

文章编号: 0583-1431(2020)01-0045-16

文献标识码: A

# 半直线伸缩调制框架集

李云章 王雅慧

北京工业大学应用数理学院 北京 100124

E-mail: yzlee@bjut.edu.cn; wangyahui@emails.bjut.edu.cn

**摘 要** 本文研究右半直线平方可积函数空间  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的一类伸缩调制系. 实际问题中时间变量不可取负值,  $L^2(\mathbb{R}_+)$  可模拟因果信号空间. 但因  $\mathbb{R}_+$  按加法不能作成一群, 它不容许小波与 Gabor 系. 我们研究  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中由特征函数生成的伸缩调制系 ( $\mathcal{MD}$ -系) 框架, 引入了  $\mathbb{R}_+$  中  $\mathcal{MD}$ -框架集的概念, 利用“伸缩等价”与“基数函数”方法刻画了  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中  $\mathcal{MD}$ -Bessel 集与完备集; 得到了关于  $\mathcal{MD}$ -Riesz 基集的两个充分条件, 并证明了通过对  $\mathcal{MD}$ -Riesz 基集进行有限可测分解可得到  $\mathcal{MD}$ -框架集.

**关键词** 伸缩调制系; 框架; Riesz 基

**MR(2010) 主题分类** 42C40, 42C15

**中图分类** O174.2

## The Dilation-and-Modulation Frame Sets on the Half Real Line

Yun Zhang LI Ya Hui WANG

College of Applied Sciences, Beijing University of Technology,  
Beijing 100124, P. R. China

E-mail: yzlee@bjut.edu.cn; wangyahui@emails.bjut.edu.cn

**Abstract** This paper addresses a class of dilation-and-modulation ( $\mathcal{MD}$ ) systems in the space  $L^2(\mathbb{R}_+)$  of square integrable functions defined on the right half real line  $\mathbb{R}_+$ . In practice, the time variable cannot be negative.  $L^2(\mathbb{R}_+)$  models the causal signal space, but it admits no wavelet and Gabor systems due to  $\mathbb{R}_+$  being not a group under addition. We study the dilation-and-modulation systems in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  generated by characteristic functions. We introduce the notion of  $\mathcal{MD}$ -frame sets in  $\mathbb{R}_+$ . Using “dilation-equivalence” and “cardinality function” methods we characterize  $\mathcal{MD}$ -Bessel and complete sets; obtain two sufficient conditions for  $\mathcal{MD}$ -Riesz basis sets; and prove that an arbitrary finite and measurable decomposition of an  $\mathcal{MD}$ -Riesz basis set leads to an  $\mathcal{MD}$ -frame set.

**Keywords** dilation-and-modulation system; frame; Riesz basis

**MR(2010) Subject Classification** 42C40, 42C15

**Chinese Library Classification** O174.2

收稿日期: 2019-01-05; 接受日期: 2019-07-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971043)

通讯作者: 李云章

## 1 引言

调和的一个核心问题是将群上的函数表示为某些“基本函数”的级数或积分. 小波与 Gabor 框架就是这种表示  $\mathbb{R}$  上平方可积函数的基本函数. 可分 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  中的一个可数序列  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  称为  $\mathcal{H}$  的一个框架: 即存在两个常数  $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ , 使得对任意的  $f \in \mathcal{H}$ , 有

$$C_1 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{I}} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq C_2 \|f\|^2, \quad (1.1)$$

其中  $C_1, C_2$  称为其框架界. 若 (1.1) 的右半不等式成立, 则称  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  为  $\mathcal{H}$  中的一个 Bessel 序列. 若  $\mathcal{H}$  中的一个框架去掉任意一个元素之后都不再是一个框架, 则该框架称为  $\mathcal{H}$  的一个 Riesz 基. 全空间  $L^2(\mathbb{R})$  中小波与 Gabor 框架分别具有形式

$$X(\Psi) = \{D_{aj} T_{bm} \psi : j, m \in \mathbb{Z}, \psi \in \Psi\} \quad (1.2)$$

与

$$G(\Psi, a, b) = \{M_{mb} T_{na} \psi : m, n \in \mathbb{Z}, \psi \in \Psi\}, \quad (1.3)$$

其中  $a, b > 0$ ,  $\Psi$  是  $L^2(\mathbb{R})$  中的一个有限子集, 对任意  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < c \neq 1$ , 定义平移算子  $T_{x_0}$ , 调制算子  $M_{x_0}$  与伸缩算子  $D_c$  分别为: 对任意  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$T_{x_0} f(\cdot) = f(\cdot - x_0), \quad M_{x_0} f(\cdot) = e^{2\pi i x_0 \cdot} f(\cdot) \quad \text{与} \quad D_c f(\cdot) = \sqrt{c} f(c \cdot).$$

为简单起见, 当  $\Psi$  是单个函数  $\{\psi\}$  时, 我们记  $X(\Psi) = X(\psi)$ ,  $G(\Psi, a, b) = G(\psi, a, b)$ . 有关小波与 Gabor 框架的基础知识见文献 [10, 20, 21, 24, 26, 46], 关于局部紧群上的框架理论见 [7, 8, 11, 19, 36, 39] 及其参考文献. 通过对文献的仔细观察, 我们发现  $L^2(\mathbb{R})$  中 Gabor 分析的大多数结果可以扩展到  $l^2(\mathbb{Z})$  与  $\mathbb{C}^L$  中 (见文献 [10, 20, 21, 24, 28, 29]), 尽管在某些方面存在一些差异. 这是因为  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  与  $\mathbb{C}^L$  都是加法与通常拓扑下的局部紧阿贝尔群.

本文研究  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的框架理论, 其中  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ . 实际问题中时间变量不能取负值.  $L^2(\mathbb{R}_+)$  可模拟因果信号空间. 注意到, 若  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$  满足: 对某个常数  $c \neq 0$  及所有  $n \in \mathbb{Z}$ , 有

$$T_{nc} \psi(\cdot) = 0,$$

则  $\psi = 0$ . 这意味着  $L^2(\mathbb{R}_+)$  不容许非平凡的平移不变系, 从而不容许形如 (1.2) 与 (1.3) 的小波与 Gabor 框架. 另一方面,  $\mathbb{R}$  与  $\mathbb{R}_+$  之间指数与对数变换不能用于 “ $L^2(\mathbb{R})$ ”- 问题与 “ $L^2(\mathbb{R}_+)$ ”- 问题之间的切换, 因为它将产生一个非常数因子. 值得注意的是,  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}^L$  都是加法与通常拓扑下的局部紧阿贝尔群, 而  $\mathbb{R}_+$  则不是. 幸运的是,  $\mathbb{R}_+$  在乘法与通常拓扑下构成一个局部紧阿贝尔群. 这启发我们研究  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中基于乘法的框架. 给定  $a > 1$ , 定义在  $\mathbb{R}_+$  上的一个可测函数  $h$  被称为  $a$ - 伸缩周期的, 如果在  $\mathbb{R}_+$  上, 有  $h(a \cdot) = h(\cdot)$ . 定义  $a$ - 伸缩周期函数序列  $\{\Lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  为: 对任意的  $m \in \mathbb{Z}$ , 在  $[1, a)$  上有

$$\Lambda_m(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{a-1}} e^{\frac{2\pi i m \cdot}{a-1}}. \quad (1.4)$$

设  $\Psi$  为  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个有限子集, 以  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  表示由  $\Psi$  生成的伸缩调制系 ( $\mathcal{MD}$ - 系):

$$\mathcal{MD}(\Psi, a) = \{\Lambda_m D_{aj} \psi : m, j \in \mathbb{Z}, \psi \in \Psi\}. \quad (1.5)$$

为简单起见, 若  $\Psi = \{\psi\}$ , 以  $\mathcal{MD}(\psi, a)$  来表示  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$ . 在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中, 称形如 (1.5) 的框架为伸缩调制框架 ( $\mathcal{MD}$ - 框架). 下面的解释对于我们理解  $\mathcal{MD}$ - 系很重要, 可见文 [40, 42, 45].

• (1.5) 中的  $\Lambda_m$  与 (1.3) 中的  $e^{2\pi imb \cdot}$  有本质区别. 注意到, 对于任意  $c > 1$ , 若  $m \neq 0$ ,  $\frac{e^{2\pi imbc \cdot}}{e^{2\pi imb \cdot}} = e^{2\pi imb(c-1) \cdot}$  不是常量函数. 这表明当  $m \neq 0$  时,  $e^{2\pi imb \cdot}$  不是  $c$ -伸缩周期的. 然而, (1.5) 中的  $\Lambda_m$  是  $a$ -伸缩周期的.

•  $L^2(\mathbb{R}_+)$  是 Hardy 空间  $H^2(\mathbb{R})$  的 Fourier 变换,  $H^2(\mathbb{R})$  的定义为:

$$H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{对 a.e. } x \in (-\infty, 0), \hat{f}(x) = 0\}.$$

关于  $H^2(\mathbb{R})$  小波框架的研究可见文献 [30, 43, 44]. 但  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个  $\mathcal{MD}$ -框架不可能由  $H^2(\mathbb{R})$  的一个小波框架通过 Fourier 变换得到. 事实上, (1.2) 的 Fourier 变换为:

$$\{e^{-2\pi ia^j bm \cdot} D_{a^j} \hat{\psi} : m, j \in \mathbb{Z}, \psi \in \Psi\}, \quad (1.6)$$

其中  $e^{-2\pi ia^j bm \cdot}$  关于加法是  $\frac{1}{a^j b} \mathbb{Z}$ -周期的, 且周期随  $j$  的不同而变化, 对任意  $c > 1$ , 它都不可能是  $c$ -伸缩周期的. 另一方面, (1.5) 中的  $\Lambda_m$  是  $a$ -伸缩周期的, 且与  $j$  无关. 因此, (1.5) 不同于 (1.6), 研究它具有独立意义.

•  $L^2(\mathbb{R}_+)$  关于 Fourier 变换是不封闭的. 因其中紧支撑非零函数的 Fourier 变换的支撑为  $\mathbb{R}$ . 因此, Fourier 变换技巧不适用于该空间.

• 当  $\mathbb{R}_+$  被看作乘法与通常拓扑下的局部紧阿贝尔群时, 因其 Haar 测度不是 Lebesgue 测度, “ $L^2(\mathbb{R}_+)$ ”-Gabor 分析不适用于我们的问题.

因此, 研究  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的  $\mathcal{MD}$ -系是非平凡的, 并具有独立意义. 为此, 我们需要发展不同于 Fourier 变换的新技巧. 本文作者李与他的合作者在文 [41] 中利用时域双无限矩阵方法刻画了  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中形如  $\mathcal{MD}(\psi, a)$  的单个生成  $\mathcal{MD}$ -框架, 并在文 [42] 中发现了一种 “ $\Theta_a$ -矩阵变换” 技巧以刻画  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中形如 (1.5) 的  $\mathcal{MD}$ -框架与  $\mathcal{MD}$ -对偶框架. 有趣的是, 他们证明了  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中任意一个  $\mathcal{MD}$ -框架  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$ , 当  $\Psi$  的基数为 1 时不可能是冗余的, 当  $\Psi$  的基数大于 1 时又总是冗余的 (见文 [42, 定理 3.9]). 关于向量值  $\mathcal{MD}$ -框架的研究见文献 [45].

构造具有理想性质的小波与 Gabor 框架是小波分析的一个基本问题. 特别地, 框架小波与 Gabor 集吸引了许多数学家的兴趣. 一个可测集  $E \subset \mathbb{R}$  被称为小波集 (框架小波集) 是指满足  $\hat{\psi} = \chi_E$  的  $X(\psi)$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个标准正交基 (框架); 它被称为一个 Gabor 集是指  $G(\chi_E, a, b)$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个框架, 其中  $\chi_E$  表示  $E$  的特征函数. 与一般伸缩矩阵相关的小波集, 框架小波集与 Gabor 集可类似定义. 联系一般伸缩矩阵小波集的发现是小波分析研究中的一个重要事件. 1995 年, Auscher 在文 [2] 中证明了: 若  $X(\Psi)$  是  $L^2(\mathbb{R}^d)$  的标准正交基, 且  $\Psi$  中元素的 Fourier 变换具有一定弱光滑性与衰减性, 那么  $\Psi$  一定由一个 MRA 导出. 这种情况下, 我们知道  $\Psi$  的基数是  $|\det A| - 1$ , 其中  $A$  是相对应的伸缩矩阵. 但是这一结果使人们对  $L^2(\mathbb{R}^d)$  中存在单个函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , 使得  $X(\psi)$  作成  $L^2(\mathbb{R}^d)$  的标准正交基产生了一些怀疑. 关于一维小波集与高维二进制小波集的若干刻画可参考文献 [15, 18, 27, 31, 32]. Dai, Larson 与 Speegle 在文 [16] 中证明了小波集的存在性, 从而证明了  $L^2(\mathbb{R}^d)$  中联系任意伸缩矩阵的单个函数生成小波基的存在性. 框架小波集作为一个比小波集更为一般的概念, 由 Han 与 Larson 在文 [27] 中引入. 这些工作激发了许多数学家对 (框架) 小波集的研究兴趣 (详见文献 [1, 3–6, 12–14, 22, 23, 33–35, 47]).

对于 Gabor 集, Casazza 与 Kalton 在文 [9] 中证明了刻画满足  $G(\chi_E, 1, 1)$  作成  $L^2(\mathbb{R})$  框架的  $E$  等价于解决复分析中 Littlewood 的一个古老的公开问题. 作为一个特殊情况, 我们称之为  $abc$ -问题, 就是对  $a, b, c > 0$  分类, 使得  $G(\chi_{[0, c)}, a, b)$  作成  $L^2(\mathbb{R})$  的框架. 它由 Janssen 在文 [37, 38] 首次提出. 这种分类是非平凡的, 并且大多数情况与 “Janssen’s tie” 相关 [38]. 在  $ab$

是有理数的情况下, Gu 与 Han 在文 [25] 中给出了一个完全的分类. 在没有任何限制的条件下, Dai 与 Sun 在文 [17] 中给出了  $abc$  问题的完整解决方案.

受上述工作启发, 本文研究  $L^2(\mathbb{R}_+)$  上由一个集合  $S$  的特征函数  $\chi_S$  生成的伸缩调制系:

$$\mathcal{MD}(\chi_S, a) = \{ \Lambda_m D_{aj} \chi_S : m, j \in \mathbb{Z} \}. \quad (1.7)$$

对于此系, 我们自然会问:

哪些  $S \subset \mathbb{R}_+$  符合  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  作成  $L^2(\mathbb{R}_+)$  框架的要求? 根据下面的命题 3.2 (iv), 由单个函数生成的  $\mathcal{MD}$ - 系  $\mathcal{MD}(\psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基当且仅当它是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架. 因此, 若  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架, 则必然是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基. 上述问题等价于

**问题 1** 哪些  $\mathbb{R}_+$  中的子集  $S$  符合  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  作成  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的 Riesz 基的要求?

众所周知, 在处理各种信号时, 框架的冗余性使得它比 Riesz 基更有用. 因此,  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  一定是 Riesz 基在某种意义下是不幸的. 应用下面命题 3.2 (iv), 我们发现, 若  $\Psi = \{\chi_{S_l} : 1 \leq l \leq L\}$ ,  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架, 且  $L > 1$ , 则  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是一个冗余框架. 因此, 我们自然会问以下问题:

**问题 2** 设  $1 < L \in \mathbb{N}$ , 哪些  $\mathbb{R}_+$  中的子集  $S_1, S_2, \dots, S_L$  符合  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  ( $\Psi = \{\chi_{S_l} : 1 \leq l \leq L\}$ ) 作成  $L^2(\mathbb{R}_+)$  框架的要求?

本文部分回答了问题 1 与问题 2. 通过引入一个与  $\mathbb{R}_+$  的子集有关的“基数函数”, 我们得到了  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  作成  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的 Riesz 基的两个充分条件, 见定理 3.8, 3.10 与推论 3.9. 我们证明了问题 1 中任意 Riesz 基集的有限可测分解总可导出问题 2 中的框架集.

第 2 节在本文中起着重要作用. 我们引入“ $a$ - 伸缩等价”与相关的“基数函数”的概念, 获得了基数函数的一些性质, 并得到了  $[1, a)$  的一个分划, 其后将会经常用到. 第 3 节讨论问题 1 与问题 2, 刻画了  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中形如  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  的 Bessel 序列与完备序列, 给出了  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  作成 Riesz 基的两个充分条件 (见定理 3.8 与 3.10), 证明了任意 Riesz 基集的有限可测分解总可导出框架集 (见定理 3.11). 同时给出了一些例子, 它们蕴含了主要结果之外的一些新想法.

本文约定:  $\mathbb{R}_+$  中两个可测子集之间的相等或包含关系理解为在相差一个零测集的意义下成立. 设  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个可测子集. 若存在正常数  $M$ , 使得  $S \subset (0, M)$ , 则称  $S$  是上有界的; 若存在正常数  $M$ , 使得  $S \subset (M, \infty)$ , 则称  $S$  是下有界的; 若  $S$  既有上界又有下界, 则称  $S$  有界, 即存在两个正常数  $M_1, M_2$ , 使得  $S \subset (M_1, M_2)$ . 值得注意的是, 本文中“有界”的定义不同于通常有界的定义. 对  $\mathbb{R}_+$  中任意可测集  $F$ , 我们以  $|F|$  表示它的 Lebesgue 测度. 给定  $\mathbb{R}_+$  中一族可测集  $\{F_i : i \in I\}$ , 若  $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ , 且对任意  $i \neq i', i, i' \in I$ , 有  $|F_i \cap F_{i'}| = 0$ , 我们称  $\{F_i : i \in I\}$  是  $F$  的一个分划.

## 2 $a$ - 伸缩等价及相关性质

本节是辅助部分, 为后面做准备. 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集. 首先引入与  $a$  及  $S$  相关的  $a$ - 伸缩等价与基数函数概念. 然后讨论  $C_S$  的性质及  $[1, a)$  的基于  $a$ - 伸缩等价的分划性质.

**定义 2.1** 设  $a > 1$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . 若存在  $j \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$x = a^j y, \quad (2.1)$$

则称  $x$  与  $y$  是  $a$ - 伸缩等价的, 记为

$$x \stackrel{a}{\sim} y.$$

**定义 2.2** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集. 定义与  $a$  及  $S$  相关的集值函数  $\Delta_S$  与基数函数  $C_S$  分别为: 对任意的  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\Delta_S(x) = \{y \in S : y \stackrel{a}{\sim} x\}, \quad (2.2)$$

$$C_S(x) = \text{card}(\Delta_S(x)), \quad (2.3)$$

其中  $\text{card}(E)$  在本文中表示集合  $E$  的基数. 定义  $C_S$  的值域  $\text{range}(C_S)$  为:

$$\text{range}(C_S) = \{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} : \text{存在 } E \subset [1, a), |E| > 0, \text{使得对任意 } x \in E, \text{有 } C_S(x) = k\}. \quad (2.4)$$

**注 2.3** (i)  $C_S$  是  $a$ - 伸缩周期的, 即  $C_S(a \cdot) = C_S(\cdot)$ .

(ii)  $\text{range}(C_S) = \{0\}$  当且仅当  $|S| = 0$ .

下面研究  $\text{range}(C_S)$  的性质. 为此, 首先介绍下面的定义.

**定义 2.4** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集. 定义

$$A_j(S) = (a^{-j}S) \cap [1, a), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

$$I(S) = \{j \in \mathbb{Z} : |A_j(S)| > 0\}. \quad (2.6)$$

对  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ , 定义

$$A_J(S) = \bigcap_{j \in J} A_j(S), \quad (2.7)$$

$$P_J(S) = A_J(S) \setminus \left( \bigcup_{j \in I(S) \setminus J} A_j(S) \right), \quad (2.8)$$

对  $J = \emptyset$ , 定义

$$P_\emptyset(S) = [1, a) \setminus \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} a^{-j}S \right).$$

**注 2.5** 由定义 2.4 知,  $0 \notin \text{range}(C_S)$  当且仅当  $|P_\emptyset(S)| = 0$ .

下面定理表明: 若  $S$  有界, 则  $\text{range}(C_S)$  是一个有限集.

**定理 2.6** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一有界可测子集, 即存在常数  $0 < M_1 < M_2 < \infty$ , 使得  $S \subset [M_1, M_2]$ , 则有

$$I(S) \subset [\log_a M_1 - 1, \log_a M_2], \quad (2.9)$$

从而

$$\text{range}(C_S) \subset \{0, 1, \dots, [\log_a M_2 - \log_a M_1] + 2\}, \quad (2.10)$$

其中对任意  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数.

**证明** 显然, (2.9) 可导出 (2.10). 下证 (2.9). 设  $j \in I(S)$ , 则有  $|A_j(S)| > 0$ , 即

$$|S \cap [a^j, a^{j+1})| > 0.$$

由此得

$$[a^j, a^{j+1}) \cap [M_1, M_2] \neq \emptyset.$$

通过简单计算可得  $j \in [\log_a M_1 - 1, \log_a M_2]$ . 证毕.

**注 2.7** 定理 2.6 的逆命题不成立. 事实上, 即使  $\text{range}(C_S)$  是  $\mathbb{Z}_+$  的一个有限子集,  $S$  也未必有界. 下面的例子 2.8 与 2.9 说明了这一点.

**例 2.8** 设  $\{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$  是  $[1, a)$  的一个分划, 对每个  $n \in \mathbb{Z}$ , 有  $|E_n| > 0$ . 取  $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} a^n E_n$ , 则  $\text{range}(C_S) = \{1\}$ , 但  $S$  既不是下有界的, 也不是上有界的.

**例 2.9** 设  $N$  是一个固定的整数,  $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$  是  $[1, a)$  的一个分划, 对每个  $n \in \mathbb{Z}$ , 有  $|E_n| > 0$ . 取

$$S = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} a^{-n} E_n \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^N a^n E_n \right),$$

则  $\text{range}(C_S) = \{1, 2\}$ ,  $S$  上有界, 但不是下有界的. 同时可得  $|S| < \infty$ , 因此  $\chi_S \in L^2(\mathbb{R}_+)$ .

下面的定理揭示了联系  $\mathbb{R}_+$  中一可测子集  $S$  的  $\text{range}(C_S)$  与  $P_J(S)$  之间的关系.

**定理 2.10** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  上的一个正测度子集.  $\infty \notin \text{range}(C_S)$ , 则

$$\text{range}(C_S) \setminus \{0\} = \{\text{card}(J) : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}.$$

**证明** 设  $0 \neq k \in \text{range}(C_S)$ . 取

$$E = \{x \in [1, a) : C_S(x) = k\},$$

则  $|E| > 0$ , 且由  $P_J(S)$  的定义, 有

$$E = \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I(S), \text{card}(J)=k} P_J(S).$$

易证

$$\{J : \emptyset \neq J \subset I(S), \text{card}(J) = k\}$$

是一可数集. 因此, 存在  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $\text{card}(J) = k$ , 使得  $|P_J(S)| > 0$ . 从而由  $k$  的任意性得

$$\text{range}(C_S) \setminus \{0\} \subset \{\text{card}(J) : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}.$$

同时, 由  $P_J(S)$  的定义, 反包含关系成立. 证毕.

下面定理给出了  $[1, a)$  的一个分划. 它对证明本文的主要结果具有重要作用.

**定理 2.11** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集, 则  $\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是  $[1, a)$  的一个分划. 特别地, 若  $S$  有界,  $\{J : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是一个有限集.

**证明** 先证  $\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是  $[1, a)$  的一个分划, 即

$$\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$$

是  $[1, a)$  的一族互不相交子集, 且

$$\bigcup_{J \subset I(S), |P_J(S)| > 0} P_J(S) = [1, a).$$

任意固定  $J_1, J_2 \subset I(S)$ ,  $J_1 \neq J_2$ . 不妨设  $j_1 \in J_1 \setminus J_2$ . 由  $P_{J_2}(S)$  的定义得  $P_{J_2}(S) \cap A_{j_1}(S) = \emptyset$ . 注意到  $P_{J_1}(S) \subset A_{j_1}(S)$ . 我们有

$$P_{J_1}(S) \cap P_{J_2}(S) = \emptyset.$$

从而  $\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是  $[1, a)$  的一族互不相交子集.

下证  $\bigcup_{J \subset I(S), |P_J(S)| > 0} P_J(S) = [1, a)$ . 由  $P_\emptyset(S)$  的定义知

$$[1, a) = P_\emptyset(S) \cup \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j(S) \right) = P_\emptyset(S) \cup \left( \bigcup_{j \in I(S)} A_j(S) \right).$$

由此可得

$$[1, a) = P_\emptyset(S) \cup \left( \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I(S)} P_J(S) \right).$$

因此  $[1, a) = \bigcup_{J \subset I(S), |P_J(S)| > 0} P_J(S)$ , 从而  $\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是  $[1, a)$  的一个分划. 此外, 当  $S$  有界时, 由定理 2.6 知,  $I(S)$  是一个有限集, 因此  $\{J : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  是一个有限集. 证毕.

### 3 框架集

本节讨论问题 1 与 2. 我们将在第 2 节的基础上给出问题 1 与 2 的部分答案, 同时提供一些例子, 它们蕴含了本文之外的一些新想法. 首先回顾一些相关结论.

**定义 3.1** (见文 [42, 定义 2]) 设  $a > 1$ . 对任意  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  及 a.e.  $(x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , 定义

$$\Theta_a f(x, \xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^{\frac{l}{2}} f(a^l x) e^{-2\pi i l \xi}.$$

由文 [42, 引理 2.3] 知, 定义 3.1 中的  $\Theta_a$ -变换是一个由  $L^2(\mathbb{R}_+)$  到  $L^2([1, a) \times [0, 1))$  的西算子, 且具有伪周期性: 对任意  $j, m \in \mathbb{Z}$  及 a.e.  $(x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , 有

$$\Theta_a f(a^j x, \xi + m) = a^{-\frac{j}{2}} e^{2\pi i j \xi} \Theta_a f(x, \xi).$$

对任意  $F \in L^2([1, a) \times [0, 1))$ , 定义函数  $f$  为: 对任意  $j \in \mathbb{Z}$  及 a.e.  $x \in [1, a)$ ,

$$f(a^j x) = a^{-\frac{j}{2}} \int_0^1 F(x, \xi) e^{2\pi i j \xi} d\xi,$$

则  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , 且  $\Theta_a f = F$ .

由文 [45, 定理 2.1, 2.2, 3.3 与注 2.2] 或文 [42, 定理 2.5-2.7 与 3.9] 得:

**命题 3.2** 设  $a > 1$ ,  $\Psi$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个有限子集, 则下列叙述成立:

(i)  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中完备当且仅当对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$\sum_{\psi \in \Psi} |\Theta_a \psi(x, \xi)|^2 \neq 0.$$

(ii)  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中一个 Bessel 界为  $B$  的 Bessel 序列当且仅当对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$\sum_{\psi \in \Psi} |\Theta_a \psi(x, \xi)|^2 \leq B.$$

(iii)  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架界为  $A$  与  $B$  的框架当且仅当对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$A \leq \sum_{\psi \in \Psi} |\Theta_a \psi(x, \xi)|^2 \leq B.$$

(iv)  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基当且仅当它是一个框架, 且  $\text{card}(\Psi) = 1$ .

命题 3.2 是一个  $\Theta_a$ -变换域刻画. 文 [41, 定理 2.1 与 2.2] 给出了单个生成元  $\mathcal{MD}$ -Bessel 序列与  $\mathcal{MD}$ -框架的一个时域刻画.

**命题 3.3** 设  $a > 1$ ,  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , 定义  $\mathcal{A}(\cdot) = (\overline{D_{a^{j+l}}\psi(\cdot)})_{j,l \in \mathbb{Z}}$ , 则下列叙述成立:

(i)  $\mathcal{MD}(\psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中一个 Bessel 界为  $B$  的 Bessel 序列当且仅当在  $[1, a)$  上几乎处处有

$$\mathcal{A}^*(\cdot)\mathcal{A}(\cdot) \leq BI.$$

(ii)  $\mathcal{MD}(\psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架界为  $A$  与  $B$  的框架当且仅当在  $[1, a)$  上几乎处处有

$$AI \leq \mathcal{A}^*(\cdot)\mathcal{A}(\cdot) \leq BI.$$

由于一个 Riesz 基或框架一定是一个完备的 Bessel 序列. 我们首先刻画形如  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  的 Bessel 序列与完备序列.

**定理 3.4** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集, 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Bessel 序列当且仅当  $S$  上有界.

**证明** 先证充分性. 设  $S$  上有界, 则存在正常数  $M$ , 使得  $S \subset (0, M)$ . 由简单计算得: 对  $j > L = [\log_a M]$ , 有  $A_j(S) = \emptyset$ . 由此可得, 对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} |\Theta_a \chi_S(x, \xi)| &= \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{\frac{j}{2}} \chi_S(a^j x) e^{-2\pi i j \xi} \right| \leq \sum_{j=-\infty}^L a^{\frac{j}{2}} \\ &\leq \frac{a^{L+1}}{(\sqrt{a}-1)^2} < \infty. \end{aligned}$$

再利用命题 3.2 (ii) 可得,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中一个 Bessel 序列.

下证必要性. 用反证法. 假设  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中一个 Bessel 界为  $B$  的 Bessel 序列, 且  $S$  不是上有界的, 则存在正整数序列  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ , 使得

$$|S \cap [a^{n_k}, a^{n_k+1})| > 0,$$

即对任意的  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|A_{n_k}(S)| > 0.$$

任意固定  $k \in \mathbb{N}$ . 取  $c \in l^2(\mathbb{Z})$ , 使得  $c_{n_k} = 1$ , 且对任意  $n \neq n_k$ ,  $c_n = 0$ , 则  $\|c\| = 1$ , 且对任意的  $x \in A_{n_k}(S)$ , 有

$$a^{n_k} \|c\|^2 = a^{n_k} = |(\mathcal{A}(x)c)_0|^2 \leq \|\mathcal{A}(x)c\|^2,$$

其中  $(\mathcal{A}(x)c)_0$  表示  $\mathcal{A}(x)c$  的第零个分量. 注意到  $B$  是一个固定的正数, 则由  $n_k$  的任意性知,  $a^{n_k} \|c\|^2$  不可能以  $B \|c\|^2$  为上界. 再利用命题 3.3 (i) 得  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  不是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的一个 Bessel 序列. 与已知矛盾. 证毕.

下面定理用  $\text{range}(C_S)$  来刻画  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中形如  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  的完备  $\mathcal{MD}$ -系.

**定理 3.5** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集. 假设  $\text{range}(C_S)$  是一个有限集, 且  $\infty \notin \text{range}(C_S)$ , 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中完备当且仅当  $0 \notin \text{range}(C_S)$ .

**证明** 由命题 3.2 (i), 我们只需证明

$$0 \notin \text{range}(C_S) \tag{3.1}$$



当且仅当对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$\Theta_a \chi_S(x, \xi) \neq 0. \quad (3.2)$$

显然, (3.2) 可导出 (3.1). 下证 (3.1) 可导出 (3.2). 假设 (3.1) 成立, 且

$$\text{range}(C_S) = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \mathbb{N}.$$

由注 2.5 及定理 2.11 可得

$$[1, a) = \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0} P_J(S),$$

从而

$$[1, a) \times [0, 1) = \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0} (P_J(S) \times [0, 1)). \quad (3.3)$$

由  $P_J(S)$  的定义可得, 对任意  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 有

$$\text{card}(J) \in \text{range}(C_S) = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

因而  $J$  是一个有限集. 由此可得, 在每个  $P_J(S) \times [0, 1)$  上 (其中  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ ),

$$\Theta_a \chi_S(x, \xi) = \sum_{j \in J} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$$

是  $\xi$  的一个非零三角多项式, 因此, 对 a.e.  $(x, \xi) \in P_J(S) \times [0, 1)$ , 有

$$\Theta_a \chi_S(x, \xi) \neq 0. \quad (3.5)$$

由 (3.4) 知

$$\{J : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$$

是一可数集. 综上可得, 对 a.e.  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ ,

$$\Theta_a \chi_S(x, \xi) \neq 0.$$

证毕.

由定理 2.6 知, 若  $S$  有界, 则  $\text{range}(C_S)$  是一有限集. 但例 2.8, 2.9 说明其逆不成立. 定理 3.4 表明若  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的一个 Bessel 序列, 则  $S$  上有界. 直觉上,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  的框架下界条件可导出  $S$  下有界. 遗憾的是, 我们无法验证这一直觉. 对此, 下面的定理给出了这个问题的一个弱解. 若  $\text{range}(C_S)$  是一个有限集, 且  $\infty \notin \text{range}(C_S)$ , 我们的直觉成立. 由命题 3.2 (iv) 可知,  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中由单个函数生成的  $\mathcal{MD}$ - 框架一定是 Riesz 基. 因此, 不失一般性, 下面称由单个函数生成的  $\mathcal{MD}$ - 框架为 “Riesz 基”.

**定理 3.6** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一可测子集. 假设  $\text{range}(C_S)$  是一个有限集, 且  $\infty \notin \text{range}(C_S)$ . 若  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基, 则  $S$  一定下有界.

**证明** 用反证法. 设  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基, 但  $S$  不是下有界的, 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中一个完备 Bessel 序列. 从而由定理 3.4 与 3.5 得  $S$  上有界, 且  $0 \notin \text{range}(C_S)$ . 同时,  $S$  不是下有界意味着

$$T = \{n \in \mathbb{Z} : |A_n(S)| > 0\}$$

是一个无限集, 且存在常数  $N$ , 使得  $T \subset (-\infty, N)$ . 下证  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  没有框架下界以完成证明. 由于  $0, \infty \notin \text{range}(C_S)$ , 由定理 2.10 得

$$\text{range}(C_S) = \{\text{card}(J) : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}.$$

同时, 注意到  $\text{range}(C_S)$  是一个有限集, 则  $\{\text{card}(J) : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$  也是一个有限集. 取  $n_1 \in T$ , 则存在  $J_1 \subset I(S)$ , 使得  $n_1 \in J_1$ ,  $|P_{J_1}(S)| > 0$ . 由  $\text{card}(T) = \infty$ , 我们可取  $n_2 = \max\{j : j \in T \setminus J_1\}$ ,  $J_2 \subset I(S)$ , 使得  $n_2 \in J_2$ ,  $|P_{J_2}(S)| > 0$ . 无限重复此过程, 我们得到一个严格递减的整数序列  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = -\infty$ , 以及  $I(S)$  的一个子集序列  $\{J_k\}_{k=1}^\infty$  满足对每个  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n_k \in J_k$ ,  $|P_{J_k}(S)| > 0$ . 任意固定  $k \in \mathbb{N}$ . 取  $c \in l^2(\mathbb{Z})$ , 使得

$$c_l = \begin{cases} 1, & l = n_k; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则在  $P_{J_k}(S)$  上, 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\cdot)c\|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{j+n_k} \chi_{a^{-j-n_k}S}(\cdot) = \sum_{j \in J_k} a^j \\ &= a^{n_k} + \sum_{j \in J_k, j < n_k} a^j \leq a^{n_k} + \sum_{j=-\infty}^{n_k-1} a^j. \end{aligned}$$

由此可得, 在  $P_{J_k}(S)$  上

$$\|\mathcal{A}(\cdot)c\|^2 \leq \frac{a^{n_k+1}}{a-1},$$

从而当  $k$  足够大时,  $\|\mathcal{A}(\cdot)c\|^2$  将会任意小, 即我们找不到一个常数  $A > 0$ , 使得在  $[1, a)$  上几乎处处有

$$\|\mathcal{A}(\cdot)c\|^2 > A = A\|c\|^2.$$

再利用命题 3.3 (ii) 可得,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  没有框架下界. 证毕.

下面将给出问题 1 与问题 2 的部分答案. 为此, 首先引入“等差性质”概念.

**定义 3.7** 设  $J$  是  $\mathbb{Z}$  的一个有限子集. 若  $\text{card}(J) \geq 2$ , 且

$$j_2 - j_1 = j_3 - j_2 = \cdots = j_{\text{card}(J)} - j_{\text{card}(J)-1},$$

则称  $J$  有等差 ( $\mathcal{ED}$ ) 性质, 其中  $j_k$  表示  $J$  的第  $k$  小 (大) 的数.

**定理 3.8** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个有界可测子集, 且  $0 \notin \text{range}(C_S)$ . 假设  $I(S)$  的满足  $\text{card}(J) \geq 2$  与  $|P_J(S)| > 0$  的每个子集  $J$  (若有的话) 都具有  $\mathcal{ED}$  性质, 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基.

**证明** 因  $S$  有界, 由定理 3.4 知,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中的一个 Bessel 序列. 再由命题 3.2 (ii)–(iv) 知, 为完成定理证明, 我们只需证存在一个常数  $0 < A < \infty$ , 使得在  $[1, a) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \geq A. \quad (3.6)$$

由注 2.5 与定理 2.11 知, (3.6) 成立当且仅当对任意的  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \geq A. \quad (3.7)$$

注意到, 由定理 2.6,  $S$  有界可导出  $I(S)$  是一个有限集. 从而  $I(S)$  有有限多个子集. 因此, (3.7) 成立等价于对每个  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 都对应着一个常数  $0 < A(J) < \infty$ , 使得在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \geq A(J). \quad (3.8)$$

下面, 分两种情况来证明 (3.8).

**情况 1**  $\text{card}(J) = 1$ .

假设  $J = \{j_0\}$ , 则在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 = a^{j_0}.$$

**情况 2**  $\text{card}(J) \geq 2$ .

假设  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ , 其中  $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ , 则对 a.e.  $(x, \xi) \in P_J(S) \times [0, 1)$ , 有

$$|\Theta_a \chi_S(x, \xi)|^2 = \left| \sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi} \right|^2.$$

同时, 由于  $J$  有  $\mathcal{ED}$  性质, 我们有

$$j_2 - j_1 = j_3 - j_2 = \dots = j_n - j_{n-1} = d.$$

由此可得, 对 a.e.  $(x, \xi) \in P_J(S) \times [0, 1)$ , 有

$$|\Theta_a \chi_S(x, \xi)|^2 = a^{j_1} \left| \frac{(a^{\frac{d}{2}} e^{-2\pi i d \xi})^n - 1}{a^{\frac{d}{2}} e^{-2\pi i d \xi} - 1} \right|^2.$$

注意到, 等式的右边是  $[0, 1]$  上一个严格正的连续函数, 它的最小值  $A(J)$  是可达到的, 并且是严格正的. 从而在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \geq A(J).$$

证毕.

注意到, 具有基数 2 的任意集合都有  $\mathcal{ED}$  性质, 作为定理 3.8 的直接推论, 我们有

**推论 3.9** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个有界可测子集. 假设  $\text{range}(C_S) \subset \{1, 2\}$ , 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基.

定理 3.8 处理一般的伸缩常数 “ $a > 1$ ”, 其中  $\mathcal{ED}$  性质是一个技术性条件. 下面定理表明, 若伸缩常数  $a \geq 4$ , 该条件可以去掉.

**定理 3.10** 设  $a \geq 4$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个有界可测子集, 且  $0 \notin \text{range}(C_S)$ , 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基.

**证明** 由定理 3.8 前半段证明知, 我们只需证明对每个  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 都对应一个常数  $0 < A(J) < \infty$ , 使得在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$|\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \geq A(J). \quad (3.9)$$

注意到, 当  $\text{card}(J) = 2$  时,  $J$  有  $\mathcal{ED}$  性质, 则当  $\text{card}(J) = 1$  或 2 时类似于定理 3.8 的证明可以证明 (3.9). 下证当  $\text{card}(J) > 2$  时, (3.9) 成立. 假设  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ , 其中  $j_1 > j_2 > \dots > j_n$ , 则对 a.e.  $(x, \xi) \in P_J(S) \times [0, 1)$ , 有

$$|\Theta_a \chi_S(x, \xi)|^2 = \left| \sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi} \right|^2. \quad (3.10)$$

因  $\sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi}$  在  $[0, 1]$  上连续, (3.10) 是  $[0, 1]$  上的连续函数, 从而其最小值可以达到. 因此, 为完成定理证明, 我们只需证明函数  $|\sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi}|$  没有零点. 对任意  $\xi \in [0, 1]$ , 由于  $j_1 > j_2 > \cdots > j_n$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi} \right| &\geq a^{\frac{j_1}{2}} - (a^{\frac{j_2}{2}} + \cdots + a^{\frac{j_n}{2}}) \\ &\geq a^{\frac{j_1}{2}} - (a^{\frac{j_1-1}{2}} + a^{\frac{j_1-2}{2}} + \cdots + a^{\frac{j_1-(n-1)}{2}}). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=1}^n a^{\frac{j_l}{2}} e^{-2\pi i j_l \xi} \right| &\geq a^{\frac{j_1}{2}} - \frac{a^{\frac{j_1-1}{2}} [1 - (a^{-\frac{1}{2}})^{n-1}]}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} \\ &> a^{\frac{j_1}{2}} - \frac{a^{\frac{j_1-1}{2}}}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} \geq 0, \end{aligned}$$

其中条件  $a \geq 4$  用于最后一步. 证毕.

定理 3.8 与 3.10 给出了构造  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中形如  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  的 Riesz 基的两个容易实现的充分条件. 下面定理为我们提供了一种构造  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的形如  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  的冗余框架的方法, 其中  $\Psi = \{\chi_{S_l} : 1 \leq l \leq L\}$ . 定理表明, 我们可以通过对  $S$  的任意有限分解 (未必相互不交) 得到冗余框架  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$ .

**定理 3.11** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个可测子集,  $\{S_l : 1 \leq l \leq L\}$  是  $S$  的一族可测子集, 且满足条件  $S = \bigcup_{l=1}^L S_l$ , 以及对任意的  $1 \leq l \leq L$ ,  $|S_l| > 0$ , 其中  $1 < L < \infty$ . 定义

$$\Psi = \{\chi_{S_l} : 1 \leq l \leq L\}.$$

假设  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基, 则  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架但不是 Riesz 基.

**证明** 假设  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基, 则由命题 3.2 (iii) 与 (iv) 知, 存在常数  $0 < A_1 \leq B_1 < \infty$ , 使得在  $[1, a) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$A_1 \leq |\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \leq B_1. \quad (3.11)$$

由命题 3.2 (iii), 为完成证明, 我们只需证明存在常数  $0 < A \leq B < \infty$ , 使得在  $[1, a) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$A \leq \sum_{l=1}^L |\Theta_a \chi_{S_l}(\cdot, \cdot)|^2 \leq B. \quad (3.12)$$

注意到,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基, 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中完备, 从而  $0 \notin \text{range}(C_S)$ . 再由注 2.5 知  $|P_\emptyset(S)| = 0$ . 于是由定理 2.11 可得

$$\{P_J(S) : \emptyset \neq J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$$

是  $[1, a)$  的一个分划. 因此, (3.11) 等价于对每个  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$A_1 \leq |\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot)|^2 \leq B_1. \quad (3.13)$$

同时, 若存在常数  $0 < A \leq B < \infty$ , 使得对每个  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上

几乎处处有

$$A \leq \sum_{l=1}^L |\Theta_a \chi_{S_l}(\cdot, \cdot)|^2 \leq B, \quad (3.14)$$

则 (3.12) 成立. 下面我们证 (3.13) 可导出 (3.14) 来完成证明. 任意固定  $\emptyset \neq J \subset I(S)$ , 且  $|P_J(S)| > 0$ . 易证

$$P_J(S) \subset \bigcup_{l=1}^L P_J(S_l).$$

由此可得,  $P_J(S) \times [0, 1)$  中的每一个点至少落在一个  $P_J(S_l) \times [0, 1)$  中, 其中  $1 \leq l \leq L$ . 同时注意到, 对每个  $1 \leq l \leq L$ , 在  $[1, a) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$\Theta_a \chi_S(\cdot, \cdot) = \Theta_a \chi_{S_l}(\cdot, \cdot).$$

因此, 由 (3.13) 得, 在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上几乎处处有

$$A_1 \leq \sum_{l=1}^L |\Theta_a \chi_{S_l}(\cdot, \cdot)|^2 \leq LB_1.$$

证毕.

作为定理 3.11 的一个反问题, 我们自然会问: 可否由  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的形如  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  ( $\Psi = \{\chi_{S_l} : 1 \leq l \leq L\}$ ) 的冗余框架, 通过取  $S = \bigcup_{l=1}^L S_l$  以得到  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$ ? 下面两个例子说明该问题是复杂的.

**例 3.12** 给定  $1 < c < a$ , 设  $J_1, J_2$  是  $\mathbb{Z}$  的两个非空有限子集, 取

$$S_1 = \bigcup_{j \in J_1} a^j [1, c), \quad S_2 = \bigcup_{j \in J_2} a^j [c, a).$$

通过简单计算, 我们有

$$\Theta_a \chi_{S_1}(x, \xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^{\frac{l}{2}} \chi_{S_1}(a^l x) e^{-2\pi i l \xi} = \begin{cases} \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & (x, \xi) \in [1, c) \times [0, 1); \\ 0, & (x, \xi) \in [c, a) \times [0, 1), \end{cases}$$

以及

$$\Theta_a \chi_{S_2}(x, \xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^{\frac{l}{2}} \chi_{S_2}(a^l x) e^{-2\pi i l \xi} = \begin{cases} \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & (x, \xi) \in [c, a) \times [0, 1); \\ 0, & (x, \xi) \in [1, c) \times [0, 1). \end{cases}$$

由此可得

$$|\Theta_a \chi_{S_1}(x, \xi)|^2 + |\Theta_a \chi_{S_2}(x, \xi)|^2 = \begin{cases} \left| \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2, & (x, \xi) \in [1, c) \times [0, 1); \\ \left| \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2, & (x, \xi) \in [c, a) \times [0, 1), \end{cases}$$

以及对任意  $(x, \xi) \in [1, a) \times [0, 1)$ , 有

$$\Theta_a \chi_{S_1 \cup S_2}(x, \xi) = \Theta_a \chi_{S_1}(x, \xi) + \Theta_a \chi_{S_2}(x, \xi). \quad (3.15)$$

由命题 3.2 (ii)–(iv), 注意到,  $\sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$  与  $\sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$  都是连续函数, 下列叙述等价:

(i)  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架, 其中  $\Psi = \{\chi_{S_1}, \chi_{S_2}\}$ ;

(ii)  $\mathcal{MD}(\chi_{S_1 \cup S_2}, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基;

(iii)  $\sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$  与  $\sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$  在  $[0, 1)$  中均无零点.

**例 3.13** 给定  $1 < c < d < a$ , 设  $J_1, J_2$  是  $\mathbb{Z}$  的两个非空有限子集, 取  $S_1 = \bigcup_{j \in J_1} a^j [1, d)$ ,  $S_2 = \bigcup_{j \in J_2} a^j [c, a)$ , 则有

$$S_1 \cup S_2 = \left( \bigcup_{j \in J_1} a^j [1, c) \right) \cup \left( \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} a^j [c, d) \right) \cup \left( \bigcup_{j \in J_2} a^j [d, a) \right).$$

通过简单计算可得

$$\Theta_a \chi_{S_1}(x, \xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^{\frac{l}{2}} \chi_{S_1}(a^l x) e^{-2\pi i l \xi} = \begin{cases} \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & (x, \xi) \in [1, d) \times [0, 1); \\ 0, & (x, \xi) \in [d, a) \times [0, 1), \end{cases}$$

以及

$$\Theta_a \chi_{S_2}(x, \xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a^{\frac{l}{2}} \chi_{S_2}(a^l x) e^{-2\pi i l \xi} = \begin{cases} \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & (x, \xi) \in [c, a) \times [0, 1); \\ 0, & (x, \xi) \in [1, c) \times [0, 1). \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & |\Theta_a \chi_{S_1}(x, \xi)|^2 + |\Theta_a \chi_{S_2}(x, \xi)|^2 \\ &= \begin{cases} \left| \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2, & (x, \xi) \in [1, c) \times [0, 1); \\ \left| \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2 + \left| \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2, & (x, \xi) \in [c, d) \times [0, 1); \\ \left| \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \right|^2, & (x, \xi) \in [d, a) \times [0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

与

$$\Theta_a \chi_{S_1 \cup S_2}(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & x \in [1, c); \\ \sum_{j \in J_1 \cup J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & x \in [c, d); \\ \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, & x \in [d, a). \end{cases}$$

类似于例 3.12,  $\mathcal{MD}(\Psi, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个框架当且仅当

$$\sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \text{ 与 } \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$$

在  $[0, 1)$  中均无零点, 其中  $\Psi = \{\chi_{S_1}, \chi_{S_2}\}$ ;  $\mathcal{MD}(\chi_{S_1 \cup S_2}, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基当且仅当

$$\sum_{j \in J_1} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}, \sum_{j \in J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi} \text{ 与 } \sum_{j \in J_1 \cup J_2} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}$$

在  $[0, 1)$  中均无零点.

最后, 我们用一个猜想来结束本文. 设  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个有界可测子集. 由定理 2.6 与 3.5 知,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  在  $L^2(\mathbb{R}_+)$  中完备当且仅当  $0 \notin \text{range}(C_S)$ . 由定理 2.6 与 2.11 知

$$\{P_J(S) : J \subset I(S), |P_J(S)| > 0\}$$

是  $[1, a)$  的一个有限分划, 且每个  $J \subset I(S)$  都是一个有限集. 同时注意到, 对每个  $J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ , 在  $P_J(S) \times [0, 1)$  上  $\Theta_a(x, \xi)$  是如下三角多项式

$$\Theta_a(x, \xi) = \sum_{j \in J} a^{\frac{j}{2}} e^{-2\pi i j \xi}.$$

由命题 3.2 (iii) 与 (iv) 可得,  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基当且仅当上面的每个三角多项式都无零点, 即每个具有以下形式的代数多项式在单位圆上都无零点:

$$Q_J(z) = \sum_{j \in J} a^{\frac{j}{2}} z^j,$$

其中  $J \subset I(S)$ ,  $|P_J(S)| > 0$ . 直觉上这一事实应该是成立的, 毕竟系数 “ $a^{\frac{j}{2}}$ ” 太特殊了. 定理 3.10 表明,  $a \geq 4$  时该事实成立. 因此, 我们有以下猜想.

**猜想** 设  $a > 1$ ,  $S$  是  $\mathbb{R}_+$  的一个有界可测子集, 且  $0 \notin \text{range}(C_S)$ , 则  $\mathcal{MD}(\chi_S, a)$  是  $L^2(\mathbb{R}_+)$  的一个 Riesz 基.

**致谢** 感谢审稿人的宝贵意见.

## 参 考 文 献

- [1] Arambašić L., Bakić D., Rajić R., Dimension functions, scaling sequences, and wavelet sets, *Studia Math.*, 2010, **198**: 1–32.
- [2] Auscher P., Solution of two problems on wavelets, *J. Geom. Anal.*, 1995, **5**: 181–236.
- [3] Baggett L. W. H., Medina A., Merrill K. D., Generalized multi-resolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in  $\mathbb{R}^n$ , *J. Fourier Anal. Appl.*, 1999, **5**: 563–573.
- [4] Benedetto J. J., Benedetto R. L., The Construction of Wavelet Sets, Wavelets and Multiscale Analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, 2011: 17–56.
- [5] Benedetto J. J., Sumetkijakan S., Tight frames and geometric properties of wavelet sets, *Adv. Comput. Math.*, 2006, **24**: 35–56.
- [6] Benedetto J. J., King E. J., Smooth functions associated with wavelet sets on  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , and frame bound gaps, *Acta Appl. Math.*, 2009, **107**: 121–142.
- [7] Bownik M., Ross K., The structure of translation-invariant spaces on locally compact abelian groups, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2015, **21**: 849–884.
- [8] Cabrelli C., Paternostro V., Shift-invariant spaces on LCA groups, *J. Funct. Anal.*, 2010, **258**: 2034–2059.
- [9] Casazza P., Kalton N., Roots of complex polynomials and Weyl–Heisenberg frames, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2002, **130**: 2313–2318.
- [10] Christensen O., An Introduction to Frames and Riesz Bases, Springer, Birkhäuser, 2016.
- [11] Christensen O., Goh S. S., Fourier-like frames on locally compact abelian groups, *J. Approx. Theory*, 2015, **192**: 82–101.
- [12] Dai X., Diao Y., Gu Q., et al., Frame wavelet sets in  $\mathbb{R}^d$ , *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, **155**: 69–82.
- [13] Dai X., Diao Y., Gu Q., Frame wavelets with frame set support in the frequency domain, *Illinois J. Math.*, 2004, **48**: 539–558.
- [14] Dai X., Diao Y., Gu Q., et al., The existence of subspace wavelet sets, *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, **155**: 83–90.
- [15] Dai X., Larson D. R., Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1998, **134**: 68.
- [16] Dai X., Larson D. R., Speegle D. M., Wavelet sets in  $\mathbb{R}^n$ , *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, **3**: 451–456.

- [17] Dai X. R., Sun Q., The *abc*-problem for Gabor systems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2016, **244**: 99.
- [18] Fang X., Wang X., Construction of minimally supported frequency wavelets, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1995, **2**: 315–327.
- [19] Feichtinger H. G., Gröchenig K. H., Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, *I. J. Funct. Anal.*, 1989, **86**: 307–340.
- [20] Feichtinger H. G., Strohmer T., Gabor Analysis and Algorithms, Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [21] Feichtinger H. G., Strohmer T., Advances in Gabor Analysis, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [22] Fu X., Gabardo J. P., Construction of wavelet sets using integral self-affine multi-tiles, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, **20**: 234–257.
- [23] Gabardo J. P., Yu X. J., Construction of wavelet sets with certain self-similarity properties, *J. Geom. Anal.*, 2004, **14**: 629–651.
- [24] Gröchenig K., Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [25] Gu Q., Han D., When a characteristic function generates a Gabor frame, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2008, **24**: 290–309.
- [26] Han B., Framelets and Wavelets, Algorithms, Analysis, and Applications, Cham, Springer, 2017.
- [27] Han D., Larson, D.R., Frames, bases and group representations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2000, **147**: 94.
- [28] Heil C., A Basis Theory Primer, Expanded edition, Birkhäuser, New York, 2011.
- [29] Heil C., History and evolution of the density theorem for Gabor frames, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2007, **13**: 113–166.
- [30] Hernández E., Weiss G., A First Course on Wavelets, Boca Raton, CRC Press, 1996.
- [31] Hernández E., Wang X., Weiss G., Smoothing minimally supported frequency (MSF) wavelets: Part I, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1996, **2**: 329–340.
- [32] Hernández E., Wang X., Weiss G., Smoothing minimally supported frequency wavelets: Part II, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, **3**: 23–41.
- [33] Ionascu E. J., Larson D. R., Pearcy C. M., On wavelet sets, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1998, **4**: 711–721.
- [34] Ionascu E. J., A new construction of wavelet sets, *Real Anal. Exchange*, 2002, **28**: 593–609.
- [35] Ionascu E. J., Wang Y., Simultaneous translational and multiplicative tiling and wavelet sets in  $\mathbb{R}^2$ , *Indiana Univ. Math. J.*, 2006, **55**: 1935–1949.
- [36] Jakobsen M. S., Lemvig J., Reproducing formulas for generalized translation invariant systems on locally compact abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2016, **368**: 8447–8480.
- [37] Janssen A. J. E. M., Representations of Gabor frame Operators, Twentieth Century Harmonic Analysis—A Celebration (Il Ciocco, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 33, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 73–101.
- [38] Janssen A. J. E. M., Zak transforms with few zeros and the tie, Advances in Gabor Analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, MA, 2003: 31–70.
- [39] Kutyniok G., Labate D., The theory of reproducing systems on locally compact abelian groups, *Colloq. Math.*, 2006, **106**: 197–220.
- [40] Li Y. Z., Wang Y. H., The density theorem of a class of dilation-and-modulation systems on the half real line, arXiv:1712.02606.
- [41] Li Y. Z., Zhang W., Dilation-and-modulation systems on the half real line, *J. Inequal. Appl.*, 2016, **186**: 11.
- [42] Li Y. Z., Zhang W., Multi-window dilation-and-modulation frames on the half real line, *Sci. China Math.*, 2017, doi: 10.1007/s11425-018-9468-8.
- [43] Seip K., Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, **117**: 213–220.
- [44] Volkmer H., Frames of wavelets in Hardy space, *Analysis*, 1995, **15**: 405–421.
- [45] Wang Y. H., Li Y. Z., A class of vector-valued dilation-and-modulation frames on the half real line, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, **41**: 3900–3912.
- [46] Young R. M., An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980.
- [47] Yu X. J., Gabardo J. P., Nonuniform wavelets and wavelet sets related to one-dimensional spectral pairs, *J. Approx. Theory*, 2007, **145**: 133–139.