第63卷第1期 数学学报中文版 Vol.63, No.1
2020年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2020

**文章编号:** 0583-1431(2020)01-0089-08 **文献标识码: A**

# 次分数布朗运动局部时的研究

栾娜娜

对外经济贸易大学保险经济学院 北京 100029
E-mail: luannana@uibe.edu.cn

**摘　要**　设 $X^H=\{X^H(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动. 本文给出了 $X^H$ 在单参数情况下局部时的 Hölder 条件和尾概率估计. 同时, 还给出了 $X^H$ 在多参数情况下局部时的存在性及 $L^2$ 表示.

**关键词**　次分数布朗运动; 次分数布朗单; 强局部非确定性; 局部时
**MR(2010) 主题分类**　60G15, 60G17
**中图分类**　O177.2

**On the Local Time of Subfractional Brownian Motion**

Na Na LUAN

*School of Insurance and Economics,*
*University of International Business and Economics, Beijing* 100029*, P. R. China*
*E-mail*: *luannana@uibe.edu.cn*

**Abstract**　Let $X^H=\{X^H(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ be a subfractional Brownian motion in $\mathbb{R}^d$. We establish sharp Hölder conditions and tail probability estimates for the local times of $X^H$ in one-parameter case. We also give the existence and the $L^2$-representation for the local time of $X^H$ in multi-parameter case.

**Keywords**　subfractional Brownian motion; subfractional Brownian sheet; strong local nondeterminism; local time
**MR(2010) Subject Classification**　60G15, 60G17
**Chinese Library Classification**　O177.2

## 1 引言

在过去的几十年里, 分数布朗运动在概率论中已经获得了广泛的研究, 并被应用于许多科学领域, 比如物理学、工程学、生物学、经济学和金融学等. 这一过程是由文 [14] 首次引进, 随后文 [16] 做了进一步的研究. 自相似性和平稳增量性是分数布朗运动的两个主要性质, 这两个性质使其在建模中发挥着重要的作用. 由文 [19] 可知, 分数布朗运动是唯一有平稳增量性的自相似高斯过程. 因此, 基于现实考虑, 很多学者提出用更一般的自相似高斯过程和随机场作为随机模

收稿日期: 2018-02-07; 接受日期: 2019-09-04
基金项目: 国家自然科学基金 (11671041); 对外经济贸易大学中央高校基本科研业务费专项资金资助 (18YB21)

型, 如文 [1, 3, 4, 8, 9, 17]. 然而, 与分数布朗运动的广泛研究相比, 关于一般自相似高斯过程的系统研究要少很多. 文 [22] 研究了一类重要的自相似高斯过程, 即双分数布朗运动. 他们的主要工具有 Lamperti 变换和高斯过程的强局部非确定性 [25]. 特别地, 对任意的自相似高斯过程 $X=\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$, 由 Lamperti 变换可以导出 $X$ 的随机积分表示.

文 [7] 引进了另外一类重要的自相似高斯过程, 即次分数布朗运动. 次分数布朗运动是布朗运动的一种推广, 并保留了分数布朗运动的很多性质 [7, 10, 21]. 更多的性质研究见文 [20, 27].

**定义 1.1** 设常数 $H\in(0,1)$, $X_0^H(0)=0$, 若 $X_0^H=\{X_0^H(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 是一个中心化的高斯过程, 其协方差满足

$$\mathbb{E}\big(X_0^H(s)X_0^H(t)\big)=s^{2H}+t^{2H}-\frac{1}{2}\big[(s+t)^{2H}+|s-t|^{2H}\big], \tag{1.1}$$

则称 $X_0^H$ 是取值于 $\mathbb{R}$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动.

**定义 1.2** 设 $X_1^H,\ldots,X_d^H$ 与 $X_0^H$ 独立同分布, 令

$$X^H(t)=(X_1^H(t),\ldots,X_d^H(t)),\quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

则称 $X^H=\{X^H(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动.

由 (1.1) 易证, $X^H$ 是指数为 $H$ 的自相似过程, 即对任意的常数 $a>0$,

$$\big\{X^H(at), t\in\mathbb{R}_+\big\}\overset{d}{=}\big\{a^HX^H(t), t\in\mathbb{R}_+\big\}, \tag{1.3}$$

其中 $X\overset{d}{=}Y$ 是指两个随机过程有相同的有限维分布. 注意到 $X^H$ 不再具有平稳增量性.

**定义 1.3** 对任一给定的向量 $H=(H_1,\ldots,H_N)\in(0,1)^N$, 设 $X^H=\{X^H(t), t\in\mathbb{R}_+^N\}$ 是一取值于 $\mathbb{R}^d$ 的中心化的高斯随机场, 若其分量过程独立同分布且协方差满足

$$\mathbb{E}\big(X_1^H(s)X_1^H(t)\big)=\prod_{j=1}^N\bigg\{s_j^{2H_j}+t_j^{2H_j}-\frac{1}{2}\big[(s_j+t_j)^{2H_j}+|s_j-t_j|^{2H_j}\big]\bigg\}, \tag{1.4}$$

则称 $X^H$ 是参数为 $H$ 的 $(N,d)$- 次分数布朗单.

我们研究高斯过程的概率、分析及统计性质的主要难点之一就是其依赖结构的复杂性. 因此, 许多研究布朗运动、马氏过程和鞅的工具无法被推广到高斯过程. 我们必须使用更一般的工具或者建立新的工具来研究高斯过程. 在许多情况下, 局部非确定性可以帮助我们克服这种依赖结构的复杂性, 从而把布朗运动的很多优美和深刻的结论推广到高斯过程. 但局部非确定性也有局限性, 它不足以建立高斯过程一些比较好的轨道性质, 比如重对数率、局部时的连续模. 因此需要更好的工具, 即强局部非确定性. 文 [6] 首次引进了强局部非确定性这一概念, 这一工具在研究高斯过程的其他性质中发挥了重要的作用, 如小球概率、Chung 重对数律、局部时的连续模等.

本文将研究次分数布朗运动在单参数和多单数情况下的局部时问题, 我们采用的主要工具有 Berman 提出的 Fourier 分析方法和高斯过程的强局部非确定性. 文 [23] 研究了一大类非迷向的高斯随机场, 系统地给出了局部时的 Hölder 条件. 在第 2 节中, 定理 2.1 给出了次分数布朗运动局部时的 Hölder 条件, 该结果是文 [23, 定理 3.1 和 3.2] 的一个推论. 此外, 还给出了次分数布朗运动水平集的精确的一致 Hausdorff 维数, 局部时 $L(0,1)$ 的尾概率估计及一个重整化结果. 在第 3 节中, 定理 3.3 给出了 $(N,d)$- 次分数布朗单局部时的存在性和 $L^2$ 表示. 因 $(N,d)$- 次分数布朗单是一类特殊的非迷向的高斯随机场, 其证明相对于文 [23] 要简单明了. 在整篇文章中, $c$ 表示一个不确定的有限正常数, 它的取值可能每次都不同. $c_{i,1},c_{i,2},\ldots$ 表示在第 $i$ 节中出现的确定性有限正常数, 其取值可能依赖于自相似指数 $H$.

文 [15] 证明了次分数布朗运动的强局部非确定性, 这个结果在本文中有着重要的作用.

**命题 1.4** 对任意的常数 $0 < a < b$, $X_0^H$ 在 $I = [a,b]$ 上具有 $\phi$- 强局部非确定性, 其中 $\phi(r) = r^{2H}$, 即存在正常数 $c_{1,1}$ 和 $r_0$, 使得对任意的 $t \in I$ 和任意的 $0 < r \le \min\{|t|, r_0\}$,

$$\mathrm{Var}\big(X_0^H(t)\,|\,X_0^H(s): s \in I,\ r \le |s-t| \le r_0\big) \ge c_{1,1}\phi(r). \tag{1.5}$$

本文还需要下面的结果, 见文 [7].

**引理 1.5** 存在正常数 $c_{1,2}$ 和 $c_{1,3}$, 使得对任意的 $s, t \in \mathbb{R}_+$, 有

$$c_{1,2}|t-s|^{2H} \le \mathbb{E}\big[\big(X_0^H(t) - X_0^H(s)\big)^2\big] \le c_{1,3}|t-s|^{2H}. \tag{1.6}$$

## 2 单参数情况

设 $X^H = \{X^H(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动. 对任意的闭集 $I \subset \mathbb{R}_+$ 和任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, $X^H$ 的局部时定义为占位测度 $\mu_I$ 的密度函数, 其中 $\mu_I$ 为

$$\mu_I(A) = \int_I 1_A(X^H(s))ds, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

由文 [12, 定理 6.4] 知, 对任意的定义在 $I \times \mathbb{R}^d$ 上的 Borel 可测函数 $g(t,x) \ge 0$, 有

$$\int_I g(t, X^H(t))dt = \int_{\mathbb{R}^d}\int_I g(t,x)L(x,dt)dx. \tag{2.2}$$

由引理 1.5 及文 [12, 定理 21.9] 可得: 若 $\frac{1}{H} > d$, 则 $X^H$ 存在局部时 $L(x,t) := L(x,[0,t])$, 其中 $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\infty)$. 事实上, 由文 [25, 定理 3.14] 或 [23, 定理 3.1 和 3.2] 可得更多 $L(x,t)$ 的正则性质, 见下面的定理. 这些正则性质有利于我们研究 $X^H$ 样本轨道的分形性质.

**定理 2.1** 设 $X^H = \{X^H(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动. 若 $\frac{1}{H} > d$, 则下面的性质成立:

(i) $X^H$ 存在局部时 $L(x,t)$ 且 $L(x,t)$ 关于 $(x,t)$ 几乎处处一致连续.

(ii) (局部 Hölder 条件) 对任意的 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 令 $L^*(B) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} L(x,B)$, 则存在一个有限正常数 $c_{2,1}$, 使得对任意的 $t_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$\limsup_{r\to 0}\frac{L^*(B(t_0,r))}{\varphi_1(r)} \le c_{2,1} \quad \text{a.s.}, \tag{2.3}$$

其中 $B(t,r) = (t-r, t+r)$, $\varphi_1(r) = r^{1-Hd}(\log\log\frac{1}{r})^{Hd}$.

(iii) (一致 Hölder 条件) 对任意的有限区间 $I \subseteq \mathbb{R}$, 存在一个有限正常数 $c_{2,2}$, 使得

$$\limsup_{r\to 0}\sup_{t_0\in I}\frac{L^*(B(t_0,r))}{\varphi_2(r)} \le c_{2,2} \quad \text{a.s.}, \tag{2.4}$$

其中 $\varphi_2(r) = r^{1-Hd}(\log\frac{1}{r})^{Hd}$.

**证明** 由命题 1.4 和引理 1.5, 文 [25, 定理 3.14] 或文 [23, 定理 3.1 和 3.2] 的条件均满足, 故定理得证.

由文 [5, 18, 23–25], 我们发现定理 2.1 可以用来决定水平集 $Z_x = \{t \in \mathbb{R}_+ : X^H(t) = x\}$ 的 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度, 其中 $x \in \mathbb{R}^d$. 下面的定理给出了 $X^H$ 水平集的一致的 Hausdorff 维数.

设 $\Phi$ 是函数 $\phi: (0,\delta) \to (0,1)$ 的集合, 其中 $\phi$ 满足右连续、单调递增、$\phi(0_+) = 0$ 且存在一个有限正常数 $c > 0$, 使得当 $0 < s < \frac{\delta}{2}$ 时, 有 $\frac{\phi(2s)}{\phi(s)} \le c$.

**定义 2.2** 设 $\phi \in \Phi$, 称

$$\phi\text{-}m(E) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_i \phi(2r_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i),\, r_i < \epsilon \right\}$$

为集合 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 的 $\phi$-Hausdorff 测度, 其中 $B(x,r)$ 表示中心为 $x$ 半径为 $r$ 的开球. 若 $0 < \phi\text{-}m(E) < \infty$, 则称 $\phi$ 为 $E$ 的精确的 Hausdorff 测度函数.

**定义 2.3** 称 $\dim E = \inf\{\alpha > 0 : s^{\alpha}\text{-}m(E) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 : s^{\alpha}\text{-}m(E) = \infty\}$ 为 $E$ 的 Hausdorff 维数.

关于 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数的更多性质, 可参考文 [11].

**定理 2.4** 若 $\frac{1}{H} > d$, 则依概率 1,

$$\dim_H Z_x = 1 - Hd, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.5}$$

其中 $\dim_H$ 表示 Hausdorff 维数.

**证明** 由文 [25, 定理 3.20] 可得, 依概率 1,

$$\dim_{\mathrm{H}} Z_x = 1 - Hd, \quad \forall\, x \in \mathcal{O}, \tag{2.6}$$

其中 $\mathcal{O}$ 是一个随机开集, 其定义为

$$\mathcal{O} = \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q};\, s<t} \big\{ x \in \mathbb{R}^d : L(x, [s,t]) > 0 \big\}. \tag{2.7}$$

因此, 只需证明 $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$ a.s., 即证 $\mathbb{R}^d \subseteq \mathcal{O}$ a.s. 为此, 由 Lamperti 变换, 我们考虑平稳高斯过程 $Y = \{Y(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, 其中 $Y(t) = \mathrm{e}^{-Ht} X^H(\mathrm{e}^t)$.

由文 [15, 命题 2.4] 的证明知, $Y$ 的分量过程是相互独立的且 $Y$ 是 $\phi$- 强局部非确定性, 其中 $\phi(r) = r^{2H}$. 因此, 由文 [25, 定理 3.14] 可知, $Y$ 存在局部时 $L_Y(x,t)$ 且 $L_Y(x,t)$ 关于 $(x,t)$ 几乎处处一致连续, 其中 $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. 同样, 由文 [15, 命题 2.4] 的证明知, $Y$ 满足文 [18, 定理 2] 的条件, 因此可得, 几乎处处对任意的 $y \in \mathbb{R}^d$ 存在一个有限区间 $J \subset \mathbb{R}$, 使得 $L_Y(y, J) > 0$.

另一方面, 由公式 (2.2) 得, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意的有限区间 $I = [a,b] \subset [0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
\mu_I(A) &= \int_A L(x,I)dx = \int_{[a,b]} 1_A\big(X(s)\big)ds \\
&= \int_{[a,b]} 1_A\big(s^H Y(\log s)\big)ds = \int_{[\log a, \log b]} \mathrm{e}^s 1_A\big(\mathrm{e}^{Hs} Y(s)\big)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[\log a, \log b]} \mathrm{e}^s 1_A(\mathrm{e}^{Hs} x) L_Y(x, ds)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[\log a, \log b]} \mathrm{e}^{(1-H)s} 1_A(y) L_Y(\mathrm{e}^{-Hs} y, ds)dy \\
&= \int_A \int_{[\log a, \log b]} \mathrm{e}^{(1-H)s} L_Y(\mathrm{e}^{-Hs} x, ds)dx.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

由此可得, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意的有限区间 $I = [a,b] \subset [0,\infty)$,

$$L(x,I) = \int_{[\log a, \log b]} \mathrm{e}^{(1-H)s} L_Y(\mathrm{e}^{-Hs} x, ds). \tag{2.9}$$

因此, 几乎处处存在一个有限区间 $I$, 使得 $L(0,I) > 0$. 由 $L(x,I)$ 的连续性可得, 几乎处处存在 $\delta > 0$, 使得 $L(y,I) > 0$, 其中 $y \in \mathbb{R}^d$ 且 $|y| \leq \delta$. 由 (2.2), 对任意的 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 可测函数

$f(x)$, 有

$$\int_{[0,t]} f\big(X(s)\big)ds = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{[0,t]} f(x)L(x,dt)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L(x,t)dx. \tag{2.10}$$

由此, 对任意的 $c>0$,

$$\int_{[0,ct]} f\big(X(s)\big)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L(x,ct)dx. \tag{2.11}$$

同时, 由 $X^H$ 的自相似性

$$\begin{aligned}\int_{[0,ct]} f\big(X(s)\big)ds &= c\int_{[0,t]} f\big(X(cu)\big)du = c\int_{[0,t]} f\big(c^H X(u)\big)du \\ &= c\int_{\mathbb{R}^d}\int_{[0,t]} f(c^H x)L(x,dt)dx = c\int_{\mathbb{R}^d} f(c^H x)L(x,t)dx \\ &= c^{1-Hd}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)L(c^{-H}y,t)dy = \int_{\mathbb{R}^d} c^{1-Hd}f(x)L(c^{-H}x,t)dx. \end{aligned}\tag{2.12}$$

由 (2.11) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^{1-Hd}f(x)L(c^{-H}x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L(x,ct)dx. \tag{2.13}$$

由此可得, $c^{-(1-Hd)}L(x,ct)$ 是 $L(c^{-H}x,t)$ 的一个版本. 因此, 几乎处处对任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, 存在有限区间 $J\subset[0,\infty)$, 使得 $L(x,J)>0$. 证毕.

关于局部时 $L(0,1)$ 准确分布的结果比较少, 因此研究它的尾概率 $\mathbb{P}\{L(0,1)>x\}$ (当 $x\to\infty$) 是一件有意义的事情. 文 [13] 研究了分数布朗运动的情况, 文 [25] 研究了一大类高斯过程的情况. 下面的结果给出次分数布朗运动尾概率的估计, 该结果是文 [25, 定理 3.20] 的一个推论.

**定理 2.5** 令 $X^H=\{X^H(t),\, t\in\mathbb{R}\}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 参数为 $H$ 的次分数布朗运动. 若 $\frac{1}{H}>d$, 则对于充分大的 $x>0$,

$$-\log\mathbb{P}\{L(0,1)>x\}\asymp x^H, \tag{2.14}$$

其中 $a(x)\asymp b(x)$ 是指当 $x$ 充分大时, $a(x)/b(x)$ 存在正的有限的上下界.

**证明** 由命题 1.4 和引理 1.5 知, 文 [25, 定理 3.22] 的条件均满足, 故 (2.14) 成立.

由局部时一致收敛版本的存在性及自相似性, 可以得到下面重整化结果.

**命题 2.6** 若 $\frac{1}{H}>d$, 则对于任意可积函数 $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$,

$$t^{Hd-1}\int_{[0,t]} F(X^H(u))du \xrightarrow{d} \tilde{F}L(0,1), \quad 当 \quad t\to\infty \text{ 时}, \tag{2.15}$$

其中 $\tilde{F}=\int_{\mathbb{R}^d}F(x)dx$.

**证明** 已知

$$\int_{[0,t]} F\big(X^H(u)\big)du = t\int_{[0,1]} F\big(X^H(tv)\big)dv \overset{d}{=} t\int_{[0,1]} F\big(t^H X^H(v)\big)dv, \tag{2.16}$$

且由公式 (2.2), 有

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]} F\big(X^H(u)\big)du &\overset{d}{=} t\int_{[0,1]} F\big(t^H X^H(v)\big)dv = t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{[0,1]} F(t^H x)L(x,dv)dx \\ &= t\int_{\mathbb{R}^d} F(t^H x)L(x,1)dx = t^{1-Hd}\int_{\mathbb{R}^d} F(y)L(t^{-H}y,1)dy. \end{aligned}\tag{2.17}$$

故

$$t^{Hd-1}\int_{[0,t]}F\big(X^H(u)\big)du\overset{d}{=}\int_{\mathbb{R}^d}F(y)L(t^{-H}y,1)dy. \tag{2.18}$$

因为函数 $y\mapsto L(y,1)$ 几乎处处连续且有界, 由控制收敛定理得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}F(y)L(t^{-H}y,1)dy=\tilde{F}L(0,1)\ \text{ a.s.} \tag{2.19}$$

故 (2.15) 成立. 证毕.

## 3 多参数情况

设 $X^H$ 是参数为 $H$ 的 $(N,d)$- 次分数布朗单. 由 (1.4) 得, 类似于 $(N,d)$- 分数布朗单, $X^H$ 具有算子自相似性, 见文 [2, 26]. $(N,d)$- 分数布朗单具有便利的随机积分表示, 这一点在研究它的性质中发挥了重要的作用; 但 $(N,d)$- 次分数布朗单 $X^H$ 并不具有这种随机积分表示. 尽管如此, 仍可以证明 $X^H$ 具有与分数布朗单类似的样本轨道性质.

首先, 给出下面这个有用的引理.

**引理 3.1** 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在有限正常数 $c_{3,1}$ 和 $c_{3,2}$, 使得对任意的 $s,t\in[\varepsilon,1]^N$,

$$c_{3,1}\sum_{j=1}^N|s_j-t_j|^{2H_j}\le\mathbb{E}\Big[\big(X_1^H(s)-X_1^H(t)\big)^2\Big]\le c_{3,2}\sum_{j=1}^N|s_j-t_j|^{2H_j}, \tag{3.1}$$

且

$$c_{3,1}\sum_{j=1}^N|s_j-t_j|^{2H_j}\le\det\mathrm{Cov}\big(X_1^H(s)X_1^H(t)\big)\le c_{3,2}\sum_{j=1}^N|s_j-t_j|^{2H_j}. \tag{3.2}$$

其中 det Cov 表示协方差矩阵的行列式.

**证明** 易证: 对任意的高斯随机向量 $(Z_1,Z_2)$,

$$\det\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{Var}(Z_1)\mathrm{Var}(Z_2\,|\,Z_1), \tag{3.3}$$

其中 $\mathrm{Var}(Z_1)$ 为 $Z_1$ 的方差, $\mathrm{Var}(Z_2\,|\,Z_1)$ 表示已知 $Z_1$ 的条件下 $Z_2$ 的方差.

由 (3.3) 得, 对任意的 $s,t\in[\varepsilon,1]^N$,

$$\begin{aligned}\det\mathrm{Cov}\big(X_1^H(s),X_1^H(t)\big)&=\mathbb{E}\big[X_1^H(s)^2\big]\mathrm{Var}\big(X_1^H(t)\,|\,X_1^H(s)\big)\\&\le\mathbb{E}\big[X_1^H(s)^2\big]\mathbb{E}\Big[\big(X_1^H(t)-X_1^H(s)\big)^2\Big].\end{aligned} \tag{3.4}$$

因为 $\mathrm{Var}\big(X_1^H(s)\big)$ 存在正的有限的上下界, 因此只需证 (3.1) 式中的上界和 (3.2) 式中的下界.

当 $N=1$ 时, 由引理 1.5, 命题 1.4 和 (3.3) 知 (3.1) 和 (3.2) 均成立. 下面将证明, 若引理对参数 $n$ 成立, 则该引理对参数 $n+1$ 也成立.

首先证 (3.1) 式的上界. 对任意的 $s,t\in[\varepsilon,1]^{n+1}$, 令 $s'=(s_1,\dots,s_n,t_{n+1})$, 则有

$$\mathbb{E}\Big[\big(X_1^H(s)-X_1^H(t)\big)^2\Big]\le2\mathbb{E}\Big[\big(X_1^H(s)-X_1^H(s')\big)^2\Big]+2\mathbb{E}\Big[\big(X_1^H(s')-X_1^H(t)\big)^2\Big]. \tag{3.5}$$

对于 (3.5) 式右边的第一项, 我们注意到当参数 $s_1,\dots,s_n\in[\varepsilon,1]$ 固定时, $X^H$ 是一个以 $s_{n+1}$ 为参数的次分数布朗运动. 因此, 由引理 1.5 得 (3.5) 式右边的第一项被 $c|t_{n+1}-s_{n+1}|^{2H_{n+1}}$ 控制, 其中常数 $c$ 不依赖于 $s_1,\dots,s_n\in[\varepsilon,1]$. 另一方面, 当 $t_{n+1}\in[\varepsilon,1]$ 被固定时, $X^H$ 是一个 $(N,d)$- 次分数布朗单. 因此, 由推论假设知 (3.5) 式右边的第二项被 $c\sum_{j=1}^n|t_j-s_j|^{2H_j}$ 控制. 由此即证 (3.1) 的上界.

假设对任意的参数为 $n$ 的 $X^H$, (3.2) 式的下界成立. 当 $N=n+1$ 时, 计算 $\det \mathrm{Cov}\,(X_1(s), X_1(t))$ 得

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n+1}\left(2-2^{2H_j-1}\right)^2 t_j^{2H_j}s_j^{2H_j}-\prod_{j=1}^{n+1}\left\{s_j^{2H_j}+t_j^{2H_j}-\frac{1}{2}\left[(s_j+t_j)^{2H_j}+|s_j-t_j|^{2H_j}\right]\right\}^2\\
&\quad=\prod_{j=2}^{n+1}\left(2-2^{2H_j-1}\right)^2 t_j^{2H_j}s_j^{2H_j}\times\left(2-2^{2H_1-1}\right)^2 t_1^{2H_1}s_1^{2H_1}\\
&\qquad-\prod_{j=2}^{n+1}\left(2-2^{2H_j-1}\right)^2 t_j^{2H_j}s_j^{2H_j}\times\left\{s_1^{2H_1}+t_1^{2H_1}-\frac{1}{2}\left[(s_1+t_1)^{2H_1}+|s_1-t_1|^{2H_1}\right]\right\}^2\\
&\qquad+\left\{s_1^{2H_1}+t_1^{2H_1}-\frac{1}{2}\left[(s_1+t_1)^{2H_1}+|s_1-t_1|^{2H_1}\right]\right\}^2\\
&\qquad\times\prod_{j=2}^{n+1}\left(2-2^{2H_j-1}\right)t_j^{2H_j}s_j^{2H_j}-\left\{s_1^{2H_1}+t_1^{2H_1}-\frac{1}{2}\left[(s_1+t_1)^{2H_1}+|s_1-t_1|^{2H_1}\right]\right\}^2\\
&\qquad\times\prod_{j=2}^{n+1}\left\{s_j^{2H_j}+t_j^{2H_j}-\frac{1}{2}\left[(s_j+t_j)^{2H_j}+|s_j-t_j|^{2H_j}\right]\right\}^2\\
&\quad\geq c|s_1-t_1|^{2H_1}+c\sum_{j=2}^{n+1}|s_j-t_j|^{2H_j}\geq c\sum_{j=1}^{n+1}|s_j-t_j|^{2H_j}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

故 (3.2) 的下界成立. 证毕.

由引理 3.1 可以证明文 [2, 26] 中关于分数布朗单的许多样本轨道性质对 $X^H$ 也是成立的. 下面的定理 3.2 给出了 $X^H$ 的局部时的存在性.

**定理 3.2**　令 $X^H=\{X^H(t), t\in\mathbb{R}_+^N\}$ 是一个 $(N,d)$- 次分数布朗单, 其参数 $H\in(0,1)^N$. 若 $d<\sum_{j=1}^N\frac{1}{H_j}$, 则对任意的 $N$ 维闭区间 $I\subset(0,\infty)^N$, $X^H$ 存在局部时 $L(x,I)$, $x\in\mathbb{R}^d$. 并且, 该局部时有下面的 $L^2$ 表示:

$$
L(x,I)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,x\rangle}\int_I\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle y,X^H(s)\rangle}dsdy,\quad x\in\mathbb{R}^d.
\tag{3.7}
$$

**证明**　不失一般性, 假设 $I=[\varepsilon,1]^N$, 其中 $\varepsilon>0$. 设 $\lambda_N$ 是 $I$ 上的 Lebesgue 测度. 令 $\mu$ 表示在映射 $t\mapsto X^H(t)$ 下的 $\lambda_N$ 的像测度, 则 $\mu$ 的 Fourier 变换为

$$
\hat{\mu}(\xi)=\int_I\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\xi,X^H(t)\rangle}dt.
\tag{3.8}
$$

由 Fubini 定理和 (3.1) 得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{\mu}(\xi)|^2d\xi&=\int_I\int_I\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\langle\xi,X^H(s)-X^H(t)\rangle}\right)d\xi dsdt\\
&=c\int_I\int_I\frac{1}{\left[\mathbb{E}\left(X_1^H(s)-X_1^H(t)\right)^2\right]^{d/2}}dsdt\\
&\leq c\int_I\int_I\frac{1}{\left[\sum_{j=1}^N|s_j-t_j|^{2H_j}\right]^{d/2}}dsdt.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

由文 [26, 214 页] 可知, 当 $d<\sum_{j=1}^N\frac{1}{H_j}$ 时最后一个积分有限. 因此, $\hat{\mu}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ a.s., 且由 Plancherel 定理可得定理 3.2 成立. 证毕.

**致谢**　感谢密歇根州立大学的肖益民教授和北京师范大学的何辉副教授的悉心指导和鼓励.

# 参 考 文 献


[1] Anh V. V., Angulo J. M., Ruiz-Medina M. D., Possible long-range dependence in fractional random fields, *J. Statist. Plann. Inference*, 1999, **80**(1–2): 95–110.

[2] Ayache A., Xiao Y., Asymptotic growth properties and Hausdorff dimension of fractional Brownian sheets, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2005, **11**: 407–439.

[3] Benassi A., Bertrand P., Cohen S., et al., Identification of the Hurst index of a step fractional Brownian motion, *Stat. Inference Stoch. Process*, 2000, **3**(1–2): 101–111.

[4] Benson D. A., Meerschaert M. M., Baeumer B., Aquifer operator-scaling and the effect on solute mixing and dispersion, *Water Resour. Res.*, 2006, **42**: W01415.

[5] Berman S. M., Gaussian sample functions: Uniform dimension and Hölder conditions nowhere, *Nagoya Math. J.*, 1972, **46**: 63–86.

[6] Berman S. M., Local nondeterminism and local times of Gaussian processes, *Indiana Univ. Math. J.*, 1973, **23**: 69–94.

[7] Bojdecki T., Gorostiza L. G., Talarczyk A., Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times, *Statistics and Probability Letters*, 2004, **69**: 405–419.

[8] Bonami A., Estrade A., Anisotropic analysis of some Gaussian models, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2003, **9**(3): 215–236.

[9] Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M., Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes, *Electron. J. Probab.*, 2003, **8**(3): 14 pp.

[10] Dzhaparidze K., Van Zanten H., A series expansion of fractional Brownian motion, *Probab. Theory Relat. Fields*, 2004, **103**: 39–55.

[11] Falconer K. J., Fractal Geometry–Mathematical Foundations and Applications, Wiley & Sons, 1990.

[12] German D., Horowitz J., Occupation densities, *Ann. Probab*, 1980, **8**: 1–67.

[13] Kasahara Y., Kôno N., Ogawa T., On tail probability of local times of Gaussian processes, *Stochastic Process. Appl.*, 1999, **82**: 15–21.

[14] Kolmogorov A. N., Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS* (*N.S.*), 1940, **26**: 115–118.

[15] Luan N., Chung's law of the iterated logarithm for subfractional Brownian motion, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2017, **6**: 839–850.

[16] Mandelbrot B., van Ness J. W., Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, 1968, **10**(4): 422–437.

[17] Mannersalo P., Norros I., A most probable path approach to queueing systems with general Gaussian input, *Comp. Network*, 2002, **40**(3): 399–412.

[18] Monrad D., Pitt L. D., Local Nondeterminism and Hausdorff Dimension Progress in Probability and Statistics, Seminar on Stochastic Processes, (Cinlar E., Chung K. L., Getoor R. K., ed.), Birkhäuser, Boston, 1986, 163–189.

[19] Samorodnitsky G., Taqqu M. S., Stable non-Gaussian Random Processes, Stochastic Models with Infinite Variance, Stochastic Modeling, Chapman & Hall, New York, 1994.

[20] Shen G., Yan L., Liu J., Power variation of Subfractional Brownian motion and application, *Acta Mathematica Scientia*, 2013, **33**(4): 901–912.

[21] Tudor C. A., Some properties of the sub-fractional Brownian motion, *Stochastics*, 2007, **79**(5): 431–448.

[22] Tudor C. A., Xiao Y., Sample path properties of bifractional Brownian motion, *Bernoulli*, 2007, **13**: 1023–1052.

[23] Wu D., Xiao Y., On local times of anisotropic Gaussian random fields, *Communications on Stochastic Analysis*, 2011, **5**(1): 15–39.

[24] Xiao Y., Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields, *Probab. Theory Related Fields*, 1997, **109**(1): 129–157.

[25] Xiao Y., Strong Local Nondeterminism of Gaussian Random Fields and Its Applications, In: Asymptotic Theory in Probability and Statistics with Applications (T. L. Lai, Q. M. Shao and L. Qian, ed.), Higher Education Press, Beijing, 2007, 136–176.

[26] Xiao Y., Zhang T., Local times of fractional Brownian sheets, *Probab. Theory Relat. Fields*, 2002, **124**: 204–226.

[27] Yan L., Shen G., On the collision local time of sub-fractional Brownian motions, *Statist. Probab. Lett.*, 2010, **80**: 296–308.