2n\hat{\lambda}(t)]}{(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+1+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+1-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}d\hat{\lambda},$$

其中 $\zeta(\kappa)$, $\eta(\kappa)$ 由 (5.10) 给出.

类似地, Δ_0^2 的基本解以如下推论给出.

推论 5.4 Δ_0^2 的基本解为

$$\mathscr{G}_0^2=\frac{\Gamma^2(n)}{2^6(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{|z|^2-2n\hat{\lambda}(t)\arctan\frac{\hat{\lambda}(t)}{|z|^2}}{[|z|^4+(\hat{\lambda}(t))^2]^{n+1}}d\hat{\lambda},\quad (z,t)\in\mathscr{H}_n.$$

第三种情形 $m=3$.

设 $m=3$, 积分 (4.6) 可以写为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_3(x,t,\lambda)\overline{\varphi}|\lambda|^{2n}d\lambda=\frac{\Gamma(2n)}{2^{2n+1}}\int_{S^2}d\hat{\lambda}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r^2}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}\overline{\varphi}dr.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\sinh^{2n}r}\frac{r^2}{\big[-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t)+|z|^2\coth r\big]^{2n}}dr\\&=\frac{1}{r^{4n}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)r}}{\cosh^{2n}(r+\mathrm{i}\phi)}dr\\&=\frac{1}{r^{4n}}\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}\bigg[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt-2\mathrm{i}\phi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt-\phi^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt\bigg]\\&=\frac{2^{2n-2}}{r^{4n}}\mathrm{e}^{-\lambda(\kappa)\phi}(J_1-J_2-J_3).\end{aligned}\tag{5.12}$$

积分 (5.12) 的第一部分为

$$\begin{aligned}J_1=2^{2-2n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\kappa)t}}{\cosh^{2n}t}dt&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}(\ln v)^2}{(1+v)^{2n}}dv\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\big(v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}+v^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}\big)(\ln v)^2}{(1+v)^{2n}}dv.\end{aligned}$$

由级数展开式 (5.9) 可以得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\big(v^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}+v^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}-1}\big)(\ln v)^2}{(1+v)^{2n}}dv\\&=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\bigg[\frac{1}{\big(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^3}+\frac{1}{\big(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\big)^3}\bigg].\end{aligned}$$

那么

$$J_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\left[\frac{1}{\left(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)^3}+\frac{1}{\left(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)^3}\right], \tag{5.13}$$

$$J_2=2\mathrm{i}\phi\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\left[\frac{1}{\left(n+k+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(n+k-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)^2}\right] \tag{5.14}$$

以及

$$J_3=\frac{2\phi^2\Gamma\left(n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}\right)}{\Gamma(2n)}. \tag{5.15}$$

定理 5.5 设 κ 取适当的值. Δ_κ^3 的 Green 函数 $\mathscr{G}_\kappa^3$ 为

$$\mathscr{G}_\kappa^3=\frac{\Gamma(2n)}{2^8(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{J_1-J_2-J_3}{(|z|^2+\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n+\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}(|z|^2-\mathrm{i}\hat{\lambda}(t))^{n-\frac{\mathrm{i}\lambda(\kappa)}{2}}}d\hat{\lambda},$$

其中 J_1, J_2, J_3 分别由 (5.13), (5.14), (5.15) 给出.

定理 5.6 设 κ 取适当的值. Δ_0^3 的 Green 函数 $\mathscr{G}_0^3$ 为

$$\mathscr{G}_0^3=\frac{\Gamma(2n)}{2^7(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{\gamma_n-\delta_n}{[|z|^4+(\hat{\lambda}(t))^2]^n}d\hat{\lambda},\quad (z,t)\in\mathscr{H}_n,$$

其中

$$\gamma_n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+k-1}{k}\frac{1}{(k+1)^3},\quad \delta_n=\phi^2\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)}.$$

当 $n=1$ 时,

$$\gamma_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+1}{k}\frac{1}{(k+1)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

以及

$$\delta_1=\phi^2=\left[\arctan\frac{\hat{\lambda}(t)}{|z|^2}\right]^2,$$

于是有如下推论.

推论 5.7 设 κ 取适当的值. Δ_0^3 的 Green 函数 $\mathscr{G}_0^3$ 为

$$\mathscr{G}_0^3=\frac{1}{2^7(2\pi)^{2n+3}}\int_{S^2}\frac{\frac{\pi^2}{12}-\left[\arctan\frac{\hat{\lambda}(t)}{|z|^2}\right]^2}{[|z|^4+(\hat{\lambda}(t))^2]^n}d\hat{\lambda},\quad (z,t)\in\mathscr{H}_n.$$

参 考 文 献

[1] Beals R., Greiner P., Calculus on Heisenberg manifolds, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[2] Beals R., Bernard G., Greiner P., The Green function of model step two hypoelliptic operators and the analysis of certain tangential Cauchy Riemann complexes, *Adv. Math.*, 1996, **121**(2): 288–345.

[3] Beals R., Gaveau B., Greiner P., et al., The Laguerre calculus on the Heisenberg group, II, *Bull. Sci. Math.*, 1986, **110**: 225–288.

[4] Benson C., Dooley A. H., Ratcliff G., Fundamental solution for powers of the Heisenberg sub-Laplacian, *Illinois J. Math.*, 1993, **37**(3): 455–476.

[5] Berenstein C., Chang D. C., Tie J., Laguerre Calculus and Its Applications on the Heisenberg Group, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2001.

[6] Chang D. C., Tie J., Estimates for powers of sub-Laplacian on the non-isotropic Heisenberg group, *J. Geom. Anal.*, 2000, **10**(4): 653–678.

[7] Chang D. C., Tie J., A note on Hermite and subelliptic operators, *Acta Math. Sin.*, 2005, **21**(4): 803–818.

[8] Chang D. C., Chang S. C., Tie J., Laguerre calculus and Paneitz operator on the Heisenberg group, *Sci. China*, 2009, **52**(12): 2549–2569.

[9] Chang D. C., Markina I., Quaternion H-type group and differential operator $\triangle_\lambda$, *Sci. China Ser. A*, 2008, **51**(4): 523–540.

[10] Cygan J., Heat kernels for class 2 nilpotent groups, *Studia Math.*, 1979, **64**(3): 227–238.

[11] Folland G. B., A fundamental solution for a subelliptic operator, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1973, **79**(2): 373–376.

[12] Folland G. B., Stein E. M., Estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1974, **27**(4): 429–522.

[13] Gaveau B., Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta Math.*, 1977, **139**(1–2): 95–153.

[14] Hulanicki A., The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group, *Studia Math.*, 1976, **56**(2): 165–173.

[15] Kumar A., Mishra M. M., Powers of sub-Laplacian on step two nilpotent Lie groups, *J. Geom. Anal.*, 2013, **23**(3): 1559–1570.

[16] Peloso M., Ricci F., Analysis of the Kohn Laplacian on quadratic CR manifolds, *J. Funct. Anal.*, 2003, **203**(2): 321–355.

[17] Stanton N. K., The solution of the $\overline{\partial}$-Neumann problem in a strictly pseudoconvex Siegel domain, *Invent. Math.*, 1981, **65**(1): 137–174.

[18] Shi Y., Wang W., The Szegö kernel for k-CF functions on the quaternionic Heisenberg group, *Appl. Anal.*, 2017, **96**(4): 1–19.

[19] Tie J., Wong M. W., The heat kernel and Green functions of sub-Laplacians on the quaternion Heisenberg group, *J. Geom. Anal.*, 2009, **19**(1): 191–210.

[20] Wang, W., The k-Cauchy–Fueter complex, Penrose transformation and Hartogs phenomenon for quaternionic k-regular functions, *J. Geom. phys.*, 2010, **60**(3): 513–530.

[21] Wang W., The tangential Cauchy-Fueter complex on the quaternionic Heisenberg group, *J. Geom. phys.*, 2011, **61**(1): 363–380.

[22] Wang W., On the tangential Cauchy–Fueter operators on nondegenerate quadratic hypersurfaces in $\mathbb{H}^2$, *Math. Nachr.*, 2013, **286**(13): 1353–1376.

[23] Wang H. M., Xie F. F., Fundamental solution of Laplacian on the general nilpotent groups of step two (in Chinese), *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 2013, **28**(3): 347–358.

[24] Wang H. M., Wang W., On octonionic regular functions and the Szegö projection on the octonionic Heisenberg group, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2014, **8**(6): 1285–1324.

[25] Wang H. M., Wu Q. Y., On fundamental solution for powers of the sub-Laplacian on the Heisenberg group, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2017, **32**(3): 365–378.

[26] Zhu L., A fundamental solution for the Laplace operator on the quaternionic Heisenberg group, *Acta Math. Sci.*, 2002, **22**(3): 369–378.