第63卷第2期 数学学报中文版 Vol.63, No.2
2020年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2020

**文章编号:** 0583-1431(2020)02-0157-14 **文献标识码: A**

# Pell 方程组 $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2p_1p_2p_3z^2=1$ 的公解

管训贵

泰州学院数理学院 泰州 225300
E-mail: tzszgxg@126.com

**摘 要** 设 $p_1,p_2,p_3$ 为不同的奇素数, $c>1$ 是整数. 给出了 Pell 方程组 $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2p_1p_2p_3z^2=1$ 的所有非负整数解 $(x,y,z)$, 从而推广了 Keskin (2017) 和 Cipu (2018) 等人的结果.

**关键词** Pell 方程; 基本解; 公解; 素数
**MR(2010) 主题分类** 11D09, 11D25
**中图分类** O156

## On the Common Solutions of Pell Equations $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2p_1p_2p_3z^2=1$

Xun Gui GUAN

*School of Mathematics and Physics, Taizhou University,*
*Taizhou* 225300, *P. R. China*
*E-mail*: *tzszgxg@126.com*

**Abstract** Let $p_1,p_2,p_3$ be diverse odd primes, and $c>1$ be integer. We obtain all nonnegative integer solutions$(x,y,z)$ on the Pell equations $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2p_1p_2p_3z^2=1$. It generalizes the previous work of Keskin (2017) and Cipu (2018).

**Keywords** Pell equation; fundamental solution; common solution; prime
**MR(2010) Subject Classification** 11D09, 11D25
**Chinese Library Classification** O156

## 1 引言及主要结论

设 $\mathbb{N}^*,\mathbb{N},\mathbb{Z}$ 分别是全体正整数, 全体非负整数和全体整数的集合. 关于 Pell 方程组

$$x^2-ay^2=y^2-bz^2=1,\quad x,y,z\in\mathbb{N}^* \tag{1.1}$$

收稿日期: 2019-05-24; 接受日期: 2019-09-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471144); 江苏省自然科学基金资助项目 (BK20171318); 云南省教育厅科学研究基金 (2019J1182); 泰州学院教博基金项目 (TZXY2018JBJJ002)

的研究由来已久. 1941 年, Ljunggren [11] 证明了 $(a,b)=(2,3)$ 时, (1.1) 仅有解 $(x,y,z)=(3,2,1)$; 1998 年, Bennett [1] 证明了 (1.1) 的解数不超过 3; 2004 年, 袁平之 [16] 证明了 $a>3.31\times 10^{35}$ 时, (1.1) 的解数不超过 2. 同年, 袁平之 [17] 还证明了 $a=4m(m+1)$ 时, (1.1) 的解数不超过 1, 并猜测: 对任意 $a,b\in\mathbb{N}^*$, (1.1) 至多只有 1 组解; 2007 年, Cipu [5] 证明了 $a=4m^2-1$ 时, (1.1) 的解数不超过 1. 至此, 对 $a=c^2-1$ $(1<c\in\mathbb{N}^*)$, 已经证明 (1.1) 至多只有 1 组解. 2008 年, 何波 [9] 证明了对任意 $a,b\in\mathbb{N}^*$, (1.1) 的解数不超过 2. 但文献 [1, 5, 9, 16, 17] 均未给出具体的求解方法.

2017 年, Keskin 等人 [10] 给出了 $a=c^2-1$ $(1<c\in\mathbb{Z})$, $b=p$ ($p$ 为素数) 时, 方程 (1.1) 的全部正整数解; 2018 年, Cipu [6] 研究了 $a=c^2-1$ $(1<c\in\mathbb{Z})$, $b=2p_1$, 或 $p_1p_2$, 或 $2p_1p_2$, 或 $p_1p_2p_3$ ($p_1,p_2,p_3$ 为不同的奇素数) 时, 方程 (1.1) 的求解问题, 并获得类似的结论.

本文运用文 [10] 中的思想方法和四次丢番图方程的有关性质, 进一步讨论 $b=2p_1p_2p_3$ 时方程 (1.1) 的求解问题, 得出以下一般性的结果.

**定理 1.1**　设 $p_1,p_2,p_3$ 为不同的奇素数, $1<c\in\mathbb{Z}$, 并记

$$\frac{V_m}{2}+U_m\sqrt{c^2-1}=(c+\sqrt{c^2-1})^m,\quad m\in\mathbb{N}^*,$$

则 Pell 方程组

$$\begin{cases}x^2-(c^2-1)y^2=1,\\ y^2-2p_1p_2p_3z^2=1,\quad x,y,z\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{1.2}$$

除开平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$ 外, 还有三类情况:

(i) 当 $2c^2-1=p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$ 时, (1.2) 仅有解 $(x,y,z)=(\frac{V_3}{2},U_3,2cl)$;

(ii) 当 $2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$ 但 $(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)=p_1p_2p_3h^2$ $(h\in\mathbb{N}^*)$ 时, (1.2) 仅有解 $(x,y,z)=(\frac{V_5}{2},U_5,2ch)$;

(iii) 当 $2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$ 且 $(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)\neq p_1p_2p_3h^2$ $(h\in\mathbb{N}^*)$ 时, (1.2) 无解.

根据定理 1.1 的 (i) 直接可得:

**推论 1.2**　当

$$\begin{aligned}(c,p_1p_2p_3)=&(37,7\times17\times23),(65,7\times17\times71),(82,7\times17\times113),(89,7\times31\times73),\\&(114,7\times47\times79),(121,7\times47\times89),(124,7\times23\times191),(128,7\times31\times151),\\&(135,7\times41\times127),(156,7\times17\times409),(159,7\times31\times233),(170,7\times23\times359),\\&(173,7\times17\times503),(184,7\times17\times569),(187,7\times97\times103),(190,17\times31\times137),\\&(193,23\times41\times79),(198,7\times23\times487)\end{aligned}$$

时, (1.2) 除开平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$ 外, 分别还有非平凡解

$$\begin{aligned}(x,y,z)=&(202501,5475,74),(1098305,16899,130),(2205226,26895,164),\\&(2819609,31683,178),(5925834,51983,228),(7085881,58563,242),\\&(7626124,61503,248),(8388224,65535,256),(9841095,72899,270),\\&(15185196,97343,312),(16078239,101123,318),(19651490,115599,340),\\&(20710349,119715,346),(24917464,135423,368),(26156251,139875,374),\\&(27435430,144399,380),(28755649,148995,386),(31048974,156815,396).\end{aligned}$$

根据定理 1.1 的 (ii) 直接可得:

**推论 1.3** 当

$$(c,p_1p_2p_3)=(4,7\times 31\times 61),\ (13,3\times 337\times 673),\ (181,3\times 65521\times 131041)$$

时, (1.2) 除开平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$ 外, 分别还有非平凡解

$$(x,y,z)=(15124,3905,24),\ (5896813,454949,390),\ (3108109324501,17172136805,75658).$$

根据定理 1.1 的 (iii) 直接可得:

**推论 1.4** 设 $p_1,p_2,p_3$ 为不同的奇素数, $1<c\in\mathbb{Z}$, 若 $c\not\equiv\pm4 \pmod 9$ 且 $c\neq C_n$ $(n\equiv 0,1 \pmod 3)$ 以及 $2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$, 则 (1.2) 仅有平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$,这里

$$C_n=\frac{(1+\sqrt{3})^{4n-2}+(1-\sqrt{3})^{4n-2}}{2^{2n+1}},\quad 1<n\in\mathbb{Z}.$$

**推论 1.5** 设 $1<c\in\mathbb{Z}$, $p_1,p_2,p_3$ 为不同的奇素数, 若 $p_i\equiv\pm3 \pmod 8$ $(i=1,2,3)$, 则 (1.2) 仅有平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$.

## 2 概念和引理

设 $P,Q$ 为非零整数, 多项式 $x^2-Px-Q$ 的根为 $\alpha,\beta$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $U_n=U_n(P,Q)$, $V_n=V_n(P,Q)$, 并满足下列递推关系式:

$$U_0=0,\quad U_1=1,\quad U_{n+1}=PU_n+QU_{n-1}\quad (n\in\mathbb{N}^*),$$
$$V_0=2,\quad V_1=P,\quad V_{n+1}=PV_n+QV_{n-1}\quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

不难验证 $U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, $V_n=\alpha^n+\beta^n$, 且有

**引理 2.1** 若 $D\in\mathbb{N}^*$ 为非平方数, $x_1+y_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程

$$x^2-Dy^2=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^* \tag{2.1}$$

的基本解, 则 (2.1) 的全部解可表示为

$$x_n=\frac{V_n(2x_1,-1)}{2},\quad y_n=y_1U_n(2x_1,-1),\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

**证明** 令 $P=2x_1$, $Q=-1$, 则有

$$\alpha=x_1+\sqrt{x_1^2-1}=x_1+y_1\sqrt{D},\quad \beta=x_1-\sqrt{x_1^2-1}=x_1-y_1\sqrt{D}.$$

易知, (2.1) 的全部解可表示为

$$x_n+y_n\sqrt{D}=(x_1+y_1\sqrt{D})^n,\quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{2.2}$$

于是由 (2.2) 式可得

$$x_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{D})^n+(x_1-y_1\sqrt{D})^n}{2}=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}=\frac{V_n(2x_1,-1)}{2},$$
$$y_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{D})^n-(x_1-y_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}=y_1\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=y_1U_n(2x_1,-1).$$

引理 2.1 得证.

对于 $U_n=U_n(P,-1)$, $V_n=V_n(P,-1)$, 易证明以下引理 2.2–2.7 (可参见文 [10]).

**引理 2.2** 若 $d=\gcd(m,n)$, 则 $\gcd(U_m,U_n)=U_d$.

**引理 2.3** (i) $U_n^2-1=U_{n-1}U_{n+1}$; (ii) $U_{2n}=U_nV_n$; (iii) $V_{2n}=V_n^2-2$.

**引理 2.4** 若 $P\geq 3$, 则 $P\,|\,U_k$ 当且仅当 $2\,|\,k$, $P\,|\,V_k$ 当且仅当 $2\nmid k$.

**引理 2.5** 设 $m=2^ak$, $n=2^bl$ $(a,b\in\mathbb{N},\,k,l\in\mathbb{N}^*,\,2\nmid kl)$, $d=\gcd(m,n)$, $2\,|\,P$, 则当 $a>b$ 时, $\gcd(U_m,V_n)=V_d$; 当 $a\leq b$ 且 $2\nmid m$ 时, $\gcd(U_m,V_n)=1$; 当 $a\leq b$ 且 $2\,|\,m$ 时, $\gcd(U_m,V_n)=2$.

**引理 2.6** 设 $2\,|\,P$. 若 $n\equiv 1 \pmod 2$, 则 $\gcd(\frac{U_{2n}}{P},V_{2n})=1$; 若 $n\equiv 0 \pmod 2$, 则 $\gcd(\frac{U_{2n}}{P},V_{2n})=2$.

**引理 2.7** 对任意 $m\in\mathbb{N}^*$, 用 $\tau_2(m)$ 表示 $m$ 的标准分解式中 2 的指数, 若 $2\,|\,P$, 则当 $n\equiv 1 \pmod 2$ 时,

$$\tau_2(U_n(P,-1))=0,\quad \tau_2(V_n(P,-1))=\tau_2(P);$$

当 $n\equiv 0 \pmod 2$ 时,

$$\tau_2(U_n(P,-1))=\tau_2(P)+\tau_2(n)-1,\quad \tau_2(V_n(P,-1))=1.$$

**引理 2.8** 设 $P\geq 3$, 若 $U_n=x^2$, 则 $(P,n)=(338,4)$, $(3,6)$ 或 $n\leq 2$.

**证明** 参见文 [12].

**引理 2.9** 不定方程

$$2Y^2=X^4-4X^2+2,\quad X,Y\in\mathbb{N}$$

仅有解 $(X,Y)=(2,1)$ 和 $(0,1)$.

**证明** 参见文 [2].

**引理 2.10** 若 $1<A\in\mathbb{Z}$, 则不定方程

$$A^2x^4-(A^2-1)y^2=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^*$$

仅有解 $(x,y)=(1,1)$.

**证明** 参见文 [3].

**引理 2.11** 设 $D\in\mathbb{N}^*$ 且不是平方数, 则不定方程

$$x^4-Dy^2=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^* \tag{2.3}$$

除开 $D=1785,\,4\cdot 1785,\,16\cdot 1785$ 分别有两组解 $(x,y)=(13,4),(239,1352)$; $(x,y)=(13,2),(239,676)$; $(x,y)=(13,1),(239,338)$ 外, (2.3) 最多只有一组解 $(x_1,y_1)$, 且满足 $x_1^2=u_1$ 或 $2u_1^2-1$, 这里 $u_1+v_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $U^2-DV^2=1$ 的基本解.

**证明** 参见文 [13].

由引理 2.11 立得:

**引理 2.12** 设 $1<c\in\mathbb{Z}$, 则不定方程

$$x^4-(c^2-1)y^2=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^*$$

仅有解 $(x,y)=(c,1)$.

**引理 2.13** 设 $D\in\mathbb{N}^*$ 且不是平方数, 则不定方程

$$x^2-Dy^4=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^* \tag{2.4}$$

至多有两组解 $(x,y)$, 而且 (2.4) 恰有两组解的充要条件是 $D=1785$ 或 $D=28560$ 或 $2u_1$ 和 $v_1$ 都是平方数, 这里 $u_1+v_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $U^2-DV^2=1$ 的基本解.

**证明** 参见文 [15].

由引理 2.13 立得:

**引理 2.14** 设 $1<c\in\mathbb{Z}$, 则不定方程

$$x^2-4c^2(c^2-1)y^4=1,\quad x,y\in\mathbb{N}^*$$

仅有解 $(x,y)=(2c^2-1,1)$.

**引理 2.15** 设 $D\in\mathbb{N}^*$ 且不是平方数. 若不定方程 (2.4) 仅有一组解 $(x,y^2)=(u_n,v_n)$, 则当 $2\mid n$ 时, 必有 $n=2$; 当 $2\nmid n$ 时, 必有 $n=1$ 或 $p$, 这里 $u_n+v_n\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $U^2-DV^2=1$ 的解, $p$ 是适合 $p\equiv 3 \pmod 4$ 的素数.

**证明** 参见文 [14].

**引理 2.16** 不定方程

$$Y^2-2\left(\frac{X^2+1}{2}\right)^2=-1,\quad X,Y\in\mathbb{N}^*$$

仅有解 $(X,Y)=(1,1)$ 和 $(3,7)$.

**证明** 参见文 [7].

**引理 2.17** 不定方程

$$Y^2-2\left(\frac{3X^2-1}{2}\right)^2=-1,\quad X,Y\in\mathbb{N}^*$$

仅有解 $(X,Y)=(1,1)$.

**证明** 参见文 [8].

**引理 2.18** 设 $D\in\mathbb{N}^*$ 且不是平方数, 若不定方程

$$X^2-DY^2=-2,\quad X,Y\in\mathbb{N}^* \tag{2.5}$$

有解, 则必有无穷多组解. 设 $X_1+Y_1\sqrt{D}$ 是 (2.5) 的基本解, 则 (2.5) (除开 $X^2-2Y^2=-2$ 外) 的全部解可表示为

$$X+Y\sqrt{D}=\frac{(X_1+Y_1\sqrt{D})^{2n-1}}{2^{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

**证明** 参见文 [4].

## 3 定理和推论的证明

**定理 1.1 的证明** 易知 Pell 方程 $x^2-(c^2-1)y^2=1$ 的基本解为 $\alpha=c+\sqrt{c^2-1}$, 再根据引理 2.1, 该方程的全部解可表示为

$$x_m=\frac{V_m(2c,-1)}{2},\quad y_m=U_m(2c,-1),\quad m\in\mathbb{N}^*,$$

且 $\{U_m\}$, $\{V_m\}$ 满足递推关系式:

$$U_0=0,\quad U_1=1,\quad U_{n+1}=2cU_n-U_{n-1}\quad (n\in\mathbb{N}^*),$$

$$V_0=2,\quad V_1=2c,\quad V_{n+1}=2cV_n-V_{n-1}\quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

令 $(\frac{V_m}{2},U_m,z)$ 是 (1.2) 的任一组解, 若 $m=1$, 则 $(\frac{V_1}{2},U_1,z)$ 给出 (1.2) 的平凡解 $(x,y,z)=(c,1,0)$, 下设 $m\neq 1$.

当 $2\,|\,m$ 时, 可设 $m=2k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, 则由 (1.2) 的第二式得

$$U_{2k}^2-1=2p_1p_2p_3z^2. \tag{3.1}$$

但 $2\,|\,U_{2k}$, 故 (3.1) 式不成立. 因此 $2\nmid m$.

设 $m=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$, 则由 (1.2) 的第二式得 $U_{2k+1}^2-1=2p_1p_2p_3z^2$. 根据引理 2.3 的 (i), 可得

$$U_{2k}U_{2k+2}=2p_1p_2p_3z^2. \tag{3.2}$$

因为 $\gcd(2k,2k+2)=2$, 故由引理 2.2 知 $\gcd(U_{2k},U_{2k+2})=U_2=2c$, 于是 (3.2) 式可化为

$$U_{2k}=2cs^2,\quad U_{2k+2}=4cQ_0t^2, \tag{3.3}$$

或

$$U_{2k}=2cQ_0s^2,\quad U_{2k+2}=4ct^2, \tag{3.4}$$

或

$$U_{2k}=4cs^2,\quad U_{2k+2}=2cQ_0t^2, \tag{3.5}$$

或

$$U_{2k}=4cQ_0s^2,\quad U_{2k+2}=2ct^2, \tag{3.6}$$

或

$$U_{2k}=2cp_is^2,\quad U_{2k+2}=4cQ_it^2, \tag{3.7}$$

或

$$U_{2k}=2cQ_is^2,\quad U_{2k+2}=4cp_it^2, \tag{3.8}$$

或

$$U_{2k}=4cp_is^2,\quad U_{2k+2}=2cQ_it^2, \tag{3.9}$$

或

$$U_{2k}=4cQ_is^2,\quad U_{2k+2}=2cp_it^2, \tag{3.10}$$

这里 $s,t\in\mathbb{N}^*$, $\gcd(s,t)=1$, $z=2cst$, $Q_0=p_1p_2p_3=p_iQ_i$, $i=1,2,3$.

下面分两种情形讨论.

**情形 1** $2\nmid k$ 时.

**情形 1.1** 若 (3.3) 成立, 则由 (3.3) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4 可得 $U_k\cdot\frac{V_k}{2c}=s^2$. 根据引理 2.5 知 $\gcd(U_k,\frac{V_k}{2c})=1$. 故 $U_k=u^2$ $(u\in\mathbb{N}^*)$. 再由引理 2.8 知 $k=1$. 此时 $m=3$. 于是 (1.2) 的第二式成为

$$p_1p_2p_3z^2=4c^2(2c^2-1).$$

当 $2c^2-1=p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$ 时, $z=2cl$, 因此 (1.2) 有解 $(x,y,z)=(\frac{V_3}{2},U_3,2cl)$; 当 $2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2$ $(l\in\mathbb{N}^*)$ 时, (1.2) 无解.

**情形 1.2** 若 (3.4) 式成立, 则由 (3.4) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4, 可得

$$\frac{U_{k+1}}{2c}\cdot V_{k+1}=2t^2. \tag{3.11}$$

当 $k=4r+1$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{2(2r+1)}}{2c},V_{2(2r+1)})=1$. 此时 (3.11) 式可化为

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2,\quad V_{2(2r+1)}=v^2,\tag{3.12}$$

或

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2,\quad V_{2(2r+1)}=2v^2,\tag{3.13}$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$, $\gcd(u,v)=1$, $t=uv$.

由 (3.12) 的第二式结合引理 2.3 的 (iii) 知 $V_{2r+1}^2-2=v^2$, 显然不可能.

由 (3.13) 的第一式知 $U_{2(2r+1)}=2cu^2$, 根据 (3.3) 的第一式讨论可得 $2r+1=1$, 所以 $r=0$. 此时 $k=1$, 进而也有 $m=3$.

当 $k=4r+3$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{4(r+1)}}{2c},V_{4(r+1)})=2$. 此时 (3.11) 式可化为

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2c}=4u^2,\quad V_{4(r+1)}=2v^2,\tag{3.14}$$

或

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2c}=2u^2,\quad V_{4(r+1)}=4v^2,\tag{3.15}$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$, $\gcd(u,v)=1$, $t=2uv$.

由 (3.14) 的第二式结合引理 2.3 的 (iii), 可得

$$2v^2=V_{2(r+1)}^2-2=(V_{r+1}^2-2)^2-2=V_{r+1}^4-4V_{r+1}^2+2.$$

根据引理 2.9, $V_{r+1}=2$ 或 0, 故 $r+1=0$, 即 $r=-1$, 不合题意.

由 (3.15) 的第二式得 $(2v)^2=V_{2(r+1)}^2-2$, 显然不可能.

**情形 1.3** 若 (3.5) 式成立, 则由 (3.5) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii), 可得

$$U_kV_k=4cs^2.\tag{3.16}$$

当 $2\nmid k$ 时, $2\nmid U_k$. 令 $\tau_2(c)=w$, 则由引理 2.7 知 $\tau_2(V_k)=\tau_2(2c)=w+1$, 故 $\tau_2(U_kV_k)=w+1$, 而 $\tau_2(4cs^2)\geq w+2$, 矛盾, 所以 (3.16) 式不成立, 从而 (3.5) 式不成立.

**情形 1.4** 类似 (3.5) 式的讨论知 (3.6) 式也不成立.

**情形 1.5** 若 (3.7) 式成立, 则由 (3.7) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4 可得 $U_k\cdot\frac{V_k}{2c}=p_is^2$ $(i=1,2,3)$. 根据引理 2.5 知 $\gcd(U_k,\frac{V_k}{2c})=1$, 故

$$U_k=f^2\ \text{ 或 }\ \frac{V_k}{2c}=g^2,$$

这里 $f,g\in\mathbb{N}^*$.

当 $U_k=f^2$ 时, 由引理 2.8 知 $k=1$, 此时 $m=3$.

当 $\frac{V_k}{2c}=g^2$ 时, $\frac{V_k}{2}=cg^2$, 由 (1.2) 的第一式得

$$c^2g^4-(c^2-1)U_k^2=1.\tag{3.17}$$

根据引理 2.10 及 (3.17) 式给出 $U_k=1$, 故 $k=1$, 此时仍得 $m=3$.

**情形 1.6** 若 (3.8) 式成立, 则由 (3.8) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4, 可得

$$\frac{U_{k+1}}{2c}\cdot V_{k+1}=2p_it^2,\quad i=1,2,3.\tag{3.18}$$

当 $k=4r+1$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{2(2r+1)}}{2c},V_{2(2r+1)})=1$. 故 (3.18) 式给出

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2 \ \text{或}\ \frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2 \ \text{或}\ V_{2(2r+1)}=v^2 \ \text{或}\ V_{2(2r+1)}=2v^2,$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$.

若 $\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2$, 则由 (3.3) 的第一式讨论知 $2r+1=1$, 即 $r=0$, 从而 $k=1$, 此时 $m=3$.

若 $\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$\left(\frac{V_{2(2r+1)}}{2}\right)^2-c^2(c^2-1)(2u)^4=1. \tag{3.19}$$

因 Pell 方程 $X^2-c^2(c^2-1)Y^2=1$ $(X,Y\in\mathbb{N}^*)$ 的基本解为 $(u_1,v_1)=(2c^2-1,2)$, 故由引理 2.13 知 (3.19) 式至多有一组解, 再根据引理 2.15 及 $2\,|\,n$ 知 $(2u)^2=v_2=4(2c^2-1)$, 即 $u^2=2c^2-1$, 故 $U_{2(2r+1)}=4cu^2=4c(2c^2-1)$. 因此 $2(2r+1)=4$. 显然不可能.

若 $V_{2(2r+1)}=v^2$, 则由 (3.12) 的第二式讨论知不可能.

若 $V_{2(2r+1)}=2v^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$v^4-(c^2-1)U^2_{2(2r+1)}=1. \tag{3.20}$$

根据引理 2.12 及 (3.20) 式给出 $U_{2(2r+1)}=1$, 故 $2(2r+1)=1$. 也不可能.

当 $k=4r+3$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{4(r+1)}}{2c},V_{4(r+1)})=2$. 故 (3.18) 式给出

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2c}=2u^2 \ \text{或}\ \frac{U_{4(r+1)}}{2c}=4u^2 \ \text{或}\ V_{4(r+1)}=2v^2 \ \text{或}\ V_{4(r+1)}=4v^2,$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$.

若 $\frac{U_{4(r+1)}}{2c}=2u^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$\left(\frac{V_{4(r+1)}}{2}\right)^2-c^2(c^2-1)(2u)^4=1. \tag{3.21}$$

由 (3.19) 式的讨论知 (3.21) 式给出 $4(r+1)=4$, 推出 $r=0$, 从而 $k=3$. 此时 $m=7$. 于是 (1.2) 的第二式成为

$$p_1p_2p_3z^2=8c^2(2c^2-1)(8c^4-8c^2+1)(16c^4-16c^2+3). \tag{3.22}$$

但 (3.22) 式左边 2 的方幂为偶数, 而右边 2 的方幂为奇数, 不可能.

若 $\frac{U_{4(r+1)}}{2c}=4u^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$\left(\frac{V_{4(r+1)}}{2}\right)^2-4c^2(c^2-1)(2u)^4=1. \tag{3.23}$$

根据引理 2.14 及 (3.23) 式给出 $2u=1$. 不可能.

若 $V_{4(r+1)}=2v^2$, 则由 (3.14) 的第二式讨论知 $r=-1$, 不合题意; 若 $V_{4(r+1)}=4v^2$, 则由 (3.15) 的第二式讨论知也不可能.

**情形 1.7 及 1.8** 类似 (3.5) 式的讨论知 (3.9) 式与 (3.10) 式均不成立.

**情形 2** $2\,|\,k$ 时.

**情形 2.1** 若 (3.3) 式成立, 则由 (3.3) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4, 可得

$$\frac{U_k}{2c}\cdot V_k=s^2. \tag{3.24}$$

当 $k=4r+2$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{2(2r+1)}}{2c},V_{2(2r+1)})=1$. 此时 (3.24) 式给出 $V_{2(2r+1)}=v^2$ $(v\in\mathbb{N}^*)$, 再根据引理 2.3 的 (iii) 知 $V_{2r+1}^2-2=v^2$, 显然不可能.

当 $k=4r$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{4r}}{2c},V_{4r})=2$. 此时 (3.24) 式给出 $V_{4r}=2v^2$, 即 $2v^2=V_r^4-4V_r^2+2$, 再根据引理 2.9 可得 $V_r=2$ 或 0, 故 $r=0$, 推得 $k=0$, 从而 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾.

**情形 2.2** 若 (3.4) 式成立, 则由 (3.4) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii), 可得

$$U_{k+1}V_{k+1}=4ct^2. \tag{3.25}$$

当 $2\,|\,k$ 时, $2\nmid U_{k+1}$. 令 $\tau_2(c)=w$, 则由引理 2.7 知 $\tau_2(V_{k+1})=\tau_2(2c)=w+1$, 故 $\tau_2(U_{k+1}V_{k+1})=w+1$, 而 $\tau_2(4ct^2)\geq w+2$, 矛盾, 所以 (3.25) 式不成立, 从而 (3.4) 式不成立.

**情形 2.3** 若 (3.5) 式成立, 则由 (3.5) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4, 可得

$$\frac{U_k}{2c}\cdot V_k=2s^2. \tag{3.26}$$

当 $k=4r+2$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{2(2r+1)}}{2c},V_{2(2r+1)})=1$. 此时 (3.26) 式可化为

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2,\quad V_{2(2r+1)}=v^2, \tag{3.27}$$

或

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2,\quad V_{2(2r+1)}=2v^2, \tag{3.28}$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$, $\gcd(u,v)=1$, $s=uv$.

由 (3.27) 的第二式结合引理 2.3 的 (iii) 知 $V_{2r+1}^2-2=v^2$, 显然不可能. 由 (3.28) 的第一式可得 $U_{2(2r+1)}=2cu^2$, 根据 (3.3) 的第一式讨论知 $2r+1=1$, 所以 $r=0$. 此时 $k=2$, 进而 $m=5$. 于是 (1.2) 的第二式成为

$$p_1p_2p_3z^2=4c^2(4c^2-3)(2c^2-1)(2c+1)(2c-1). \tag{3.29}$$

当 $(2c^2-1)(4c^2-3)(4c^2-1)=p_1p_2p_3h^2$ $(h\in\mathbb{N}^*)$ 时, (1.2) 仅有解

$$(x,y,z)=\left(\frac{V_5}{2},U_5,2ch\right).$$

否则无解.

下面具体讨论 (1.2) 何时无解.

易知 $4c^2-3,2c^2-1,2c+1,2c-1$ 两两互素.

若 $4c^2-3=A^2$ $(A\in\mathbb{N}^*)$, 则 $c=1$ 与 $c>1$ 矛盾, 故 $4c^2-3$ 非平方数.

若 $2c^2-1=U^2$, $2c+1=V^2$ $(U,V\in\mathbb{N}^*)$, 则有

$$U^2-2\left(\frac{V^2-1}{2}\right)^2=-1. \tag{3.30}$$

注意到 $2\nmid V$, 对 (3.30) 式取模 8 知 $U^2\equiv 7 \pmod 8$, 不可能; 若 $2c^2-1=U^2$, $2c-1=V^2$ $(U,V\in\mathbb{N}^*)$, 则有

$$U^2-2\left(\frac{V^2+1}{2}\right)^2=-1. \tag{3.31}$$

根据引理 2.16 及 (3.31) 式给出 $V=1$ 或 3, 故 $c=1$ (不合题意) 或 $c=5$. 但 $c=5$ 时, (3.29) 式成为 $p_1p_2p_3z^2=11\cdot 97\cdot 210^2$, 显然不成立. 因此, $2c^2-1$ 与 $2c+1$, $2c^2-1$ 与 $2c-1$ 以及 $2c+1$ 与 $2c-1$ 不可能同为平方数.

以下分三种情况讨论:

(i) 若 $c=3j$ ($j\in\mathbb{N}^*$), 则 $4c^2-3=3(12j^2-1)$.

因 $\gcd(3,12j^2-1)=1$ 且 $12j^2-1$ 非平方数, 即 $4c^2-3$ 至少提供 2 个不同的非平方素因子, 故 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 而左边只有 3 个不同的非平方素因子, 矛盾.

(ii) 若 $c=3j+1$ ($j\in\mathbb{N}^*$), 则 $2c+1=3(2j+1)$.

考虑到 $c\not\equiv 4 \pmod 9$ 时, $j\not\equiv 1 \pmod 3$, 于是有 $\gcd(3,2j+1)=1$.

当 $2c^2-1$ 为平方数时, $2c+1$ 与 $2c-1$ 皆非平方数. 若 $2c^2-1=U^2$, $2c+1=3V^2$ ($U,V\in\mathbb{N}^*$), 则有

$$U^2-2\left(\frac{3V^2-1}{2}\right)^2=-1. \tag{3.32}$$

根据引理 2.17 及 (3.32) 式给出 $V=1$, 推出 $c=1$ (不合题意), 故 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 即 (3.29) 式不成立.

当 $2c+1$ 为平方数时, $2c^2-1$ 与 $2c-1$ 皆非平方数. 此时 $2j+1=3a^2$ ($a\in\mathbb{N}^*$), 推出 $j\equiv 1 \pmod 3$. 显然不可能, 故 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 即 (3.29) 式不成立.

当 $2c-1$ 为平方数时, $2c^2-1$ 与 $2c+1$ 皆非平方数. 若 $2c-1=U^2$, $2c+1=3V^2$ ($U,V\in\mathbb{N}^*$), 则有

$$U^2-3V^2=-2. \tag{3.33}$$

根据引理 2.18, 方程 (3.33) 的全部解可表示为

$$U+V\sqrt{3}=\frac{(1+\sqrt{3})^{2n-1}}{2^{n-1}},\quad 1<n\in\mathbb{Z},$$

即

$$U=\frac{(1+\sqrt{3})^{2n-1}+(1-\sqrt{3})^{2n-1}}{2^n},\quad 1<n\in\mathbb{Z}.$$

于是

$$c=\frac{(1+\sqrt{3})^{4n-2}+(1-\sqrt{3})^{4n-2}}{2^{2n+1}}=C_n,$$

并且 $n\equiv 0,1 \pmod 3$ 时, $C_n\equiv 1 \pmod 9$; $n\equiv 2 \pmod 3$ 时, $C_n\equiv 4 \pmod 9$. 因此, 若 $c\neq C_n$ ($n\equiv 0,1 \pmod 3$), 则 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 即 (3.29) 式不成立.

(iii) 若 $c=3j-1$ ($j\in\mathbb{N}^*$), 则 $2c-1=3(2j-1)$.

考虑到 $c\not\equiv -4 \pmod 9$ 时, $j\not\equiv -1 \pmod 3$, 于是有 $\gcd(3,2j-1)=1$.

当 $2c^2-1$ 为平方数时, $2c+1$ 与 $2c-1$ 皆非平方数. 若 $2c^2-1=U^2$, $2c-1=3V^2$ ($U,V\in\mathbb{N}^*$), 则有

$$U^2-2\left(\frac{3V^2+1}{2}\right)^2=-1. \tag{3.34}$$

注意到 $2\nmid V$, 对 (3.34) 式取模 8 知 $U^2\equiv 7 \pmod 8$, 不可能, 故 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 即 (3.29) 式不成立.

当 $2c+1$ 为平方数时, $2c^2-1$ 与 $2c-1$ 皆非平方数. 若 $2c+1=U^2$, $2c-1=3V^2$ $(U,V\in\mathbb{N}^*)$, 则有

$$U^2-3V^2=2. \tag{3.35}$$

取模 3 知不可能, 故 (3.35) 式不成立, 从而 (3.29) 式不成立.

当 $2c-1$ 为平方数时, $2c^2-1$ 与 $2c+1$ 皆非平方数. 此时 $2j-1=3a^2$ $(a\in\mathbb{N}^*)$, 推出 $j\equiv -1 \pmod 3$, 显然不可能, 故 (3.29) 式右边至少提供 4 个不同的非平方素因子, 即 (3.29) 式不成立.

当 $k=4r$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{4r}}{2c},V_{4r})=2$. 此时 (3.26) 式可化为

$$\frac{U_{4r}}{2c}=2u^2,\quad V_{4r}=4v^2, \tag{3.36}$$

或

$$\frac{U_{4r}}{2c}=4u^2,\quad V_{4r}=2v^2, \tag{3.37}$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$, $\gcd(u,v)=1$, $s=2uv$.

由 (3.36) 的第二式结合引理 2.3 的 (iii) 可得 $(2v)^2=V_{2r}^2-2$, 显然不可能. 由 (3.37) 的第二式得 $2v^2=V_r^4-4V_r^2+2$. 根据引理 2.9, $V_r=2$ 或 0, 故 $r=0$, 推得 $k=0$, 从而 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾.

**情形 2.4** 若 (3.6) 式成立, 则由 (3.6) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii) 可得 $U_{k+1}V_{k+1}=2ct^2$. 由于 $2\mid k$, 故 $2\nmid(k+1)$. 于是由引理 2.4 可得

$$U_{k+1}\cdot\frac{V_{k+1}}{2c}=t^2. \tag{3.38}$$

根据引理 2.5 知 $\gcd(U_{k+1},\frac{V_{k+1}}{2c})=1$, 故 (3.38) 式给出 $U_{k+1}=g^2$ $(g\in\mathbb{N}^*)$. 由引理 2.8 知 $k+1\leq 2$, 即 $k\leq 1$, 故 $k=0$, 推出 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾.

**情形 2.5** 若 (3.7) 式成立, 则由 (3.7) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii), 可得

$$U_{k+1}V_{k+1}=4cQ_it^2,\quad i=1,2,3. \tag{3.39}$$

当 $2\mid k$ 时, $2\nmid U_{k+1}$. 令 $\tau_2(c)=w$, 则由引理 2.7 知 $\tau_2(V_{k+1})=\tau_2(2c)=w+1$, 故 $\tau_2(U_{k+1}V_{k+1})=w+1$, 而 $\tau_2(4cQ_it^2)\geq w+2$, 矛盾, 所以 (3.39) 式不成立, 从而 (3.7) 式不成立.

**情形 2.6** 类似 (3.7) 式的讨论知 (3.8) 式不成立.

**情形 2.7** 若 (3.9) 式成立, 则由 (3.9) 的第一式结合引理 2.3 的 (ii) 和引理 2.4, 可得

$$\frac{U_k}{2c}\cdot V_k=2p_is^2,\quad i=1,2,3. \tag{3.40}$$

当 $k=4r+2$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{2(2r+1)}}{2c},V_{2(2r+1)})=1$. 此时 (3.40) 式给出

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2\ \text{ 或 }\ \frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2\ \text{ 或 }\ V_{2(2r+1)}=v^2\ \text{ 或 }\ V_{2(2r+1)}=2v^2,$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$.

若 $\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=u^2$, 则由 (3.13) 的第一式讨论知 $m=3$; 若 $\frac{U_{2(2r+1)}}{2c}=2u^2$, 则由 (3.19) 式的讨论知不可能.

若 $V_{2(2r+1)}=v^2$, 则由 (3.12) 的第二式讨论知不可能; 若 $V_{2(2r+1)}=2v^2$, 则由 (3.20) 式的讨论知不可能.

当 $k=4r$ $(r\in\mathbb{N})$ 时, 根据引理 2.6 知 $\gcd(\frac{U_{4r}}{2c},V_{4r})=2$. 此时 (3.40) 式给出

$$\frac{U_{4r}}{2c}=2u^2 \quad \text{或} \quad \frac{U_{4r}}{2c}=4u^2 \quad \text{或} \quad V_{4r}=2v^2 \quad \text{或} \quad V_{4r}=4v^2,$$

这里 $u,v\in\mathbb{N}^*$.

若 $\frac{U_{4r}}{2c}=2u^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$\left(\frac{V_{4r}}{2}\right)^2-c^2(c^2-1)(2u)^4=1. \tag{3.41}$$

由 (3.19) 式的讨论知 (3.41) 式给出 $4r=4$, 所以 $r=1$, 此时 $k=4$, 进而 $m=9$. 于是 (1.2) 的第二式成为

$$p_1p_2p_3z^2=8c^2(2c^2-1)(16c^4-12c^2+1)(8c^4-8c^2+1)(16c^4-20c^2+5). \tag{3.42}$$

但 (3.42) 式左边 2 的方幂为偶数, 而右边 2 的方幂为奇数, 不可能.

若 $\frac{U_{4r}}{2c}=4u^2$, 则由 (1.2) 的第一式得

$$\left(\frac{V_{4r}}{2}\right)^2-4c^2(c^2-1)(2u)^4=1. \tag{3.43}$$

根据引理 2.14, (3.43) 式给出 $2u=1$, 显然不可能.

若 $V_{4r}=2v^2$, 则由 (3.37) 的第二式讨论知 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾; 若 $V_{4r}=4v^2$, 则由 (3.36) 的第二式讨论知不可能. 因此 (3.9) 式不成立.

**情形 2.8** 若 (3.10) 式成立, 则由 (3.10) 的第二式结合引理 2.3 的 (ii), 可得

$$U_{k+1}V_{k+1}=2cp_it^2, \quad i=1,2,3.$$

由于 $2\,|\,k$, 故 $2\nmid(k+1)$, 于是由引理 2.4 可得

$$U_{k+1}\cdot\frac{V_{k+1}}{2c}=p_it^2, \quad i=1,2,3. \tag{3.44}$$

根据引理 2.5 知 $\gcd(U_{k+1},\frac{V_{k+1}}{2c})=1$, 故 (3.44) 式给出

$$U_{k+1}=f^2 \quad \text{或} \quad \frac{V_{k+1}}{2c}=g^2,$$

这里 $f,g\in\mathbb{N}^*$.

当 $U_{k+1}=f^2$ 时, 由引理 2.8 知 $k+1\leq 2$, 即 $k\leq 1$. 故 $k=0$ 推出 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾.

当 $\frac{V_{k+1}}{2c}=g^2$ 时, 由 (1.2) 的第一式得

$$c^2g^4-(c^2-1)U_{k+1}^2=1. \tag{3.45}$$

根据引理 2.10 及 (3.45) 式给出 $U_{k+1}=1$, 故 $k=0$. 同样, 推出 $m=1$, 与 $m\neq 1$ 矛盾. 定理 1.1 得证.

**推论 1.2 的证明** 由于

$2\times 37^2-1=7\times 17\times 23\times 1^2,\ 2\times 65^2-1=7\times 17\times 71\times 1^2,$

$2\times 82^2-1=7\times 17\times 113\times 1^2,\ 2\times 89^2-1=7\times 31\times 73\times 1^2,$

$2\times 114^2-1=7\times 47\times 79\times 1^2,\ 2\times 121^2-1=7\times 47\times 89\times 1^2,$

$2\times124^2-1=7\times23\times191\times1^2,\ \ 2\times128^2-1=7\times31\times151\times1^2,$
$2\times135^2-1=7\times41\times127\times1^2,\ \ 2\times156^2-1=7\times17\times409\times1^2,$
$2\times159^2-1=7\times31\times233\times1^2,\ \ 2\times170^2-1=7\times23\times359\times1^2,$
$2\times173^2-1=7\times17\times503\times1^2,\ \ 2\times184^2-1=7\times17\times569\times1^2,$
$2\times187^2-1=7\times97\times103\times1^2,\ \ 2\times190^2-1=17\times31\times137\times1^2,$
$2\times193^2-1=23\times41\times79\times1^2,\ 2\times198^2-1=7\times23\times487\times1^2.$

因此结论成立. 推论 1.2 得证.

**推论 1.3 的证明** 当 $c=4$ 时, $2c^2-1=31\neq p_1p_2p_3l^2$, 且

$$(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)=7\times31\times61\times3^2;$$

当 $c=13$ 时, $2c^2-1=337\neq p_1p_2p_3l^2$, 且

$$(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)=3\times337\times673\times15^2;$$

当 $c=C_3=181$ 时, $2c^2-1=65521\neq p_1p_2p_3l^2$, 且

$$(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)=3\times65521\times131041\times209^2.$$

因此, 结论成立. 推论 1.3 得证.

**推论 1.4 的证明** 由 (3.29) 式的讨论知, 当 $c\not\equiv\pm4\ (\mathrm{mod}\ 9)$, 且 $c\neq C_n\ (n\equiv0,1\ (\mathrm{mod}\ 3))$ 时,

$$(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)\neq p_1p_2p_3h^2,\quad h\in\mathbb{N}^*.$$

由条件又知 $2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2\ (l\in\mathbb{N}^*)$. 故根据定理 1.1 的 (iii) 得出 (1.2) 仅有平凡解

$$(x,y,z)=(c,1,0).$$

推论 1.4 得证.

**推论 1.5 的证明** 当 $p_i\equiv\pm3\ (\mathrm{mod}\ 8)\ (i=1,2,3)$ 时,

$$2c^2-1\neq p_1p_2p_3l^2,\quad l\in\mathbb{N}^*.$$

此外, 由 (3.29) 式得

$$p_1p_2p_3z^2=4c^2(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1).\tag{3.46}$$

易知 $4c^2-3,4c^2-1,2c^2-1$ 两两互素, 且 $4c^2-3\ (c>1)$, $4c^2-1$ 皆非平方数.

若 $2c^2-1$ 为非平方数, 则存在 $p_i\ (i=1,2,3)$, 使得 $p_i\,|\,(2c^2-1)$, 即

$$2c^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p_i).$$

但 $p_i\equiv\pm3\ (\mathrm{mod}\ 8)$, 故由 Legendre 符号的性质推知

$$1=\left(\frac{2}{p_i}\right)=-1.$$

矛盾, 所以 $2c^2-1$ 为平方数, 不妨记为 $2c^2-1=d^2\ (d\in\mathbb{N}^*)$, 此时 $4c^2-3=2d^2-1$, 而 $4c^2-3\ (c>1)$ 为非平方数, 故存在 $p_i\ (i=1,2,3)$, 使得 $p_i\,|\,(2d^2-1)$, 即

$$2d^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p_i).$$

同样推出矛盾, 因此 (3.46) 式不成立, 即

$$(4c^2-3)(4c^2-1)(2c^2-1)\neq p_1p_2p_3h^2,\quad h\in\mathbb{N}^*.$$

故根据定理 1.1 的 (iii) 得出 (1.2) 仅有平凡解

$$(x, y, z) = (c, 1, 0).$$

推论 1.5 得证.

**致谢** 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

## 参 考 文 献


[1] Bennett M. A., On the number of solutions of simultaneous Pell equations, *J. Reine Angew. Math.*, 1998, **498**: 173–199.

[2] Bosma W., Cannon J., Playoust C., The Magma algebra system, I: the user language, *J. Symb. Comput.*, 1997, **24**(3–4): 235–265.

[3] Cao Z. F., Complete solution of the diophantine equation $A^2x^4 - By^2 = 1$ and some related problems, *J. of Harbin Institute of Technology* (*New Series*), 2001, **8**(2): 108–110.

[4] Cao Z. F., Diophantine Equation and Its Applications (in Chinese), Shanghai Jiaotong University Press, Shanghai, 2000.

[5] Cipu M., Pairs of Pell equations having at most one common solution in positive integers, *An. St. Univ. Ovidius Constant a Ser. Math.*, 2007, **15**(1): 55–66.

[6] Cipu M., Explicit formula for the solution of simultaneous Pell equations $x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$, $y^2 - bz^2 = 1$, *Proceedings of the American Math. Soc.*, 2018, **146**(3): 983–992.

[7] Dong X. L., Shiu W. C., Chu C. I., et al., The simultaneous Pell equations $y^2 - Dz^2 = 1$ and $x^2 - 2Dz^2 = 1$, *Acta Arith.*, 2007, **126**(2): 115–123.

[8] Guan X. G., On positive integer solutions to the simultaneous Pell equations $y^2 - Dz^2 = 1$ and $x^2 - 2Dz^2 = 1$ (in Chinese), *J. Central China Normal University* (*Nat. Sci.*), 2019, **53**(2): 171–180.

[9] He B., On the number of solutions of simultaneous Pell equations $x^2 - ay^2 = 1$ and $y^2 - bz^2 = 1$, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2008, **51**(4): 721–726.

[10] Keskin R., Karaath O., Siar Z., et al., On the determination of solutions of simultaneous Pell equations$x^2 - (a^2 - 1)y^2 = y^2 - pz^2 = 1$, *Period. Math. Hungar.*, 2017, **75**(2): 336–344.

[11] Ljunggren W., Litt om simultane Pellske ligninger, *Norsk Mat. Tidsskr.*, 1941, **2**: 132–138.

[12] Mignotte M., Pethö A., Sur les carrés dans certaines suites de Lucas, *J. Théor. Nombers Bordeaux*, 1993, **5**(2): 333–341.

[13] Sun Q., Yuan P. Z., On the Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$ (in Chinese), *J. Sichuan University* (*Natural Science Edition*), 1997, **34**(3): 265–268.

[14] Togbe A., Voutier P. M., Walsh P. G., Solving a family of thue equations with an application to the equation $x^2 - Dy^4 = 1$, *Acta Arith.*, 2005, **120**(1): 39–58.

[15] Walsh G., A note on a theorem of Ljunggren and the diophantine equations $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ or 4, *Arch. Math.*, 1999, **73**(2): 119–125.

[16] Yuan P. Z., Simultaneous Pell equations, *Acta Arith.*, 2004, **115**: 215–221.

[17] Yuan P. Z., On the number of solutions of $x^2 - 4m(m+1)y^2 = y^2 - bz^2 = 1$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, **132**: 1561–1566.