第63卷第1期 数学学报中文版 Vol.63, No.1
2020年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2020

**文章编号:** 0583-1431(2020)01-0077-12 **文献标识码: A**

# 相对于子范畴的同伦分解的存在性

马 鑫

甘肃农业大学数量生物学研究中心 兰州 730070
E-mail: maxin263@126.com

杨晓燕

西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070
E-mail: yangxy@nwnu.edu.cn

**摘 要** 本文证明了在相对于子范畴的情形下上有界复形的同伦分解的存在性, 推广了经典的复形的同伦分解, 是使得相对导出范畴具有可操作性的基础. 进一步, 证明了在 $R$- 模范畴和相对于特殊子范畴的情形下, 任意无界复形的同伦分解的存在性. 最后, 建立了同伦范畴和相对导出范畴的 (余) 局部化序列.

**关键词** dg $\mathscr{X}$ 分解; (余) 局部化序列; 相对导出范畴
**MR(2010) 主题分类** 18E10, 18G35, 18G20
**中图分类** O154.2

**The Existence of Homotopy Resolutions Relative to the Subcategory**

Xin MA

*Center for Quantitative Biology, College of Science,*
*Gansu Agricultural University, Lanzhou* 730070*, P. R. China*
*E-mail*: *maxin*263*@*126*.com*

Xiao Yan YANG

*Department of Mathematics, Northwest Normal University,*
*Lanzhou* 730070*, P. R. China*
*E-mail*: *yangxy@nwnu.edu.cn*

**Abstract** Let $\mathscr{X}$ be a subcategory of an abelian category $\mathscr{A}$. We proceed by generalizing the homotopy resolutions of complexes to the relative version, which is important basis making the relative derived category operational. We prove that every bounded above complex has a dg $\mathscr{X}$ resolution. Furthermore, we also show that the existence of resolutions for any unbounded complex when $\mathscr{A} = R$-Mod and $\mathscr{X}$ is a particular subcategory. Finally, we establish a colocalization sequence of the homotopy category $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ involving the relative derived category $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ under some condition.

收稿日期: 2018-08-13; 接受日期: 2018-08-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761060); 甘肃省高等学校科研项目 (2018B-036)

**Keywords** dg $\mathscr{X}$ resolution; (co)locolization sequence; relative derived category
**MR(2010) Subject Classification** 18E10, 18G35, 18G20
**Chinese Library Classification** O154.2

## 1 引言

在经典的同调代数中, 最基本的概念就是一个对象的分解. 在导出范畴中类似的概念就是复形的分解, 也称同伦分解. 1988 年, Spaltenstein 在文 [17] 中引入了同伦分解的概念. 他证明了任意复形 $A$, $B$, 总存在拟同构 $P \to A$ 和 $B \to I$, 其中 $P$ 是 dg- 投射复形, $I$ 是 dg- 内射复形, 分别称为 $A$ 的 dg- 投射分解和 $B$ 的 dg- 内射分解. 自此, 有许多作者对这一主题进行了研究, 例如文 [11, 12]. 同伦分解的存在性是使得导出范畴具有可操作性的重要基础. 本文主要研究把经典的复形的同伦分解推广到相对情形, 使得相对导出范畴具有可操作性. 在此基础上, 我们建立同伦范畴和相对导出范畴的 (余) 局部化序列.

本文第 3 节主要研究当 $\mathscr{X}$ 是反变有限允许子范畴时, 任意上有界复形都有 dg $\mathscr{X}$ 分解, 即对任意的上有界复形 $A$ 都有一个 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X \to A$, 其中 $X$ 是 dg $\mathscr{X}$ 复形. 进一步地, 证明了在一些特殊条件下, 任意无界复形分解的存在性. 第 4 节建立同伦范畴 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 和相对导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 的 (余) 局部化序列. 我们证明了如果任意复形有 dg $\mathscr{X}$ 分解, 则可以建立同伦范畴 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 关于 $\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 和相对导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 的余局部化序列并给出一个三角等价.

## 2 预备知识

设 $\mathscr{X}$ 为 abelian 范畴 $\mathscr{A}$ 的子范畴. 称链映射 $f: A \to B$ 为 $\mathscr{X}$- 拟同构, 如果对于任意 $X \in \mathscr{X}$, 诱导的态射 $\mathrm{Hom}(X,f): \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,B)$ 是拟同构. 记 $\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 是由右 $\mathscr{X}$- 正合 ($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,-)$ 正合) 复形构成的 $\mathbb{K}^*(\mathscr{A})$ 的三角子范畴. 注意到态射 $f: A \to B$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构当且仅当映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合的, 从而 $\mathscr{X}$- 拟同构的类是由 $\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 决定的饱和相容乘法系. 相对导出范畴 $\mathbb{D}^*_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 是 Verdier 商 $\mathbb{K}^*(\mathscr{A})/\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$.

**注 1** (1) 若 $\mathscr{X}$ =Prj$-\mathscr{A}$, 则相对导出范畴就是我们通常的导出范畴 $\mathbb{D}(\mathscr{A})$.

(2) 若 $\mathscr{X} = \mathscr{G}\mathscr{P}-\mathscr{A}$, 即为 Gorenstein 投射对象构成的子范畴, 则相对导出范畴是文 [9] 中的 Gorenstein 导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}(\mathscr{A})$.

(3) 若 $\mathscr{A} = R$-Mod 且 $\mathscr{X} = \mathscr{D}\mathscr{P}-\mathscr{A}$, 即为 Ding 投射对象构成的子范畴, 则相对导出范畴是文 [16] 中关于 Ding 模的相对导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{D}\mathscr{P}}(\mathscr{A})$.

**定义 2.1** 称 $\mathscr{X}$ 是预覆盖类 (反变有限的), 如果 $\mathscr{A}$ 中任意对象都有 $\mathscr{X}$- 预覆盖. 称 $\mathscr{Y}$ 是预包络类 (共变有限的), 如果 $\mathscr{A}$ 中任意对象都有 $\mathscr{Y}$- 预包络. 进一步地, 称 $\mathscr{X}$ 是容许的 (admissible), 如果每一个 $\mathscr{X}$- 预覆盖都是满的. 称 $\mathscr{Y}$ 是余容许的 (coadmissible), 如果每一个 $\mathscr{Y}$- 预包络都是单的 [3, 5].

**粘合** 设 $T, T', T''$ 是三角范畴, 三角函子的图 $T' \xrightarrow{i} T \xrightarrow{j} T''$ 称为 $T$ 相对于 $T'$ 和 $T''$ 的一个局部化序列, 如果满足以下条件:

(1) $i$ 是满忠实的且有一个右伴随;

(2) $j$ 有一个满忠实的右伴随;

(3) $\operatorname{Im} F = \operatorname{Ker} G$.

三角函子的图 $T' \xrightarrow{i} T \xrightarrow{j} T''$ 称为 $T$ 相对于 $T'$ 和 $T''$ 的一个余局部化序列, 如果 $(i^{\mathrm{op}}, j^{\mathrm{op}})$ 是局部化序列. 称三角函子的图是一个粘合, 如果它既是局部化序列又是余局部化序列, 表示为

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "i"] & T \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j"] & T'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

**同伦极限** 设 $T$ 是具有可数直和的三角范畴. 对于如下对象和态射的序列

$$X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n \to X_{n+1} \to \cdots ,$$

其同伦余极限记为 $\underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n$, 如果满足如下三角

$$\oplus X_n \xrightarrow{1\text{-shift}} \oplus X_n \to \underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n \to \Sigma(\oplus X_n),$$

其中 shift : $\oplus X_n \to \oplus X_n$, 使得 $(\mathrm{shift}) i_m = i_{m+1} f_m$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$, $i_m : X_m \to \oplus X_m$ 是单射. 对偶地, 也有同伦极限的定义 (见文 [14, 4.1]).

## 3 dg$\mathscr{X}$ 分解

**定义 3.1** 设 $\mathscr{X}$ 是 abelian 范畴 $\mathscr{A}$ 的子范畴, $\mathscr{X}$-ac 是右 $\mathscr{X}$- 正合复形的类.

(1) 称复形 $X \in \mathbb{C}(\mathscr{X})$ 是 dg $\mathscr{X}$ 复形, 如果对于任意的 $W \in \mathscr{X}$-ac, $\mathrm{Hom}^\bullet(X, W)$ 是正合的或者 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X, \Sigma^n W) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. 我们记所有 dg $\mathscr{X}$ 复形的类为 dg $\widetilde{\mathscr{X}}$.

(2) 称复形 $A \in \mathbb{C}(\mathscr{A})$ 有 dg $\mathscr{X}$ 分解, 如果存在 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X \to A$, 其中 $X$ 为 dg $\mathscr{X}$ 复形.

**命题 3.2** 下面结论成立:

(1) dg $\widetilde{\mathscr{X}}$ 关于有限直和封闭.

(2) 若 $\mathscr{A}$ 有无限直和且 $\mathscr{X}$ 关于无限直和封闭, 则 dg $\widetilde{\mathscr{X}}$ 也关于无限直和封闭.

(3) dg $\widetilde{\mathscr{X}}$ 关于平移函子 $\Sigma$ 封闭. 若 $A \to B \to C \to \Sigma A$ 是 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中的三角且 $A, B, C$ 中任意两个都是 dg $\mathscr{X}$ 复形, 则第三个也是.

**证明** (1) 因为对任意的 $A \in \mathscr{A}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(-, A)$ 保持有限直和, 所以结论是显然的.

(2) 若 $\mathscr{A}$ 有无限直和, 则 $\mathbb{C}(\mathscr{A})$ 和 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 也有无限直和, 而且

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i, B\right) \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(A_i, B).$$

从而完成了证明.

(3) 设 $A \to B \to C \to \Sigma A$ 是 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中的三角且 $A$, $B \in$ dg $\widetilde{\mathscr{X}}$. 对于任意的右 $\mathscr{X}$- 正合复形 $W$, 将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(-, W)$ 作用到三角, 则我们得到下面的正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\Sigma A, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(C, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(B, W) \to \cdots .$$

而 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\Sigma A, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(B, W) = 0$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(C, W) = 0$, 即 $C \in$ dg $\widetilde{\mathscr{X}}$. 证毕.

下面的命题说明了任意的 $X \in \mathbb{K}^-(\mathscr{A})$ 都是 dg $\mathscr{X}$ 复形.

**命题 3.3** 设 $\mathscr{A}$ 有足够的投射对象且 $\mathscr{X}$ 包含投射对象的类 $X \in \mathbb{K}^-(\mathscr{X})$, 则函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X, -)$$

让右 $\mathscr{X}$- 正合复形消失. 特别的, 若 $X$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合的, 则在 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中 $X=0$.

**证明** 设 $A$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合复形且 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,A)$. 我们将建立同伦映射 $h:f\sim 0$. 因为 $A$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合的, 所以 $A$ 也是正合的. 不妨设对任意 $i>0$, $X^i=0$, 则对 $i\geq 0$, 令 $h^i=0$. 因为 $0\to \mathrm{Ker}\,d_A^{-1}\to A^{-1}\to \mathrm{Ker}\,d_A^0\to 0$ 是正合的, $f^0:X^0\to A^0$ 的像在 $\mathrm{Ker}\,d_A^0$ 中, 所以 $f^0$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^0,\mathrm{Im}\,d_A^{-1})$ 中. 现在把函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^0,-)$ 作用到上面的短正合列, 得到正合序列

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^0,\mathrm{Ker}\,d_A^{-1})\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^0,A^{-1})\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^0,\mathrm{Ker}\,d_A^{0})\to 0,$$

则存在态射 $h^{-1}$, 使得 $d_A^{-1}h^{-1}=f^0$. 现在设 $g^{-1}=f^{-1}-h^{-1}d_X^{-1}$. 注意到

$$d_A^{-1}g^{-1}=d_A^{-1}f^{-1}-d_A^{-1}h^{-1}d_X^{-1}=0,$$

从而使得 $g^{-1}:X^{-1}\to A^{-1}$ 的像在 $\mathrm{Ker}\,d_A^{-1}$ 中. 这样就能提升 $g^{-1}$ 到 $h^{-2}$, 使得 $d_A^{-2}h^{-2}=g^{-1}=f^{-1}-h^{-1}d_X^{-1}$. 从而 $f^{-1}=h^{-1}d_X^{-1}+d_A^{-2}h^{-2}$. 继续这个过程, 我们能建立同伦态射 $\{h^k\}$, 使得对于任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 有 $f^k=h^kd_X^k+d_A^{k-1}h^{k-1}$. 证毕.

**命题 3.4** 对于 $X\in\mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$, 下面结论成立.

(1) 对于任意的 $\mathscr{X}$- 拟同构 $s\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(B,B')$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,s)$ 是同构. 特别的, $X'\in\mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$, 则任意的 $\mathscr{X}$- 拟同构 $t\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X',X)$ 是同构.

(2) 标准函子 $Q:\mathbb{K}(\mathscr{A})\to\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 诱导了同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,-)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(QX,-)\circ Q.$$

**证明** (1) 我们能使 $s$ 嵌入到 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中的三角 $B\xrightarrow{s}B'\to C_s\to\Sigma B$. 因为 $C_s$, $\Sigma^{-1}C_s\in\mathscr{X}$-ac, 所以将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,-)$ 作用到三角上得到下面的正合序列

$$\begin{aligned}\cdots\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,\Sigma^{-1}C_s)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,B)&\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\mathrm{X,s})}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,B')\\ \to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,C_s)\to\cdots.&\end{aligned}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,\Sigma^{-1}C_s)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,C_s)=0$, 从而得到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\mathrm{X,s})$ 是同构. 接下来, 设 $t\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X',X)$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构, 其中 $X'\in\mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$, 则由上面的证明存在 $t'\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,X')$, 使得 $tt'\sim\mathrm{id}_X$. 因此 $t''\sim tt't''\sim t$ 且 $t'\sim t^{-1}$.

(2) 设 $Y\in\mathbb{K}(\mathscr{A})$, $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,Y)$ 且 $Q(f)=0$, 则存在 $\mathscr{X}$- 拟同构 $s:Y\to Z$, 使得 $sf\sim 0$. 嵌入 $s$ 到三角 $Y\xrightarrow{s}Z\to C_s\xrightarrow{w}\Sigma Y$. 从而有下面三角的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ Y \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r] & C_s \arrow[r, "w"] & \Sigma Y. \end{tikzcd}$$

这样, 我们有 $\Sigma f\sim wg$. 因此 $f$ 通过 $\mathscr{X}$- 正合复形 $C_s$ 分解. 所以 $f\sim 0$.

反过来, 设 $u=\frac{g}{t}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(X,Y)$, 其中 $t$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 由 (1) 存在 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,Y)$, 使得 $g\sim ft$. 从而得到 $u=Q(f)$. 证毕.

**推论 3.5** 设 $X\in\mathbb{K}(\mathscr{A})$, 则下面结论成立:

(1) $X\in\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{X}}$.

(2) 任意 $\mathscr{X}$- 拟同构 $s:A\to B$ 诱导了同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,s):\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,A)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,B).$$

(3) 对于图

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

存在唯一的链映射 $h: X \to A$, 使得 $sh = f$.

(4) 任意 $\mathscr{X}$- 拟同构 $s: A \to X$ 在 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中是可裂满的.

**证明** (1) $\Rightarrow$ (2) 由命题 3.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) 和 (3) $\Rightarrow$ (4) 是显然的.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $W$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合复形且 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X, W)$, 则在 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中存在三角 $A \xrightarrow{s} X \xrightarrow{f} W \to \Sigma A$, 其中 $s$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 由 (4), $s$ 是可裂满的. 因此 $f = 0$. 证毕.

**定理 3.6** 设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的反变有限且可允许子范畴, 则任意上有界复形 $A$ 都有 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 分解 $X \to A$, 其中 $X \in \mathbb{K}^-(\mathscr{X})$.

**证明** 设 $A$ 是上有界复形. 不妨设 $i > 0$, $A^i = 0$. 对于 $i > 0$, 我们定义 $X^i = 0$. 选取一个满的右 $\mathscr{X}$- 逼近 $f^0: X^0 \to A^0$, 其中 $X^0 \in \mathscr{X}$. 假设对于某个 $k < 0$, 我们已经建立了态射 $d_X^i: X^i \to X^{i+1}$, $X^i \to A^i$ 和对任意的 $i > k$, $X^i \in \mathscr{X}$. 考虑下面的交换图

$$\begin{tikzcd} T^k \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Ker}\, d_X^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & X^{k+1} \arrow[d] \\ A^k \arrow[r, "d_A^k"] & \mathrm{Ker}\, d_A^{k+1} \arrow[r] & A^{k+1}, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

其中左边的方块是拉回. 选取一个满的右 $\mathscr{X}$- 逼近 $X^k \to T^k$, 其中 $X^k \in \mathscr{X}$. 设 $d_X^k: X^k \to X^{k+1}$ 是 $X^k \to T^k \to \mathrm{Ker}\, d_X^{k+1} \to X^{k+1}$ 的合成. 从而可以定义 $X^k \to A^k$ 是 $X^k \to T^k$ 和 $T^k \to A^k$ 的合成. 这样一个过程可以用下面的图表示:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[d] \arrow[dr, "d_X^{-2}"] & & & \\ & T^{-1} \arrow[r] \arrow[dd] & X^{-1} \arrow[d] \arrow[dr, "d_X^{-1}"] & & \\ & & T^0 \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[d] \arrow[dr, "d_X^0"] & \\ \cdots \arrow[r] & A^{-2} \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r] & A^0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

我们用归纳法建立了一个上有界复形 $X$ 且有态射 $X \to A$. 下面需要证明 $X \to A$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 对于 $k < 0$ 和任意的 $X' \in \mathscr{X}$, (3.1) 诱导了下面的拉回图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', T^k) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_X^{k+1}) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^k) \arrow[r, "(d_A^k)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_A^{k+1}). \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

下面证明 $\alpha_*$ 是满的. 这只需要证明对于任意的 $X' \in \mathscr{X}$ 和 $i > k$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X^i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^i)$ 是满的. 首先考虑 $i = 0$ 的情况. 因为 $f^0 : X^0 \to A^0$ 是一个右 $\mathscr{X}$- 逼近, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X^0) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^0)$ 是满的, 而且我们有拉回图

$$\begin{tikzcd} T^{-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & X^0 \arrow[d, "f^0"] \\ A^{-1} \arrow[r] & A^0. \end{tikzcd}$$

根据前面的证明, 我们知道 $p^{-1} : X^{-1} \to T^{-1}$ 是满的右 $\mathscr{X}$- 逼近. 从而有下面的交换图

$$\begin{tikzcd} X^{-1} \arrow[r, "d_X^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"] & X^0 \arrow[d, "f^0"] \\ A^{-1} \arrow[r] & A^0, \end{tikzcd}$$

其中 $d_X^{-1} = hp^{-1}$ 和 $f^{-1} = gp^{-1}$. 因为 $f^0$ 是右 $\mathscr{X}$- 逼近, 对于任意的态射 $X' \to A^{-1}$, 有态射 $X' \to X^0$. 从而由拉回的性质有态射 $X' \to T^{-1}$. 又因为 $p^{-1}$ 是右 $\mathscr{X}$- 逼近, 所以存在态射 $X' \to X^{-1}$. 这样, 得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X^{-1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^{-1})$ 是满的. 继续这个过程, 就得到了我们想要的结果. 因此, 由下面的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_X^{k+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X^{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X^{k+2}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_A^{k+1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^{k+1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^{k+2}), \end{tikzcd}$$

从而得到 $\alpha_*$ 是满的. 由上面的证明也得到 $g_*$ 是满的, 故得到下面的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, g_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', T^k) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "h_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A^k) \arrow[r] \arrow[d, "d_{A*}^k"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, \alpha_* \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_X^{k+1}) \arrow[r, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', \mathrm{Ker}\, d_A^{k+1}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

根据文 [19, 命题 4.1.4], $\mathrm{Ker}\, g_* \to \mathrm{Ker}\, \alpha_*$ 是同构, 则 $\mathrm{Coker}\, h_* \to \mathrm{Coker}(d_A^k)_*$ 也是同构, 这等价于

$$\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', X) \cong \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X', A).$$

证毕.

这个对于 dg $\mathscr{X}$ 分解的存在性的结论只是针对上有界复形, 那么任意的无界复形呢? 下面将作更进一步的研究. 首先来描述相对导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 中的三角结构.

**引理 3.7** 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是 $\mathbb{C}(\mathscr{A})$ 中的右 $\mathscr{X}$- 正合复形, 即对于任意的 $i \in \mathbb{Z}$, $0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合的. 设 $C_f$ 是 $f$ 的映射锥和 $\phi^i : C_f^i = A^{i+1} \oplus B^i \to C^i$ 是态射 $\begin{pmatrix} 0 & g^i \end{pmatrix}$, 则 $\phi : C_f \to C$ 是复形的态射, 使得 $\phi\alpha(f) = g$ (其中 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} C_f \xrightarrow{\beta(f)} \Sigma A$) 且 $\phi$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构, 进而 $A \to B \to C \to \Sigma A$ 是 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 中的三角.

**证明** 易证 $\phi$ 是复形的态射. 我们有复形的态射的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\phi"] & \Sigma A \\ A \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Sigma A. \end{tikzcd}$$

这归结于证明 $C_f \xrightarrow{\phi} C$ 是一个 $\mathscr{X}$- 拟同构. 注意到 $0 \to C_{\mathrm{id}_A} \xrightarrow{\varphi} C_f \xrightarrow{\phi} C \to 0$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合复形, 其中 $\varphi^i = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_A & 0 \\ 0 & f^i \end{smallmatrix}\right)$, 则对每一个 $X \in \mathscr{X}$, 有

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C_{\mathrm{id}_A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C_f) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C) \to 0.$$

因为 $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C_{\mathrm{id}_A})) = 0$, 从而 $\phi$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 因此 $\phi$ 是 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 中的同构. 所以 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ 是三角, 其中 $h = \beta(f)\phi^{-1}$. 证毕.

设 $A$ 是复形 $\cdots \to A^{n-2} \xrightarrow{d_A^{n-2}} A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \to \cdots$. 定义 $A_{\leq n}$ 是

$$\cdots \to A^{n-2} \xrightarrow{d_A^{n-2}} A^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d_A^n \to 0 \to 0 \to \cdots.$$

由文 [14, 4.1], 我们有正合序列

$$0 \to \bigoplus_{n \geq 0} A_{\leq n} \xrightarrow{\text{1-shift}} \bigoplus_{n \geq 0} A_{\leq n} \to \mathrm{Coker}(\text{1-shift}) \to 0.$$

而 $\mathrm{Coker}(\text{1-shift}) = \varinjlim A_{\leq n}$. 从而我们有下面的结论.

由文 [6], 称 $0 \to T \to N \to N/T \to 0$ 是纯正合的, 如果对于任意的右 $R$- 模 $M$,

$$0 \to M \otimes_R T \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N/T \to 0$$

是正合的, 或对任意的有限表示 $R$- 模 $F$,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(F, T) \to \mathrm{Hom}_R(F, N) \to \mathrm{Hom}_R(F, N/T) \to 0$$

是正合的. 称 $R$- 模 $P$ 是纯投射的, 如果对任意的纯正合列 $0 \to T \to N \to N/T \to 0$,

$$\mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, N/T) \to 0$$

是正合的.

**引理 3.8** 设 $\mathscr{A} = R\text{-Mod}$ 且 $\mathscr{X}$ 是纯投射模的类, 则

$$0 \to \bigoplus_{n \geq 0} A_n \xrightarrow{\text{1-shift}} \bigoplus_{n \geq 0} A_n \to \varinjlim A_n \to 0$$

是右 $\mathscr{X}$- 正合复形.

**证明** 对于任意的有限表示模 $M$, 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \varinjlim A_n) \cong \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A_n).$$

将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, -)$ 作用到

$$0 \to \bigoplus_{n \geq 0} A_n \xrightarrow{\text{1-shift}} \bigoplus_{n \geq 0} A_n \to \varinjlim A_n \to 0,$$

我们有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}\left(M, \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_n\right) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}\left(M, \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_n\right) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \varinjlim A_n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A_n) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A_n) \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A_n) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

因为 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是正向系, 所以 $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A_n)\}_{n\geq 0}$ 也是正向系, 故下行是正合的, 从而上行也是正合的, 即纯正合的. 因此

$$0 \to \bigoplus_{n\geq 0} A_n \xrightarrow{\text{1-shift}} \bigoplus_{n\geq 0} A_n \to \varinjlim A_n \to 0$$

是右 $\mathscr{X}$- 正合复形. 证毕.

由文 [20, 注 2.4, 2.6] 知, 称复形 $A$ 是纯正合, 如果复形 $A$ 是正合的且对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $0 \to \mathrm{Ker}\, d_A^n \to A^n \to \mathrm{Im} d_A^n \to 0$ 是纯正合的. 显然, 复形 $A$ 是纯正合的当且仅当对于任意的右 $R$- 模 $M$, $M \otimes_R A$ 是正合的当且仅当对任意有限表示 $R$- 模 $F$, $\mathrm{Hom}_R(F, A)$ 是正合的. 复形 $A$ 是纯正合的当且仅当对任意的纯投射模 $P$, $\mathrm{Hom}_R(P, A)$ 是正合的.

**引理 3.9** 设 $\mathscr{A} = R$-Mod 且 $\mathscr{X}$ 是纯投射模的类, 则 $\mathscr{X}$- 拟同构关于直和封闭.

**证明** 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 设有一族 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X_i \xrightarrow{f_i} A_i$, 其中 $X_i$ 和 $A_i \in \mathbb{C}(R)$.

对任意的 $X \in \mathscr{X}$, $\mathrm{Cone}(f_i)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ 正合的, 这等价于 $\mathrm{Cone}(f_i)$ 是纯正合的. 从而 $\bigoplus_i \mathrm{Cone}(f_i) \cong \mathrm{Cone}(\bigoplus_i f_i)$ 是纯正合的, 即也是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ 正合的. 因此

$$\bigoplus_i X_i \xrightarrow{\oplus_i f_i} \bigoplus_i A_i$$

是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 证毕.

**定理 3.10** 设 $\mathscr{A} = R$-Mod 和 $\mathscr{X}$ 是纯投射模的类, 则任意复形 $A$ 都有 dg $\mathscr{X}$ 分解 $X \to A$, 其中 $X \in \mathbb{K}(\mathscr{X})$.

**证明** 任意 $R$- 模都有一个纯投射预覆盖并且投射模也是纯投射的. 由定理 3.6, 每一个上有界复形都有 dg $\mathscr{X}$ 分解. 设 $A$ 是 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中的任意无界复形. 对于 $n \geq 0$, $A_{\leq n}$ 是上有界的. 从而由定理 3.6, 在 $\mathbb{K}(\mathscr{X})$ 中存在上有界复形 $X_n$, 使得 $\upsilon_n : X_n \to A_{\leq n}$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 事实上, 我们用归纳法和定理 3.6, 再根据命题 3.4, 可以得到下面复形的交换图

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon_0"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon_2"] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "\upsilon_n"] & \cdots \\
A_{\leq 0} \arrow[r] & A_{\leq 1} \arrow[r] & A_{\leq 2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{\leq n} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

从而诱导出了同伦极限的态射 $\underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n \to \underrightarrow{\mathrm{holim}} A_{\leq n}$ 且有交换图

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{n\geq 0} X_n \arrow[r, "\text{1-shift}"] \arrow[d, "\oplus \upsilon_n"] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} X_n \arrow[r] \arrow[d, "\oplus \upsilon_n"] & \underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \Sigma \bigoplus\limits_{n\geq 0} X_n \arrow[d, "\Sigma \oplus \upsilon_n"] \\
\bigoplus\limits_{n\geq 0} A_{\leq n} \arrow[r, "\text{1-shift}"] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_{\leq n} \arrow[r] & \underrightarrow{\mathrm{holim}} A_{\leq n} \arrow[r] & \Sigma \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_{\leq n}.
\end{tikzcd}$$

由引理 3.9, $\bigoplus_{n\geq 0} X_n \xrightarrow{\oplus v_n} \bigoplus_{n\geq 0} A_{\leq n}$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,-)$ 作用到上图, 可以得到 $h$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构.

另一方面, 由引理 3.8, 有右 $\mathscr{X}$- 正合复形

$$0 \to \bigoplus_{n\geq 0} A_{\leq n} \xrightarrow{\text{1-shift}} \bigoplus_{n\geq 0} A_{\leq n} \to \mathrm{Coker(1\text{-}shift)} \to 0.$$

再由引理 3.7, 有 $\mathscr{X}$- 拟同构 $g : \underrightarrow{\mathrm{holim}} A_{\leq n} \to \mathrm{Coker(1\text{-}shift)}$. 因此 $f = gh$. 而根据文 [14], $\mathrm{Coker(1\text{-}shift)} = \underrightarrow{\lim} A_{\leq n} = A$. 从而 $f : \underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n \to A$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 因为对于任意的 $n \geq 0$, $X_n$ 是 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 复形, 则 $\bigoplus_{n\geq 0} X_n$ 也是 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 复形. 由命题 3.2, $\underrightarrow{\mathrm{holim}} X_n$ 是 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 复形. 从而完成了证明.

## 4 同伦范畴中的右 (左) recollement

本节建立一个同伦范畴 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 关于 $\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 和 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 的左 recollement, 并给出一个三角等价.

**引理 4.1** 设 $s : X \to A$ 和 $t : X' \to B$ 都是 $\mathscr{X}$- 拟同构且 $\alpha : A \to B$ 是同伦等价, 则存在唯一的同伦等价 $u : X \to X'$, 使得在 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中 $\alpha s = tu$.

**证明** 由命题 3.4 中的 (1) 易证. 证毕.

**定理 4.2** 设任意复形都有 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 分解, 则存在左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A}). \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd}$$

**证明** 我们首先建立涉及到的函子. 设 $A \in \mathbb{K}(\mathscr{A})$, 则存在 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X \xrightarrow{s} A$, 其中 $X \in \mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$. 从而我们有三角 $X \xrightarrow{s} A \to C_s \to \Sigma X$, 其中 $C_s \in \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$. 由引理 4.1, $A$ 的 $\mathrm{dg}\,\mathscr{X}$ 分解在同伦等价的意义下是唯一的. 故 $C_s$ 也是唯一的.

另一方面, 设 $0 \sim f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(A, B)$, 则我们有 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中三角的态射

$$\begin{tikzcd} X_A \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d] & C_s \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & \Sigma X_A \arrow[d] \\ X_B \arrow[r, "t"] & B \arrow[r] & C_t \arrow[r] & \Sigma X_B, \end{tikzcd}$$

其中 $X_A, X_B \in \mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$ 且 $s$, $t$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 我们得到 $g \sim 0$. 故 $h \sim 0$. 从而可以定义函子 $i^* : \mathbb{K}(\mathscr{A}) \to \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 为 $i^*(A) = C_s$.

设 $E$ 是右 $\mathscr{X}$- 正合复形, 则我们有正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\Sigma X_A, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(C_s, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(A, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X_A, E) \to \cdots.$$

而 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(\Sigma X_A, E) = 0$, 从而得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A})}(i^*(A), E) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(C_s, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(A, E).$$

因此 $(i^*, \mathrm{inc})$ 是一个伴随对.

设 $A \in \mathbb{K}(\mathscr{A})$. 由假设得到 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X_A \xrightarrow{s} A$, 其中 $X_A \in \mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$. 设 $0 \sim f \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(A,B)$, 则我们有 $\mathbb{K}(\mathscr{A})$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} X_A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ X_B \arrow[r, "t"] & B, \end{tikzcd}$$

其中 $X_A,\ X_B \in \mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$ 且 $s,\ t$ 是 $\mathscr{X}$- 拟同构. 我们有 $g \sim 0$. 从而我们可以定义函子 $j_! : \mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A}) \to \mathbb{K}(\mathscr{X})$ 为 $j_!(A) = X_A$. 由命题 3.4, 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(X_A,X_B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{X})}(j_!(A),j_!(B)).$$

我们也有同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(j_!(A),B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X_A,B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(X_A,B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})}(A,B).$$

从而 ($j_!$,can) 是伴随对, 因此建立了定理中的左 recollement. 证毕.

**定理 4.3** 设任意复形都有 dg $\mathscr{X}$ 分解, 则自然的合成函子 $\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{X}} \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathbb{K}(\mathscr{A}) \xrightarrow{Q} \mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 是三角等价.

**证明** 这个自然的合成函子很显然是三角函子. 因此只需要证明它是范畴的等价. 对于任意复形 $A$, 有 $\mathscr{X}$- 拟同构 $X \xrightarrow{s} A$. 从而 $s$ 是相对导出范畴 $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 中的同构. 特别的, $Q(A) \simeq Q \circ \mathrm{inc}(X)$. 因此这个合成函子是稠的.

对于任意的 $X \in \mathrm{dg}\widetilde{\mathscr{X}}$ 和右 $\mathscr{X}$- 正合复形 $E \in \mathbb{K}(\mathscr{A})$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\mathscr{A})}(X,E) = 0$. 而 $\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{X}} \subseteq^{\perp} \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathbb{A})$. 根据文 [18, 命题 5.3], 合成函子是忠实满的. 从而这就是范畴的等价. 证毕.

**推论 4.4** (1) 存在左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^-_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^-(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^-_{\mathscr{X}}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd}.$$

(2) 自然合成函子 $\mathrm{dg}\,\widetilde{\mathscr{X}} \cap \mathbb{K}^-(\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathbb{K}^-(\mathscr{A}) \xrightarrow{Q} \mathbb{D}^-_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$ 是三角等价的.

**证明** 由定理 3.6 和定理 4.2 易证. 证毕.

注意到在文 [4] 中, 当 $R$ 是凝聚环且任意平坦模都有有限投射维数时, Gorenstein 投射模的类 $\mathscr{GP}$ 是 $R$-Mod 的反变有限子范畴. 当 $R$ 是 Noether 环时, 文 [7, 推论 2.7] 中说明了 Gorenstein 内射模的类 $\mathscr{GI}$ 是 $R$-Mod 的共变有限子范畴. 基于这些, 我们有下面的推论.

**推论 4.5** (1) 设 $R$ 是凝聚环且任意平坦模都有有限投射维数, 则存在左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^-_{\mathscr{GP}\text{-ac}}(R\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^-(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^-_{\mathscr{GP}}(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd}.$$

(2) 设 $R$ 是 Noether 环, 则存在右 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^+_{\mathscr{GI}\text{-ac}}(R\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^+(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^+_{\mathscr{GI}}(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

根据文 [10], 在 $n$-FC 环上, Ding 投射模的类 $\mathscr{DP}$ 和 Ding 内射模的类 $\mathscr{DI}$ 分别为反变有限和共变有限子范畴, 则我们有下面的结论.

**推论 4.6**　设 $R$ 是 $n$-FC 环.

(1) 存在左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^-_{\mathscr{D}\mathscr{P}\text{-ac}}(R\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^-(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^-_{\mathscr{D}\mathscr{P}}(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd}.$$

(2) 存在右 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^+_{\mathscr{D}\mathscr{I}\text{-ac}}(R\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^+(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^+_{\mathscr{D}\mathscr{I}}(R\text{-Mod}) \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

**定理 4.7**　设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的反变有限和可允许子范畴, 则

(1) $(\mathbb{K}^{-,\mathscr{X}b}(\mathscr{X}), \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{X}))$ 是 $\mathbb{K}^{\mathscr{X}b}(\mathscr{A})$ 中的稳定 $t$- 结构.

(2) 存在左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{X}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^{\mathscr{X}b}(\mathscr{X}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{D}^b_{\mathscr{X}}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd},$$

其中 inc 是标准的嵌入函子.

**证明**　(1) 由命题 3.3, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}^{\mathscr{X}b}(\mathscr{A})}(\mathbb{K}^{-,\mathscr{X}b}(\mathscr{X}), \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{X}))=0$. 设 $A\in\mathbb{K}^{\mathscr{X}b}(\mathscr{A})$, 则存在某个 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $A$ $\mathscr{X}$- 拟同构于复形

$$A' := \cdots \to A^{n-1} \to A^n \to \mathrm{Im}\, d^n \to 0.$$

由定理 3.6, $A'$ 有 dg $\mathscr{X}$ 分解 $X\to A'$, 其中 $X\in \mathrm{dg}\mathscr{X}\cap\mathbb{K}^{-,\mathscr{X}b}(\mathscr{X})$. 因此我们得到了三角

$$X \xrightarrow{s} A \to C_s \to \Sigma X,$$

其中 $C_s\in\mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{X})$. 从而完成了证明.

(2) 根据文 [13] 和 (1), 我们有左 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{\mathscr{X}\text{-ac}}(\mathscr{X}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^{\mathscr{X}b}(\mathscr{X}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathbb{K}^{-,\mathscr{X}b}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \end{tikzcd}.$$

而由文 [1, 定理 3.3], $\mathbb{K}^{-,\mathscr{X}b}(\mathscr{A})\cong\mathbb{D}^b_{\mathscr{X}}(\mathscr{A})$. 从而定理得证.

**注 2**　设 $\mathscr{Y}$ 为 abelian 范畴 $\mathscr{A}$ 的子范畴. 称链映射 $f: A\to B$ 为 $\mathscr{Y}$- 拟同构, 如果对于任意 $Y\in\mathscr{Y}$, 诱导的态射 $\mathrm{Hom}(f,Y):\mathrm{Hom}(B,Y)\to\mathrm{Hom}(A,Y)$ 是拟同构. 记 $\mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 是由左 $\mathscr{Y}$- 正合 (对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,Y)$ 正合) 复形组成的 $\mathbb{K}^*(\mathscr{A})$ 的三角子范畴. 注意到态射 $f:A\to B$ 是 $\mathscr{Y}$- 拟同构当且仅当映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$ 是左 $\mathscr{Y}$- 正合的, 从而 $\mathscr{Y}$- 拟同构的类是由 $\mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{A})$ 决定的饱和相容乘法系. $\mathscr{A}$ 的关于 $\mathscr{Y}$ 的相对导出范畴 $\mathbb{D}^*_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A})$ 是 Verdier 商 $\mathbb{K}^*(\mathscr{A})/\mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{A})$.

则我们有:

定理 3.6 的对偶:

若 $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{A}$ 的共变有限且余可允许的子范畴, 则任意下有界复形 $B$ 都有 dg$\mathscr{Y}$ 分解 $B\to Y$, 其中 $Y\in\mathbb{K}^+(\mathscr{Y})$

定理 4.2 和 4.3 的对偶:

(1) 设任意复形都有 dg$\mathscr{Y}$ 分解, 则存在右 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{Y}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[l, bend left, "i^!"] & \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

(2) 自然合成函子 dg$\widetilde{\mathscr{Y}} \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathbb{K}(\mathscr{A}) \xrightarrow{Q} \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A})$ 是三角等价的.

推论 4.4 的对偶:

设 $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{A}$ 的共变有限且余可允许子范畴.

(1) 存在右 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^+_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^+(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[l, bend left, "i^!"] & \mathbb{D}^+_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

(2) 自然合成函子 dg$\widetilde{\mathscr{Y}} \cap \mathbb{K}^+(\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathbb{K}^+(\mathscr{A}) \xrightarrow{Q} \mathbb{D}^+_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A})$ 是三角等价的.

定理 4.7 的对偶:

(1) $(\mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{Y}), \mathbb{K}^{+,\mathscr{Y}b}(\mathscr{Y}))$ 是 $\mathbb{K}^{\mathscr{Y}b}(\mathscr{A})$ 中的稳定 $t$- 结构.

(2) 存在右 recollement,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{\mathscr{Y}\text{-ac}}(\mathscr{Y}) \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^{\mathscr{Y}b}(\mathscr{Y}) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[l, bend left, "i^!"] & \mathbb{D}^b_{\mathscr{Y}}(\mathscr{A}) \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

## 参 考 文 献


[1] Asadollahi J., Hafezi R., Gorenstein derived equivalences and their invariants, *J. Pure Appl. Algebra*, 2014, **218**: 888–903.

[2] Asadollahi J., Hafezi R., On relative derived categories, http://arxiv.org/abs/1311.2189.

[3] Beligiannis A., The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co)stabilization, *Comm. Algebra*, 2000, **28**: 4547–4596.

[4] Bravo D., Gillespie J., Hovey M., The stable module category of a general ring, http://arxiv.org/abs/1405.5768.

[5] Chen X. W., Homotopy equivalences induced by balanced pairs, *J. Algebra*, 2010, **324**: 2718–2731.

[6] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Relative Homological Algebra, Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] Enochs E. E., López-ramos J. A., Kaplanksy classes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 2002, **107**: 67–79.

[8] Gao N., Stable $t$-structures and homotopy category of Gorenstein-projective modules, *J. Algebra*, 2010, **324**: 2503–2011.

[9] Gao N., Zhang P., Gorenstein derived categories, *J. Algebra*, 2010, **323**: 2041–2057.

[10] Gillespie J., Model structures on modules over Ding-chen rings, *Homology, Homo. Appl.*, 2010, **12**: 61–73.

[11] Hoshino M., Derived categories, www.u-gakugei.ac.jp/miyachi/papers/DC1.pdf.

[12] Keller B., Derived categories and their uses, In: Handbook of Algebra Vol. 1, Elsevier, 1996.

[13] Miyach J., Localization of triangulated categories and derived categories, *J. Algebra*, 1991, **141**: 463–483.

[14] Murfet D., Dereived categories part I, http://www.therisingsea.org/notes/DerivedCategories.pdf.

[15] Parshall B., Scott L. L., Derived Categories, Quasi-hereditary Algebras and Algebraic Grooups, Proceedings of the Ottawa-Moosonee Workshop in Algebra, 1987.

[16] Ren W., Liu Z. K., Yang G., Derived categories with respect to Ding modules, *J. Algebra Appl.*, 2013, **12**.

[17] Spaltenstein N., Resolutions of unbounded complexes, *Compositio Math.*, 1988, **65**: 121–154.

[18] Verdier J. L., Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes, Astrisque 239, Societ Mathematique de France, Pairs, 1996.

[19] Zhang P., Triangulated Categories and Derived Categories, Beijing, 2015.

[20] Zheng Y. F., Huang Z. Y., On pure derived categories, *J. Algebra*, 2016, **454**: 252–272.