第63卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.63, No.2
2020年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)02-0097-08 **文献标识码: A**

离散时间 Markov 链几何非常返与代数非常返的判别准则

宋延红

中南财经政法大学统计与数学学院 武汉 430073
E-mail: songyh@zuel.edu.cn

摘 要 本文研究可数状态空间离散时间 Markov 链的几何非常返和代数非常返, 利用某状态末离时的矩条件和某方程解的存在性, 给出两种非常返性的判别准则. 进一步, 我们将所得结果应用于研究 Geom/G/1 排队模型的随机稳定性.

关键词 几何非常返; 代数非常返; 末离时; 最小非负解; Geom/G/1 排队模型
MR(2010) 主题分类 60J10, 60J35
中图分类 O211.62

Criteria for Geometric and Algebraic Transience for Discrete-time Markov Chains

Yan Hong SONG

School of Statistics and Mathematics,
Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan 430073*, P. R. China*
E-mail: *songyh@zuel.edu.cn*

Abstract We study geometric and algebraic transience for discrete-time Markov chains on countable state spaces. Criteria are presented based on the moment of the last exit time for some state and the existence of solution for some equation. Moreover, we apply the results to investigating the stochastic stability of Geom/G/1 queueing models.

Keywords geometric transience; algebraic transience; last exit time; the minimal non-negative solution; Geom/G/1 queueing model
MR(2010) Subject Classification 60J10, 60J35
Chinese Library Classification O211.62

1 引言

Markov 链的随机稳定性具有重要的理论价值和广泛的应用前景, 是概率论中的研究热点. 一般来说, 随机稳定性包括常返性和非常返性, 常见的常返性有零常返、遍历、次几何遍历、几

收稿日期: 2019-03-12; 接受日期: 2019-09-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501576); 中南财经政法大学研究生教育创新计划项目 (201821301)

何遍历及一致遍历 (又称为强遍历). 在过去几十年里, 各种常返性的判别准则的研究结果已经相当丰富, 可见 [1, 4, 5, 13, 16] 及其参考文献. 相对而言, 人们对非常返的深入研究较少, 且主要工作都是针对具体过程展开的 [3, 6, 7, 10, 14]. 在文 [15] 中, 作者系统研究了一般状态空间离散时间 Markov 链的四种非常返性: 代数非常返、几何非常返、强几何非常返和一致几何非常返. 通过建立某集合首次回返时的矩条件和恰当的 drift 条件, 给出了这四种非常返性的判定. 本文在文 [15] 的基础上, 利用某状态末离时的矩条件和某方程解的存在性, 进一步研究几何非常返和代数非常返的判别准则.

设 $\Phi=\{\Phi_n: n\in\mathbb{Z}_+\}$ 为可数状态空间 E 上的时间齐次不可约 Markov 链, 令 $p_{ij}=\mathbb{P}\{\Phi_1=j\,|\,\Phi_0=i\}$, $i,j\in E$ 为其一步转移概率. 由马氏性知, Markov 链 Φ 的 n 步转移概率为

$$p_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}\{\Phi_n=j\,|\,\Phi_0=i\}.$$

取 $i\in E$, 状态 i 的首次回返时和末离时分别定义为

$$\tau_i=\inf\{n\geq 1:\Phi_n=i\},\quad L_i=\sup\{n\geq 0:\Phi_n=i\}.$$

显然, 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\{\theta^n\tau_i<\infty\}=\{L_i>n\},\tag{1.1}$$

其中 θ^n 为平移算子. 记 $\mathbb{P}_i$ 和 $\mathbb{E}_i$ 分别为 $\mathbb{P}\{\cdot\,|\,\Phi_0=i\}$ 和 $\mathbb{E}\{\cdot\,|\,\Phi_0=i\}$ 的简写. 令 $f_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}_i\{\tau_j=n\}$, $\ell_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}_i\{L_j=n\}$ 分别为 τ_j 和 L_j 的分布, 并定义

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}_i\{\tau_j<\infty\},\quad \ell_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}\ell_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}_i\{L_j<\infty\},$$

其中 f_{ij} 表示自 i 出发、经过有限多步终于回到 j 的概率, ℓ_{ij} 表示自 i 出发、经过有限多步最后到达 j 的概率.

定义 1.1 (文 [15, 定义 2.1 和引理 2.4]) 称 Markov 链 Φ 为几何非常返, 若对某个 (从而任意) $i\in E$, 存在常数 $\lambda>1$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n p_{ii}^{(n)}<\infty.\tag{1.2}$$

若 (1.2) 式中的 $\lambda=1$, 则 Markov 链 Φ 称为非常返 (见文 [16, 第八章]). 显然, 几何非常返的 Markov 链必为非常返.

定理 1.2 假设 Φ 为可数状态空间 E 上的离散时间不可约 Markov 链, 且 $0\in E$, 则下述断言等价:

(1) Markov 链 Φ 为几何非常返;

(2) 存在常数 $\lambda>1$, 使得 $\mathbb{E}_0[\lambda^{L_0}]<\infty$;

(3) 方程

$$\sum_k p_{ik}x_k=x_i,\quad i\neq 0\tag{1.3}$$

有非常数的有界解, 且存在常数 $\rho<1$, 使得不等式

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_k p_{ik}y_k\leq \rho y_i-p_{i0}\ell_{00}^{(0)}, & i\neq 0,\\ \displaystyle\sum_k p_{0k}y_k<\infty\end{cases}\tag{1.4}$$

有有限非负解.

对于代数非常返, 也可以由某状态末离时的矩条件和某方程解的存在性, 给出其判别准则.

定义 1.3 (文 [15, 定义 3.1 和引理 2.4]) 给定 $\ell \in \mathbb{Z}_+$. 称 Markov 链 Φ 为 ℓ 非常返 (或代数非常返), 若对某个 (从而任意) $i \in E$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

定理 1.4 给定整数 $\ell \geq 1$. 假设 Φ 为可数状态空间 E 上的离散时间不可约 Markov 链, 且 $0 \in E$, 则下述断言等价:

(1) Markov 链 Φ 为代数非常返;

(2) $\mathbb{E}_0[L_0^{\ell}] < \infty$;

(3) 方程 (1.3) 有非常数的有界解, 且不等式

$$\begin{cases} \sum_k p_{ik} y_k \leq y_i - \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell-1} \ell_{i0}^{(n)}, \quad i \neq 0, \\ \sum_k p_{0k} y_k < \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

有有限非负解.

本文第 2 节将证明几何非常返的判别准则, 即证明定理 1.2; 定理 1.4 的证明将在第 3 节中给出; 在第 4 节中, 我们将主要结果应用于 Geom/G/1 排队模型.

2 几何非常返

非常返的判别准则为证明定理 1.2 和 1.4 提供了帮助, 故我们首先回顾如下性质.

性质 2.1 假设 Φ 为可数状态空间 E 上的离散时间不可约 Markov 链, 且 $0 \in E$, 则下述断言等价:

(1) Markov 链 Φ 为非常返;

(2) 对任意的 $i \in E$, $f_{ii} < 1$;

(3) 对任意的 $i \in E$, $\ell_{ii}^{(0)} > 0$;

(4) 对任意的 $i \in E$, $\ell_{ii} = 1$;

(5) 方程 (1.3) 有非常数的有界解.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Leftrightarrow$ (4) 和 (1) $\Leftrightarrow$ (5) 分别参见文 [11, 第 2 章定理 5.1], [8, 性质 2.2] 和 [11, 第 3 章定理 4.1]. 当 (1.1) 式中的 $n = 0$ 时, 可推得 $f_{ii} = 1 - \ell_{ii}^{(0)}$, 故 (2) $\Leftrightarrow$ (3) 成立. 证毕.

为研究几何非常返所对应的方程解, 需要利用有名的最小非负解理论, 该方法是研究 Markov 链随机稳定性的重要工具, 可参考 [4, 第 2 章] 或 [9, 第 6 章].

引理 2.2 固定 $j \in E$ 和 $\lambda > 0$, 则 $\left\{\mathbb{E}_i[\lambda^{L_j} 1_{\{0<L_j<\infty\}}] : i \in E\right\}$ 是方程

$$x_i = \lambda \sum_k p_{ik} x_k + \lambda p_{ij} \ell_{jj}^{(0)}, \quad i \in E \tag{2.1}$$

的最小非负解.

证明 根据最小非负解理论的第二迭代法, 令 $x_i^{(1)} = \lambda p_{ij} \ell_{jj}^{(0)}$, $x_i^{(n+1)} = \lambda \sum_k p_{ik} x_k^{(n)}$, $n \geq 1$, $i \in E$. 由马氏性知

$$\begin{aligned} \ell_{ij}^{(1)} &= \mathbb{P}_i\{L_j = 1\} = \mathbb{P}\{\Phi_1 = j, \Phi_m \neq j, m \geq 2 \,|\, \Phi_0 = i\} \\ &= \mathbb{P}\{\Phi_1 = j \,|\, \Phi_0 = i\} \mathbb{P}\{\Phi_m \neq j, m \geq 2 \,|\, \Phi_1 = j\} = p_{ij} \ell_{jj}^{(0)}, \end{aligned}$$

故 $x_i^{(1)}=\lambda\ell_{ij}^{(1)}$. 假设 $x_i^{(n)}=\lambda^n\ell_{ij}^{(n)}$. 注意到

$$\begin{aligned}\ell_{ij}^{(n+1)}&=\mathbb{P}_i\{L_j=n+1\}\\&=\sum_k\mathbb{P}\{\Phi_1=k,L_j=n+1\,|\,\Phi_0=i\}\\&=\sum_k\mathbb{P}\{\Phi_1=k\,|\,\Phi_0=i\}\mathbb{P}\{L_j=n+1\,|\,\Phi_1=k\}\\&=\sum_k p_{ik}\ell_{kj}^{(n)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

故而 $x_i^{(n+1)}=\lambda^{n+1}\sum_k p_{ik}\ell_{kj}^{(n)}=\lambda^{n+1}\ell_{ij}^{(n+1)}$, 即由数学归纳法知, 对任意的 $n\geq1$, $x_i^{(n)}=\lambda^n\ell_{ij}^{(n)}$. 因此

$$x_i^*=\sum_{n=1}^{\infty}x_i^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\ell_{ij}^{(n)}=\mathbb{E}_i[\lambda^{L_j}1_{\{0<L_j<\infty\}}]$$

为方程 (2.1) 的最小非负解. 证毕.

注 2.3 由引理 2.2 及 Markov 链的不可约性可知, 若存在 $i\in E$ 和 $\lambda>0$, 使得

$$\mathbb{E}_i[\lambda^{L_i}1_{\{0<L_i<\infty\}}]<\infty,$$

则对任意的 $i,j\in E$, $\mathbb{E}_i[\lambda^{L_j}1_{\{0<L_j<\infty\}}]<\infty$.

定理 1.2 的证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由马氏性注意到对任意的 $n\geq1$,

$$\begin{aligned}\ell_{00}^{(n)}&=\mathbb{P}_0\{L_0=n\}\\&=\mathbb{P}\{\Phi_n=0,\Phi_m\neq0,m\geq n+1\,|\,\Phi_0=0\}\\&=\mathbb{P}\{\Phi_n=0\,|\,\Phi_0=0\}\mathbb{P}\{\Phi_m\neq0,\,m\geq n+1\,|\,\Phi_n=0\}\\&=p_{00}^{(n)}\ell_{00}^{(0)},\end{aligned}\tag{2.3}$$

对上式左右两边同乘 λ^n, 并关于 n 求和可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\ell_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n p_{00}^{(n)}\ell_{00}^{(0)},\quad \lambda>0.\tag{2.4}$$

由于 Markov 链几何非常返, 由性质 2.1 (4) 知 $\mathbb{P}_0\{L_0<\infty\}=1$, 故存在常数 $\lambda>1$, 使得

$$\mathbb{E}_0[\lambda^{L_0}]=\mathbb{E}_0[\lambda^{L_0}1_{\{L_0<\infty\}}]=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\ell_{00}^{(n)}+\ell_{00}^{(0)}=\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n p_{00}^{(n)}+1\bigg)\ell_{00}^{(0)}<\infty.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 由定义 1.1 和 (2.4) 式知, 只需证明 $\ell_{00}^{(0)}>0$ 即可. 由于 $\mathbb{E}_0[\lambda^{L_0}]<\infty$, 故 $\mathbb{P}_0\{L_0<\infty\}=1$. 由性质 2.1 (3) 知, $\ell_{00}^{(0)}>0$ 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 若 (2) 成立, 则显然 Markov 链非常返, 根据性质 2.1 (5), 方程 (1.3) 有非常数的有界解. 令 $y_i=\mathbb{E}_i[\lambda^{L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]$, $i\in E$, 由注 2.3 和引理 2.2 知 $\{y_i:i\in E\}$ 是不等式 (1.4) 的有限非负解, 其中常数 $\rho=\lambda^{-1}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) 由于方程 (1.3) 有非常数的有界解, 故由性质 2.1 (4) 知 $\mathbb{P}_0\{L_0<\infty\}=1$. 因此, 只需证明存在常数 $\lambda>1$, 使得 $\mathbb{E}_0[\lambda^{L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]<\infty$ 即可.

一方面, 设 $\{y_i:i\in E\}$ 是不等式 (1.4) 的有限非负解, 则

$$y_i\geq\rho^{-1}\sum_k p_{ik}y_k+\rho^{-1}p_{i0}\ell_{00}^{(0)},\quad i\neq0.$$

根据引理 2.2, $\mathbb{E}_i[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]$ 是方程

$$y_i=\rho^{-1}\sum_k p_{ik}y_k+\rho^{-1}p_{i0}\ell_{00}^{(0)},\quad i\neq 0$$

的最小非负解, 故由最小非负解理论的比较定理 (参考文 [4, 定理 2.1]), 得

$$\mathbb{E}_i[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]\leq y_i,\quad i\neq 0. \tag{2.5}$$

另一方面, 由引理 2.2 知 $\mathbb{E}_0[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]=\rho^{-1}\sum_k p_{0k}\mathbb{E}_k[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]+\rho^{-1}p_{00}\ell_{00}^{(0)}$, 故而化简有

$$\mathbb{E}_0[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]=(1-\rho^{-1}p_{00})^{-1}\bigg(\rho^{-1}\sum_{k\neq 0}p_{0k}\mathbb{E}_k[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]+\rho^{-1}p_{00}\ell_{00}^{(0)}\bigg).$$

注意到 $\rho^{-1}p_{00}<1$, 并结合上式以及 (2.5) 和 (1.4), 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[\rho^{-L_0}1_{\{0<L_0<\infty\}}]&\leq(1-\rho^{-1}p_{00})^{-1}\bigg(\rho^{-1}\sum_{k\neq 0}p_{0k}y_k+\rho^{-1}p_{00}\ell_{00}^{(0)}\bigg)\\&\leq(1-\rho^{-1}p_{00})^{-1}\bigg(\rho^{-1}\sum_k p_{0k}y_k+\rho^{-1}p_{00}\ell_{00}^{(0)}\bigg)<\infty.\end{aligned}$$

于是, 所需结论得证.

3 代数非常返

本节的主要目的是证明定理 1.4, 为此我们需要研究另外一个方程的最小非负解. 给定整数 $\ell\geq 1$, 令 $\alpha_n^{(\ell)}=1+2^{\ell-1}+\cdots+n^{\ell-1}$. 众所周知 $n^\ell/\ell\leq\alpha_n^{(\ell)}\leq(n+1)^\ell/\ell$, 故对任意的 $i,j\in E$,

$$\sum_{n=1}^\infty\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n)}\sim\sum_{n=1}^\infty n^\ell\ell_{ij}^{(n)}=\mathbb{E}_i[L_j^\ell 1_{\{0<L_j<\infty\}}]. \tag{3.1}$$

引理 3.1 固定 $j\in E$ 和整数 $\ell\geq 1$, 则 $\big\{\sum_{n=1}^\infty\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n)}:i\in E\big\}$ 是方程

$$x_i=\sum_k p_{ik}x_k+\sum_{n=1}^\infty n^{\ell-1}\ell_{ij}^{(n)},\quad i\in E \tag{3.2}$$

的最小非负解.

证明 由最小非负解理论的第二迭代法, 令 $x_i^{(1)}=\ell_{ij}^{(1)}$, $x_i^{(n+1)}=\sum_k p_{ik}x_k^{(n)}+(n+1)^{\ell-1}\ell_{ij}^{(n+1)}$, $n\geq 1$, $i\in E$. 假设 $x_i^{(n)}=\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n)}$, 则根据 (2.2) 有

$$\begin{aligned}x_i^{(n+1)}&=\alpha_n^{(\ell)}\sum_k p_{ik}\ell_{kj}^{(n)}+(n+1)^{\ell-1}\ell_{ij}^{(n+1)}\\&=\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n+1)}+(n+1)^{\ell-1}\ell_{ij}^{(n+1)}=\alpha_{n+1}^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n+1)},\end{aligned}$$

故由数学归纳法知, $x_i^{(n)}=\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n)}$ 对任意的 $n\geq 1$ 成立. 因此

$$x_i^*=\sum_{n=1}^\infty x_i^{(n)}=\sum_{n=1}^\infty\alpha_n^{(\ell)}\ell_{ij}^{(n)}$$

为方程 (3.2) 的最小非负解. 证毕.

注 3.2 固定整数 $\ell\geq 1$, 由引理 3.1, (3.1) 式和 Markov 链的不可约性知, 若存在 $i\in E$, 使得 $\mathbb{E}_i[L_i^\ell 1_{\{0<L_i<\infty\}}]<\infty$, 则对任意的 $i,j\in E$, $\mathbb{E}_i[L_j^\ell 1_{\{0<L_j<\infty\}}]<\infty$.

定理 1.4 的证明 固定整数 $\ell \geq 1$, 由 (2.3) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell} \ell_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell} p_{00}^{(n)} \ell_{00}^{(0)},$$

故采用与定理 1.2 类似的证明知 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然方程 (1.3) 有非常数的有界解. 另外, 令 $y_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\ell)} \ell_{i0}^{(n)}$, $i \in E$, 由注 3.2, (3.1) 式和引理 3.1 知, $\{y_i : i \in E\}$ 是不等式 (1.5) 的有限非负解.

(3) $\Rightarrow$ (2) 类似于定理 1.2, 只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\ell)} \ell_{00}^{(n)} < \infty$ 即可.

一方面, 设 $\{y_i : i \in E\}$ 是不等式 (1.5) 的有限非负解, 则当 $i \neq 0$ 时, $y_i \geq \sum_k p_{ik} y_k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell-1} \ell_{i0}^{(n)}$. 由引理 3.1 知, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\ell)} \ell_{i0}^{(n)}$ 是方程

$$y_i = \sum_k p_{ik} y_k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell-1} \ell_{i0}^{(n)}$$

的最小非负解, 故由最小非负解理论的比较定理得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\ell)} \ell_{i0}^{(n)} \leq y_i, \quad i \neq 0.$$

因此, 对任意的整数 $1 \leq m \leq \ell$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \ell_{i0}^{(n)} \leq y_i, \quad i \neq 0. \tag{3.3}$$

另一方面, 先证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{00}^{(n)} < \infty$. 事实上, 根据引理 3.1,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{00}^{(n)} &= \sum_k p_{0k} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{k0}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} \\ &= p_{00} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{00}^{(n)} + \sum_{k \neq 0} p_{0k} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{k0}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

若 $p_{00} = 1$, 则

$$\sum_{k \neq 0} p_{0k} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{k0}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} = 0,$$

此与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} \geq \ell_{00}^{(1)} = p_{00} \ell_{00}^{(0)} = \ell_{00}^{(0)} > 0$$

矛盾, 故 $p_{00} < 1$. 于是, 结合 (3.4), (3.3) 和 (1.5) 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{00}^{(n)} &= (1 - p_{00})^{-1} \left(\sum_{k \neq 0} p_{0k} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell_{k0}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} \right) \\ &\leq (1 - p_{00})^{-1} \left(\sum_{k \neq 0} p_{0k} y_k + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} \right) \\ &\leq (1 - p_{00})^{-1} \left(\sum_k p_{0k} y_k + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{00}^{(n)} \right) < \infty. \end{aligned}$$

再假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell-1)}\ell_{00}^{(n)}<\infty$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ell-1}\ell_{00}^{(n)}<\infty$, 则同理有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell)}\ell_{00}^{(n)}&=(1-p_{00})^{-1}\left(\sum_{k\neq 0}p_{0k}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell)}\ell_{k0}^{(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ell-1}\ell_{00}^{(n)}\right)\\&\le(1-p_{00})^{-1}\left(\sum_{k}p_{0k}y_k+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ell-1}\ell_{00}^{(n)}\right)<\infty.\end{aligned}$$

于是, 所需结论得证.

4 Geom/G/1 排队模型

Geom/G/1 排队模型是典型的离散时间 Markov 链, 它表示到达为 Bernoulli 过程 (到达时间间隔服从几何分布的过程), 服务时间服从一般分布的单服务台离散时间排队系统, 详细介绍可参考文 [2, 11, 12] 等. 在本节中, 我们将研究 Geom/G/1 排队模型的随机稳定性, 为此我们首先引入如下引理, 它表明了某状态末离时的几何阶矩与首次回返时的几何阶矩之间的关系.

引理 4.1 固定 $i\in E$ 和 $\lambda>0$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n f_{ii}^{(n)}<1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)}\le\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n f_{ii}^{(n)}\right)^{-1}\ell_{ii}^{(0)}.$$

证明 依照首次进入状态 i 的时刻进行分解, 并由马氏性可得, 对任意的 $n\ge 1$,

$$\begin{aligned}\ell_{ii}^{(n)}&=\mathbb{P}_i\{L_i=n\}\\&=\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}_i\{\tau_i=m,\,L_i=n\}=\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}_i\{\tau_i=m\}\mathbb{P}_i\{L_i=n\,|\,\tau_i=m\}\\&=\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}_i\{\tau_i=m\}\cdot\mathbb{P}\{L_i=n\,|\,\Phi_0=i,\,\Phi_v\neq i,\,1\le v<m,\,\Phi_m=i\}\\&=\sum_{m=1}^{n}f_{ii}^{(m)}\mathbb{P}\{L_i=n\,|\,\Phi_m=i\}=\sum_{m=1}^{n}f_{ii}^{(m)}\ell_{ii}^{(n-m)}.\end{aligned}$$

固定整数 $N\ge 1$, 在上式左右两边同乘 λ^n, 并关于 n 求和可得

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\lambda^m f_{ii}^{(m)}\lambda^{n-m}\ell_{ii}^{(n-m)}=\sum_{m=1}^{N}\lambda^m f_{ii}^{(m)}\sum_{n=0}^{N-m}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)},$$

故

$$\sum_{n=0}^{N}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)}-\ell_{ii}^{(0)}\le\sum_{m=1}^{N}\lambda^m f_{ii}^{(m)}\sum_{n=0}^{N}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)}.$$

化简得

$$\sum_{n=0}^{N}\lambda^n\ell_{ii}^{(n)}\le\left(1-\sum_{m=1}^{N}\lambda^m f_{ii}^{(m)}\right)^{-1}\ell_{ii}^{(0)},$$

上式左右两边同时关于 $N\to\infty$ 取极限便得到所需结论. 证毕.

例 4.2 (Geom/G/1 排队模型) 设 Markov 链 Φ 的一步转移概率为

$$p_{ij}=a_{j-(i-1)^+},\quad i,j\in\mathbb{Z}_+,\quad 其中\ a_n=\begin{cases}pq^n, & n\ge 0,\\0, & n<0,\end{cases}$$

$p \in (0, 1/2)$, $q = 1 - p$, 则 Markov 链为几何非常返.

证明 注意到 $0 < a_0 < 1$ 且 $a_0 + a_1 < 1$, 故显然 Markov 链不可约. 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = p \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = q/p > 1,$$

由文 [11, 第 3 章第 5 节] 知, Markov 链非常返, 故对任意的 $i \in E$, $\mathbb{P}_i\{L_i < \infty\} = 1$. 于是, 结合定理 1.2 和引理 4.1 知, 只需证明存在常数 $\lambda > 1$, 使得

$$F_{ii}(\lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n f_{ii}^{(n)} < 1.$$

根据文 [11, 第 3 章第 5 节], $F_{ii}(\lambda)$ 满足方程

$$F_{ii}(\lambda) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_{ii}(\lambda),$$

解得

$$F_{ii}(\lambda) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\lambda}}{2q}.$$

显然, 对任意的 $1 < \lambda \le 1/(4pq)$, $F_{ii}(\lambda) \le 1/(2q) < 1$. 证毕.

致谢 感谢毛永华教授的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Anderson W., Continuous-Time Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] Asmussen S., Applied Probability and Queues, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] Aurzada F., Iksanov A., Meiners M., Exponential moments of first passage times and related quantities for Lévy processes, *Math. Nachr.*, 2015, **288**(17–18): 1921–1938.

[4] Chen M. F., From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2004.

[5] Chen M. F., Eigenvalues, Inequalities and Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York, 2005.

[6] Chen M. F., Speed of stability for birth-death processes, *Front. Math. China*, 2010, **5**(3): 379–515.

[7] Chen M. F., Basic estimates of stability rate for one-dimensional diffusions, Chapter 6 in "Probability Approximations and Beyond", *Lecture Notes in Statistics*, 2012, **205**: 75–99.

[8] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, *Séminaire de Probabilités* (*Strasbourg*), 1980, **14**: 397–409.

[9] Hou Z. T., Guo Q. F., Homogeneous Denumerable Markov Processes, Springer-Verlag, New York, 1988.

[10] Iksanov A., Meiners M., Exponential moments of first passage times and related quantities for random walks, *Electron. Commun. Probab.*, 2010, **15**(34): 365–375.

[11] Karlin S., Taylor H. M., A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.

[12] Li J. P., Chen A. Y., Decay property of stopped Markovian bulk-arriving queues, *Adv. Appl. Prob.*, 2008, **40**(1): 95–121.

[13] Mao Y. H., Algebraic convergence for discrete-time ergodic Markov chains, *Sci. China Ser. A*, 2003, **46**(5): 621–630.

[14] Mao Y. H., Song Y. H., Spectral gap and convergence rate for discrete-time Markov chains, *Acta Math. Sinica, Engl. Ser.*, 2013, **29**(10): 1949–1962.

[15] Mao Y. H., Song Y. H., On geometric and algebraic transience for discrete-time Markov chains, *Stoch. Proc. Appl.*, 2014, **124**(4): 1648–1678.

[16] Meyn S. P., Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, Springer-Verlag, London, 1993.