文章编号: 0583-1431(2020)02-0149-08 **文献标识码: A**

一类量子 Markov 半群的超压缩性与对数 Sobolev 不等式

张伦传

中国人民大学数学学院 北京 100080
E-mail: zhanglc@ruc.edu.cn

摘　要　本文在有限 von Neumann 代数生成的非交换概率空间 L^p $(p \geq 1)$ 框架下, 证明了一类量子 Markov 半群的超压缩性等价于其对应的 Dirichlet 型满足对数 Sobolev 不等式. 此结果包含前人的相关成果为特例. 作为推论, 细化了 Biane 的相关工作.

关键词　量子 Markov 半群; 超压缩性; Dirichlet 型; 对数 Sobolev 不等式
MR(2010) 主题分类　46L08
中图分类　O177.5

Hypercontractivity of a Class of Quantum Markov Semigroups and Logarithmic Sobolev Inequality

Lun Chuan ZHANG

School of Mathematics, Renmin University of China,
Beijing 100080, *P. R. China*
E-mail: *zhanglc@ruc.edu.cn*

Abstract　We prove the equivalence between logarithmic Sobolev inequality and hypercontractivity of quantum Markov semigroup and its associated Dirichlet form based on a probability gage space. Our results include the relevant conclusions of predecessors as special cases, and refine B. Biane's work as a corollary.

Keywords　Quantum Markov semigroup; hypercontractivity; Dirichlet form; logarithmic Sobolev inequality
MR(2010) Subject Classification　46L08
Chinese Library Classification　O177.5

1　引言与主要结果

交换情形, 即 bosonic 系统下 Markov 半群的超压缩性研究始于 Nelson 的工作 [17]. 在此情形下, Gross [13] 建立了其超压缩性与相应的对数 Sobolev 不等式的等价对应关系. 进而, Gross [14] 又展开了非交换情形, 即 fermonic 系统下的研究. 在此情形下, Carlen 和 Lieb [7] 证明了上述对

收稿日期: 2019-03-04; 接受日期: 2019-09-04

应关系也是成立的. Biane [3] 把 Carlen 和 Lieb 的工作拓展到 q-Ornstein–Uhlenbeck semigroup $(-1 < q < 1)$ (具体见第 2 节), 但他没有给出超压缩性与相应的对数 Sobolev 不等式的等价关系. 本文的动因是从此出发, 在一般的非交换概率空间框架下建立量子 Markov 半群的超压缩性与相应的对数 Sobolev 不等式的等价关系.

基于各种具体的非交换概率空间的量子 Markov 半群的超压缩性及非交换泛函不等式的研究正方兴未艾 [8, 11, 15, 19, 20], 而且已应用于量子信息和量子计算的研究之中 [2, 18]. 因此, 本文的研究具有理论意义和应用价值.

下面是本文的主要结果:

定理 1.1 设 $\{T_t\}_{t\geq 0} = \mathrm{e}^{-tL}$ 是定义在非交换概率空间族 $L^p(A,\tau)$ $(p \geq 1)$ 上的量子 Markov 半群, 对应正则 Dirichlet 型 $\epsilon[x] = \langle\sqrt{L}x, \sqrt{L}x\rangle$, $\forall x \in D(\epsilon)$, $D(\epsilon)$ 是 Dirichlet 型的定义域, 其中 (A,τ) 是给定的有限 von Neumann 代数, τ 是它的有限、忠实、正常迹类态. 对于任意给定的 $p > 1$, 令 $p(t) = 1 + (p-1)\mathrm{e}^{2t/a}$, $b(t) = b(\frac{1}{p} - \frac{1}{p(t)})$, $a > 0$ 和 $b \geq 0$ 均为常数. 若 $x \in L^2_+(A,\tau)$, 记 $\mathrm{Ent}(x) = \tau(x\log x) - \|x\|_{L^2}\log\|x\|_{L^2}$ 为 x 的相对熵, 则下述等价:

(1) $\|T_t x\|_{p(t)} \leq \mathrm{e}^{b(t)}\|x\|_p$, 对于任意的 $x \in A$ 及 $p > 1$, $t \geq 0$;

(2) $\mathrm{Ent}(|x|^2) \leq 4\,a\epsilon[x] + b\|x\|_2^2$, 对于任意的 $x \in D(\epsilon)$.

当 $x \in D_h := D(\epsilon) \cap L^2_h(A,\tau)$, 上述不等式中的系数 $4a$ 可缩小为 $2a$.

定理 1.2 设 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0} = \{\mathrm{e}^{-tN^q}\}_{t\geq 0}$ 为定义在 von Neumann 代数 $\Gamma_q(\mathscr{H})$ 上的 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群, $q \geq 1$, N^q 是其无穷小生成元. $\epsilon[x] = \langle x, N^q x\rangle$ 为其对应的 Dirichlet 型, 则下述等价:

(1) $\|U_t^{(q)}x\|_{p(t)} \leq \|x\|_p$, 对于任意的 $x \in \Gamma_q(\mathscr{H})$ 及 $p > 1$, $t \geq 0$;

(2) $\mathrm{Ent}(|x|^2) \leq 2\,\epsilon[x]$, 对于任意的 $x \in D(\epsilon)$.

2 基本概念及主要结果的证明

设 (A,τ) 是有限 von Neumann 代数, τ 是 A 上忠实、正常迹类态. 对于任意给定的 $1 \leq p < \infty$, 记 $L^p(A,\tau)$ 为 A 关于范数 $\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{\frac{1}{p}}$, $x \in A$ 完备化的非交换概率空间, $L^\infty(A,\tau)$ 关于 A 上的算子范数就是 A 本身.

定义 2.1 定义在 $L^\infty(A,\tau)$ 上的弱 $*$- 连续的对称算子半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 称为量子 Markov 半群, 若它满足:

对于 $x \in L^\infty(A,\tau) \otimes M_n(C)$, 若 $0 \leq x \leq 1 \otimes I_n$, 则

$$0 \leq \{T_t \otimes I_n\}(x) \leq 1 \otimes I_n,$$

其中 $M_n(C)$ 是 n 阶矩阵代数, 上述 I_n 是其单位阵, 1 是 A 的单位元, $\forall n \geq 1$.

进而, 若还满足 $T_t(1) = 1$, $\forall t \geq 0$, 则称之为保守的量子 Markov 半群.

由文 [10, 命题 3.4] 知, 上述量子 Markov 半群可保序延拓到 $L^p(A,\tau)$ 上, 仍记为 T_t.

记 L 为 T_t 的无穷小生成元, 即 $T_t = \mathrm{e}^{-tL}$, 易证 L 是闭稠定的非负算子. 令 $\epsilon[x] = \langle\sqrt{L}x, \sqrt{L}x\rangle$, 其定义域 $D(\epsilon)$ 即 $\sqrt{L}$ 的定义域, 则 $\epsilon[x]$ 是其对应的全 Dirichlet 型, 即它具有下述性质:

(1) 若 $a \in D(\epsilon)$ 则 $J(a) \in D(\epsilon)$, 而且 $\epsilon[J(a)] = \epsilon[a]$, 其中 $J: L^2(A,\tau) \to L^2(A,\tau)$ 为运算 $*: a \to a^*$, $A \to A$ 的延拓.

(2) 对于 $a \in D(\epsilon) \cap L^2_h(A,\tau)$, 则 $\epsilon[a \wedge 1] \leq \epsilon[a]$.

(3) 进而, $(\epsilon^n, D(\epsilon^n))$ $(L^2(A,\tau)\otimes M_n(C), \tau^n)$: $\epsilon^n[[a_{ij}]_{i,j=1}^n] := \sum_{i,j=1}^n \epsilon[a_{ij}]$ 也具有上述 (2) 的收缩性质, 其中 $n \geq 1$, $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in D(\epsilon^n) := D(\epsilon)\otimes M_n(C)$, $\tau^n = \tau\otimes \mathrm{tr}_n$ 是 von Neumann 代数 $A\otimes M_n(C)$ 上的忠实、正常迹类态, tr_n 是 $M_n(C)$ 上的迹类态.

说明一点: 符合上述 (1) 和 (2) 两条的二次型为 Dirichlet 型. 具体可参考文 [1], [9] 及 [10].

另外, 给定 Dirichlet 型 $\epsilon[\ ]$, 若 $1\in D(\epsilon)$, 则称之为保守的; 若 $A\cap D(\epsilon)$ 在 A 中范数稠, 同时在 $D(\epsilon)$ 中关于图范数 $|||x|||_1^2 = \epsilon[x] + \tau(|x|^2)$ 也稠, 则称之为正则的.

命题 2.2 (见文 [1, 引理 2.3], [10, 命题 2.12] 和 [9, 命题 4.5 及 4.10]) 设 $(\epsilon, D(\epsilon))$ 是定义在 $L^2(A,\tau)$ 中的闭、稠定、非负二次型, 则下述等价:

(1) $(\epsilon, D(\epsilon))$ 是 Dirichlet 型.

(2) 对于任意 Lipschitz 函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 即 $|\varphi(t)-\varphi(s)|\leq c_\varphi|t-s|$, $\forall\, t,s\in\mathbb{R}$, $\varphi(0)=0$, 其中 c_φ 是正常数, 则当 $x\in D(\epsilon)\cap L_h^2(A,\tau)$ 时成立 $\epsilon[\varphi(x)]\leq c_\varphi^2\epsilon[x]$.

进一步, 若 $(\epsilon, D(\epsilon))$ 是保守的, 则上述 (1) 和 (2) 等价于下面的 (3):

(3) 对于任意 $x\in D(\epsilon)\cap L_+^2(A,\tau)$, 都有 $\epsilon(1,x)\geq 0$; 而且对于任意 $x\in D(\epsilon)\cap L_h^2(A,\tau)$, 都有 $\epsilon[|x|]\leq\epsilon[x]$.

注 2.3 给定 Dirichlet 型 $\epsilon[,]$, 由文 [10, 命题 1.2] 知 $\epsilon[|x|]\leq 2\ \epsilon[x]$, $\forall\, x\in D(\epsilon)$. 当 $x\in D(\epsilon)\cap L_h^2(A,\tau)$, 由上述命题 2.2 (2) 可得 $\epsilon[|x|]\leq\epsilon[x]$.

下面给出超压缩半群的概念.

定义 2.4 定义在非交换概率空间族 $L^p(A,\tau)$ $(p\geq 1)$ 上的量子 Markov 半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 称为超压缩半群, 指若它具有下述性质: 对于任意的 $p>1$, 及任意常数 $a>0$ 和 $b\geq 0$, 记 $p(t) = 1+(p-1)\,\mathrm{e}^{2t/a}$, 则成立

$$\|T_t x\|_{p(t)} \leq \mathrm{e}^{b(\frac{1}{p}-\frac{1}{p(t)})}\|x\|_p,\quad \forall\, t\geq 0,\quad \forall\, x\in L^p(A,\tau).$$

为证明定理 1.1 需要下面的引理. 此引理利用 (无界) 非负算子的谱分解, 类似于 Biane 的文 [3, 引理 3] 的证明即得.

引理 2.5 对于任意可逆正算子 $x\in A\cap D(\epsilon)$ 及 $1<p<\infty$, 下面不等式成立:

$$\epsilon[x^{p/2}] \leq \frac{p^2}{4(p-1)}\epsilon(x, x^{p-1}),$$

即

$$\langle x^{p/2}, Lx^{p/2}\rangle \leq \frac{p^2}{4(p-1)}\langle x, Lx^{p-1}\rangle.$$

基于上述准备工作, 下面给出定理 1.1 的证明:

证明 首先注意到, 因 T_t 是全正映射, 由文 [19, 注 9] 知, T_t 从 $L_h^p(A,\tau)$ 到 $L_h^q(A,\tau)$ $(p,q>1)$ 的范数 $\|T_t\|_{L^p\to L^q}$ 可在正锥 $L_+^p(A,\tau)$ 上取到. 故下面只需在正锥上考虑超压缩性即可. 给定可逆正元 $x\in A\cap D(\epsilon)$, 记 $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-b(t)}\|T_t x\|_{p(t)}$. 利用文 [12, 引理 2] 和 [16, 引理 3.1], 然后例行计算得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log\varphi(t) &= \frac{d}{dt}(-b(t)+\log\|T_t x\|_{p(t)}) = -b'(t) + \frac{1}{\|T_t x\|_{p(t)}}\frac{d\|T_t x\|_{p(t)}}{dt}\\ &= -b'(t) + \frac{1}{\|T_t x\|_{p(t)}}\frac{d}{dt}[\tau(T_t x)^{p(t)}]^{\frac{1}{p(t)}}.\end{aligned}\qquad\text{(I)}$$

因

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\tau(T_tx)^{p(t)}]^{\frac{1}{p(t)}} &= \|T_tx\|_{p(t)}\frac{d}{dt}\bigg[\frac{1}{p(t)}\log\tau_q(T_tx)^{p(t)}\bigg]\\ &= \|T_tx\|_{p(t)}\bigg[-\frac{p'(t)}{p^2(t)}\log\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}+\frac{1}{p(t)}\frac{1}{\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\frac{d\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}{dt}\bigg],\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}\frac{d\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}{dt} &= \frac{d}{dt}\tau[(T_tx)^{p(t)}]\\ &= \tau\bigg[(T_tx)^{p(t)}\bigg(p'(t)\log T_tx+p(t)(T_tx)^{-1}\frac{dT_tx}{dt}\bigg)\bigg],\end{aligned}$$

把上述等式代入式 (I), 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log\varphi(t) &= -b'(t)-\frac{p'(t)}{p^2(t)}\log\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}\\ &\quad+\frac{1}{p(t)\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\tau\bigg[(T_tx)^{p(t)}\bigg(p'(t)\log T_tx+p(t)(T_tx)^{-1}\frac{dT_tx}{dt}\bigg)\bigg]\\ &= -b'(t)-\frac{p'(t)}{p^2(t)}\log\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}+\frac{1}{p(t)\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\tau[p'(t)(T_tx)^{p(t)}\log T_tx]\\ &\quad+\tau\bigg[p(t)(T_tx)^{p(t)-1}\frac{dT_tx}{dt}\bigg]. \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

注意到 $\frac{dT_tx}{dt}=-L(T_tx)$, 于是

$$\tau\bigg[(T_tx)^{p(t)-1}\frac{dT_tx}{dt}\bigg]=-\epsilon((T_tx)^{p(t)-1},T_tx).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}((T_tx)^{p(t)}) &= \tau[(T_tx)^{p(t)}\log(T_tx)^{p(t)}]-\tau[(T_tx)^{p(t)}\log\tau[(T_tx)^{p(t)}]]\\ &= \tau[(T_tx)^{p(t)}\log(T_tx)^{p(t)}]-\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}\log\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}.\end{aligned}$$

结合上述式 (II) 可得

$$\frac{d}{dt}\log\varphi(t)=-b'(t)+\frac{p'(t)}{p(t)^2}\frac{1}{\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\mathrm{Ent}((T_tx)^{p(t)})-\frac{1}{\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\epsilon((T_tx)^{p(t)-1},T_tx). \qquad \text{(III)}$$

在上述基础上, 若式 (I) 成立. 因 $b(0)=0$ 及 $p(0)=p$, 从而 $\varphi(0)=\|x\|_p$. 然后由 T_t 的超压缩性得 $\varphi'(0)\le 0$, 利用上述式 (III) 得

$$\mathrm{Ent}((T_tx)^{p(t)})\le\frac{p^2(t)\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}{p'(t)}\bigg[b'(t)+\frac{1}{\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\epsilon((T_tx)^{p(t)-1},T_tx)\bigg].$$

令 $t=0$ 及 $p=2$ 得 $p(0)=2$, $p'(0)=\frac{2}{a}$, $b'(0)=\frac{1}{2a}$. 因此, 由上述不等式得

$$\mathrm{Ent}(x^2)\le 2a\epsilon[x]+b\|x\|_2^2.$$

下面再考虑任意正元 $x\in D(\epsilon)$. 因 $\epsilon[,]$ 是正则的, 故存在由 $A\cap D(\epsilon)$ 中可逆正元组成的序列 (x_n), 使得 $|||x_n-x|||_1\to 0$, $n\to\infty$, 其中 $|||x|||_1=\epsilon[x]+\tau(|x|^2)$ 是图范数. 于是得 $\epsilon[x_n]\to\epsilon[x]$

及 $\|x_n\|_2 \to \|x\|_2$, $n\to\infty$. 对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}$, 由上述证明得

$$\mathrm{Ent}(x_n^2) \le 2a\epsilon[x_n] + b\|x_n\|_2^2.$$

令 $n\to\infty$, 结合范数的连续性, 得

$$\mathrm{Ent}(x^2) \le 2a\epsilon[x] + b\|x\|_2^2.$$

从而对于任意的 $y\in D(\epsilon)\cap L_h^2(A,\tau)$, 由上述不等式得

$$\mathrm{Ent}(|y|^2) \le 2a\epsilon[|y|] + b\|y\|_2^2.$$

因 $\epsilon[|y|]\le\epsilon[y]$, 进而得

$$\mathrm{Ent}(|y|^2) \le 2a\epsilon[y] + b\|y\|_2^2.$$

最后, 注意到 $\epsilon[|z|]\le 2\,\epsilon[z]$, $\forall\, z\in D(\epsilon)$, 类似于上面的证明可得

$$\mathrm{Ent}(|z|^2) \le 4\,a\epsilon[z] + b\|z\|_2^2.$$

反之, 若式 (II) 成立. 任意给定可逆正元 $x\in A\cap D(\epsilon)$, 有

$$\mathrm{Ent}(x^2) \le 2a\epsilon[x] + b\|x\|_2^2.$$

把 x 替换成 $x^{\frac{p}{2}}$, 则得

$$\mathrm{Ent}(x^p) \le 2a\epsilon[x^{\frac{p}{2}}] + b\|x^{\frac{p}{2}}\|_2^2.$$

再利用上述引理 2.5 得

$$\mathrm{Ent}(x^p) \le \frac{ap^2}{2(p-1)}\epsilon(x^{p-1},x) + b\|x\|_p^p.$$

在上述等式中把 x 替换成 T_tx, p 替换成 $p(t)$, 于是

$$\mathrm{Ent}((T_tx)^{p(t)}) \le \frac{ap(t)^2}{2(p(t)-1)}\epsilon((T_tx))^{p-1},T_tx) + b\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}. \tag{IV}$$

利用前面的式 (III) 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\log\varphi(t)\\ &\quad= \frac{p'(t)}{p^2(t)\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}}\Big[\mathrm{Ent}((T_tx)^{p(t)}) - \frac{p(t)^2}{p'(t)}\epsilon((T_tx)^{p(t)-1},T_tx) - \frac{b'(t)p(t)^2}{p'(t)}\|T_tx\|_{p(t)}^{p(t)}\Big].\end{aligned} \tag{V}$$

因 $b(t)=b(\frac{1}{p}-\frac{1}{p(t)})$, $p(t)=1+(p-1)\mathrm{e}^{\frac{2t}{a}}$, 故

$$b'(t)=\frac{p'(t)}{p(t)^2},\quad p'(t)=\frac{2}{a}(p-1)\mathrm{e}^{\frac{2t}{a}}.$$

于是 $\frac{p(t)^2}{p'(t)} = \frac{ap(t)^2}{2(p(t)-1)}$, 而且有 $\frac{b'(t)p(t)^2}{p'(t)} = b$. 结合式 (IV) 和 (V) 得 $\frac{d}{dt}\log\varphi(t)\le 0$, 由此得到 $\frac{d}{dt}\varphi(t)\le 0$. 从而 $\varphi(t)\le\varphi(0)=\|x\|_p$. 再由 $\epsilon[,]$ 是正则的, 易证 $A\cap D(\epsilon)$ 中可逆正元全体的集在每个 $L^p(A,\tau)$ 中关于 L^p- 范数稠, $\forall\, p>1$. 注意到 $\varphi(t)$ 关于算子范数连续, 从而得到 $\{T_t\}$ 的超压缩性. 证毕.

由上述定理 1.1 立得下面的推论.

推论 2.6 记号同定理 1.1. 若 $\epsilon[|J(x)|]=\epsilon[|x|]$, $\forall\, x\in D(\epsilon)$, 则下述等价:

(1) $\|T_tx\|_{p(t)}\le \mathrm{e}^{b(t)}\|x\|_p$, $\forall\, x\in A$, $\forall\, p>1$, $\forall\, t\ge 0$;

(2) $\mathrm{Ent}(|x|^2)\le 2\,a\,\epsilon[x]+b\,\|x\|_2^2$, $\forall\, x\in D(\epsilon)$.

为证明定理 1.2, 先介绍 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群的构造, 具体可见文 [3, 5] 和 [6].

设 H 是无穷维可分实 Hilbert 空间, H_C 为其对应的复 Hilbert 空间, 即 $H_C = H + \mathrm{i}H$. 记 Ω 为 1- 维复单位向量, 则代数 Fock 空间定义为

$$F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_C^{\otimes n},$$

其中记 $H_C^{\otimes 0} \equiv C\Omega$. 然后按下述方式定义 $F(H)$ 中的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$.

对于任意 $\xi, \eta \in F(H)$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_q = \langle \xi, P_q \eta \rangle,$$

其中 $\langle \, , \rangle$ 代表 $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$ 的内积,

$$P_q = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_q^{(n)}, \quad P_q^{(n)}(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} f_{\pi(1)} \otimes f_{\pi(2)} \otimes \cdots \otimes f_{\pi(n)},$$

对于任意的 $f_k \in F(H)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

记号 S_n 代表 n 个字符的对称群, $i(\pi)$ 是 $\pi(\in S_n)$ 的逆序数, 即

$$i(\pi) = \sharp\{(i, j) : 1 \le i < j \le k,\ \pi(i) > \pi(j)\}.$$

$\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 关于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ 的完备化记为 $F_q(H)$, 称为 q-Fock 空间.

对于任意 $f \in H \subset H_C$, 定义增生算子 $c_q(f)$ 如下:

$$\begin{aligned} &c_q(f)\Omega = f, \\ &c_q(f) f_1 \otimes \cdots \otimes f_k = f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_k. \end{aligned}$$

湮灭算子 $c_q^*(f)$ 是其对偶, 满足下述等式:

$$\begin{aligned} &c_q^*(f)\Omega = 0, \\ &c_q^*(f) f_1 \otimes \cdots \otimes f_k = \sum_{j=1}^{k} q^{j-1} \langle f_j, f \rangle f_1 \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_k. \end{aligned}$$

$c_q(f)$ 和 $c_q^*(f)$ 都是 $F_q(H)$ 上的有界算子, 具体地

$$\|c_q(f)\| = \|c_q^*(f)\| = \begin{cases} \|f\|(1-q)^{-1/2}, & \text{若 } 0 \le q < 1, \\ \|f\|, & \text{若 } -1 < q < 0. \end{cases}$$

q-Gaussian von Neumann 代数 $\Gamma_q(H)$ 是由自伴算子 $\omega(f) = c_q(f) + c_q^*(f)$, $f \in H$ 生成的. 由文 [4, 定理 2.10] 知 $\Gamma_q(H)$ 是 II_1- 因子, 而且 $\tau_q(a) = \langle \Omega, a\Omega \rangle_q$, $a \in \Gamma_q(H)$ 是 $\Gamma_q(H)$ 唯一忠实、正常迹类态. 以此为基础, 在 q-Gaussian von Neumann 代数 $\Gamma_q(H)$ $(-1 < q < 1)$ 上定义 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群如下:

设 $T : H_C \to H_C$ 是 H 上的收缩算子, 令

$$F_q(T) : F_q(H) \to F_q(H), \quad F_q(T)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = T_C f_1 \otimes \cdots \otimes T_C f_n,$$

则 $F_q(T)$ 是收缩算子. 接着可以定义 q-Gaussian 函子 Γ_q 如下

$$\Gamma_q(T) : \Gamma_q(H) \to \Gamma_q(H):$$

(1) $\Gamma_q(T)\omega(f) = \omega(Tf)$, $\forall\, f \in H$.

(2) $(\Gamma_q(T)(X))\Omega = F_q(T)(X\Omega)$.

由文 [4, 定理 2.11] 知 $\Gamma_q(T)$ 是有界的, 保单位元保迹类态的全正协变函子. 令 $T_t = \mathrm{e}^{-t} I_H$, $t \geq 0$, 其中 I_H 是 $B(H)$ 中的单位元, 则 $\Gamma_q(H)$ 上的 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群定义为

$$\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0} = \{\Gamma_q(T_t)\}_{t\geq 0}.$$

由上述构造知 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0}$ 是 $\Gamma_q(H)$ 的保守、全正 Markov 半群, 由文 [10, 命题 3.4] 知 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0}$ 可以扩展到非交换概率空间族 $L^p(\Gamma_q(H), \tau_q)$ $(p \geq 1)$ 上成为量子 Markov 半群, 仍记为 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0}$. 特别地, 它在空间 $L^2(\Gamma_q(H), \tau_q)$ 上的生成元 N^q 是计数算子:

$$N^q \Omega = 0,$$

且

$$N^q(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n), \quad f_j \in H_C \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

从而它对应的 Dirichlet 型 $\epsilon[x] = \langle \sqrt{N^q} x, \sqrt{N^q} x\rangle_q$, $\forall x \in D(\sqrt{N^q})$, 是保守的全正 Dirichlet 型.

Biane [3] 刻画了 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0}$ 的超压缩性 (见文 [3, 定理]), 并由超压缩性推导出了相应的对数 Sobolev 不等式 (见文 [3, 推论 1]). 而本文定理 1.2 表明, 对于 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群 $\{U_t^{(q)}\}_{t\geq 0}$, 其超压缩性与相应的对数 Sobolev 不等式是等价的, 从而完善了 Biane [3] 的工作.

最后给出定理 1.2 的证明.

证明 为证此结论, 由推论 2.6 只需证明 Dirichlet 型 $\epsilon[x] = \langle x, N^q x\rangle_q$, $x \in D(\epsilon)$ 是正则的, 而且满足条件 $\epsilon[|J(x)|] = \epsilon[|x|]$, $\forall x \in D(\epsilon)$ 即可.

任意固定 H 的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对于任意子集 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$, 利用文 [4, 命题 2.7] 归纳构造 q-Wick 积 $\psi_I = \psi(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) \in \Gamma_q(\mathscr{H})$ 如下:

$$\begin{aligned}
&\psi(e_{i_k}) = \omega(e_{i_k}) = c_q(e_{i_k}) + c_q^*(e_{i_k});\\
&\psi(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})\\
&\quad = \omega(e_{i_1})\psi(e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) - \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle e_{i_1}, e_{i_k}\rangle \psi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \check{e_{i_k}} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}),
\end{aligned}$$

其中符号 $\check{e_{i_k}}$ 表示 e_{i_k} 在乘积项中去掉.

定义

$$\Phi : \Gamma_q(H) \to F_q(H), \quad \Phi(a) = a(\Omega).$$

因 τ_q 是忠实的迹类态, 于是 Φ 是从 $\Gamma_q(H)$ 到 $F_q(H)$ 的连续嵌入, 进而可扩展为 $L^2(\Gamma_q(H), \tau_q)$ 到 $F_q(H)$ 上的等距同构. 例行计算得

$$\Phi(\psi_I) = \psi_I \Omega = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

再由 q-Ornstein–Uhlenbeck 半群 $U_t^{(q)} = \mathrm{e}^{-tN^q}$ 的构造, 有 $U_t^{(q)} \psi_I = \mathrm{e}^{-tn} \psi_I$, 从而 $N^q \psi_I = n\psi_I$, 表明 $\psi_I \in D(\epsilon)$. 记 $\widetilde{\Gamma_q(H)}$ 为 ψ_I, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$ 中任意有限元线性组合形成的集. 于是 $\widetilde{\Gamma_q(H)} \subset D(\epsilon)$. 另一方面, 因 $\widetilde{\Gamma_q(H)}$ 在 $\Gamma_q(H)$ 中关于算子范数稠, 故 $A \cap D(\epsilon) (\supset \widetilde{\Gamma_q(H)})$ 在 $\Gamma_q(H)$ 中关于算子范数也稠. 因此, Dirichlet 型 $\epsilon[\,,\,]$ 是正则的.

最后证明 $\epsilon[|J(x)|] = \epsilon[|x|]$, $\forall x \in D(\epsilon)$, 只需验证

$$\epsilon[|(\psi_I)^*|] = \epsilon[|\psi_I|], \quad \forall \psi_I = \psi(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) \in \Gamma_q(H) \cap D(\epsilon).$$

事实上, 因

$$\langle \psi_I \Omega, \psi_I \Omega \rangle_q = \tau_q((\psi_I)^* \psi_I) = \tau_q(\psi_I (\psi_I)^*) = \langle (\psi_I)^* \Omega, (\psi_I)^* \Omega \rangle_q,$$

故存在酉算子

$$U : L^2(\Gamma_q(H), \tau_q) \to L^2(\Gamma_q(H), \tau_q),$$

使得 $U|\psi_I| = |(\psi_I)^*|$, 在此把 ψ_I 与 $\psi_I \Omega$ 等同起来. 进一步, 再由 $N^q U = U N^q$, 故

$$\begin{aligned} \epsilon[|(\psi_I)^*|] &= \langle |(\psi_I)^*|, N^q |(\psi_I)^*| \rangle_q = \langle U|\psi_I|, N^q (U|\psi_I|) \rangle_q \\ &= \langle U|\psi_I|, U N^q (|\psi_I|) \rangle_q = \langle |\psi_I|, N^q (|\psi_I|) \rangle_q = \epsilon[|\psi_I|]. \end{aligned}$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Albeverio S., Høegh-Krohn R., Dirichlet forms and Markov semigroups on C^*-algebras, *Comm. Math. Phys.*, 1975, **77**: 91–102.

[2] Ben-Aroya A., Regev O., de Wolf R., A hypercontractive inequality for matrix-valued functions with applications to quantum computing and LDC, *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (*FOCS*), 2008: 477–486.

[3] Biane P., Free hypercontractivity, *Comm. Math. Phys.*, 1997, **184**: 457–474.

[4] Bożejko M., Kümmerer B., Speicher R., q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects, *Comm. Math. Phys.*, 1997, **185**: 129–154.

[5] Bożejko M., Speicher R., An example of a generalized Brownian motion, *Comm. Math. Phys.*, 1991, **137**: 519–531.

[6] Bożejko M., Speicher R., Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces, *Math. Ann.*, 1994, **300**: 97–120.

[7] Carlen E. A., Lieb E. H., Optimal hypercontractivity for Fermi fields and related noncommutative integration inequalities, *Comm. Math. Phys.*, 1993, **155**: 27–46.

[8] Carbone R., Sasso E., Hypercontractivity for a quantum Ornstein–Uhlenbeck semigroup, *J. Funct. Anal., Probab. Theory Relat. Fields*, 2008, **140**: 505–522.

[9] Cipriani F., Dirichlet forms and Markovian semigroups on standard forms of von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.*, 1997, **147**: 259–300.

[10] Davies E. B., Lindsay J. M., Non-commutative symmetric Markov semigroups, *Math. Z.*, 1992, **210**: 379–411.

[11] Franz U., Hong G. X., Ulrich F. M., Zhang H. N., Hypercontractivity of heat semigroups on free quantum groups, *J. Operator Theory*, 2002, **55**(3): 520–530.

[12] Fuglede B., Kadison R. V., Determinant theory in finite factors, *Ann. of Math.*, 2017, **77**(1): 61–76.

[13] Gross L., Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, 1975, **97**: 1061–1083.

[14] Gross L., Hypercontractivity and logarithmic Sobolev inequalities for the Clifford Dirichlet form, *Duke Math. J.*, 1975, **43**: 383–396.

[15] Junge M., Palazuelos C., Parcbt J., et al., Hypercontractivity for free products, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 2015, **48**(4): 861–889.

[16] Kosaki H., Applications of uniform convexity of noncommutative L^p spaces, *Trans. of the AMS.*, 1984, **283**(1): 265–282.

[17] Nelson E., A quartic interaction in two dimensions, Mathematical Theory of Elementary Particles, M.I.T. Press, 1965: 67–73.

[18] Nielsen M., Chuang L., Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

[19] Ricard E., Xu Q. H., A noncommutative martingale convexity inequality, *Annals of Probability*, 2016, **44**(2): 867–882.

[20] Zhang L. C., Guo M. Z., The characterization of a class of quantum Markov semigroups and the associated operator-valued Dirichlet forms based on Hilbert C^*-module $l_2(A)$, *Science China Mathematics*, 2014, **57**(2): 377–387.