第62卷第6期 数学学报中文版 Vol.62, No.6
2019年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)06-0939-10 **文献标识码:** A

Banach 空间中度量广义逆的乘积扰动

杜法鹏

徐州工程学院数学与物理科学学院 徐州 221008
E-mail: jsdfp@163.com

薛以锋

华东师范大学算子代数研究中心
上海市核心数学与实践重点实验室
华东师范大学数学科学学院 上海 200241
E-mail: yfxue@math.ecnu.edu.cn

摘 要 设 X,Y 为自反严格凸 Banach 空间. 记 $A \in B(X,Y)$ 为具有闭值域 $R(A)$ 的有界线性算子, 有界线性算子 $T = EAF \in B(X,Y)$ 为 A 的乘积扰动. 本文研究了有界线性算子 A 的 Moore–Penrose 度量广义逆的乘积扰动. 在值域 $R(A)$ 为 α 阶一致强唯一和零空间 $N(A)$ 为 β 阶一致强唯一的条件下. 给出了 $\|T^M - A^M\|$ 的上界估计, 作为应用, 我们在 L^p 空间上讨论了 Moore–Penrose 度量广义逆的乘积扰动.

关键词 乘积扰动; Moore–Penrose 度量广义逆; 一致强唯一

MR(2010) 主题分类 15A09, 47A05, 47A55

中图分类 O177.2

Multiplicative Perturbations of Metric Generalized Inverse in Banach Space

Fa Peng DU

School of Mathematical & Physical Sciences, Xuzhou University of Technology,
Xuzhou 221008, *P. R. China*
E-mail: *jsdfp@163.com*

Yi Feng XUE

Research Center for Operator Algebras & Shanghai Key Laboratory of PMMP;
School of Mathematical Sciences,
East China Normal University, Shanghai 200241, *P. R. China*
E-mail: *yfxue@math.ecnu.edu.cn*

收稿日期: 2019-03-11; 接受日期: 2019-06-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11531003); 上海市科学技术委员会项目 (18dz2271000)

Abstract Suppose X, Y are reflexive strictly convex Banach spaces. Let $A \in B(X,Y)$ be a bounded linear operator with $R(A)$ closed. $T = EAF \in B(X,Y)$ is a multiplicative perturbation of A. In this paper, we investigate the multiplicative perturbations of the metric generalized inverse of A. We present the upper bound of $\|T^M - A^M\|$ under the condition that the range $R(A)$ and the null space $N(A)$ are uniformly strong unique of order α and order β, respectively. As an application, we consider the multiplicative perturbation of metric generalized inverse in L^p space.

Keywords multiplicative perturbation; metric generalized inverse; uniformly strong unique
MR(2010) Subject Classification 15A09, 47A05, 47A55
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

文中 X, Y 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的自反严格凸 Banach 空间. 记 $B(X,Y)$ 为由 X 映到 Y 上的有界线性算子的集合. 对任意的 $T \in B(X,Y)$, $R(T), N(T)$ 分别表示 T 的值域和零空间. 称满足方程 $ABA = A$ 与 $BAB = B$ 的算子 $B \in B(Y,X)$ 为 A 的一个 $\{1,2\}$ 逆, 通常记作 $B = A^+$.

广义逆的扰动分析在数值计算、统计、优化等各个领域有着很多重要的应用 [20, 23], 近几十年来得到广泛深入的研究. 然而, 线性广义逆在解决 Banach 空间中病态算子方程的极值问题、最小范数解问题、最佳逼近解问题中显得无能为力. 为解决 Banach 空间中病态算子方程的最佳逼近解问题, Nashed 和 Votruba 在 Banach 空间中引入了线性算子 (集值) 度量广义逆的概念 (见文 [18, 19]) .

设 $T \in B(X,Y)$, 任意给定 $b \in Y$, 算子方程 $Tx = b$ 在空间 X 中存在最佳逼近解. 定义

$$T^{\partial}(b) = \{x \in X : x \text{ 为 } Tx = b \text{ 的最佳逼近解}\}.$$

称映射 $b \to T^{\partial}(b)$ 为 T 的 (集值) 度量广义逆, 其中

$$D(T^{\partial}) = \{b \in Y : Tx = b \text{ 在 } X \text{ 中存在最佳逼近解}\}.$$

称满足 $T^{\sigma}(b) \in T^{\partial}(b)$ 的单值映射 (通常为非线性的) $T^{\sigma} : D(T^{\partial}) \to X$ 为度量广义逆 T^{∂} 的一个选择.

Nashed [18] 指出: 获得具有良好性质的选择是度量广义逆值得研究的问题. 2003 年, 王辉和王玉文在文 [21] 中引入了一个单值度量广义逆, 并称之为 Moore–Penrose 度量广义逆.

定义 1.1 [20, 21] 设 $T \in B(X,Y)$ 且 $\overline{R(T)}$ 与 $\overline{N(T)}$ 为 Chebyshev 子空间. 若存在齐性算子 T^M 满足

$$(1)\ TT^MT = T, \qquad (2)\ T^MTT^M = T^M,$$
$$(3)\ TT^M = \pi_{R(T)}, \qquad (4)\ T^MT = I - \pi_{N(T)},$$

则称 T^M 为 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆.

由文 [20, 21] 易知: 若值域 $R(T)$ 为闭的, 则 T^M 为有界齐性算子.

矩阵和算子广义逆的加法扰动问题在很多文献中进行了研究. 然而, 乘积扰动在数值线性代数的高相对精度算法分析中也扮演着重要角色 [3, 8–10]. 近年来, 矩阵和算子广义逆乘积扰动问

题的研究不断呈现. 在文 [4, 6] 中, 作者在 $(I+E)\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $(I+F)\in C^{n\times n}$ 都可逆的条件下, 研究了矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的乘积扰动矩阵 $\tilde{A}=(I+E)A(I+F)\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的 Moore–Penrose 逆的乘积扰动问题. 文 [24] 在弱扰动的概念下讨论了矩阵 $T=EAF^*$ 的 Moore–Penrose 逆. 群逆的乘积扰动问题在文 [16] 中进行了研究. 关于乘积扰动问题的更多讨论参见 [1, 5, 22] 等文献.

设 $A\in B(X,Y)$, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$. 本文研究了算子 A 的乘积扰动算子 $T=EAF$ 的 Moore–Penrose 度量广义逆. 在值域 $R(A)$ 为 α 阶一致强唯一和零空间 $N(A)$ 为 β 阶一致强唯一的条件下, 我们对算子 T 的 Moore–Penrose 度量广义逆 T^M 的乘积扰动进行了分析, 并将所得结果应用到 L^p 空间上.

2　预备知识

下文中将会用到的重要概念与引理.

引理 2.1 (见文 [13, 第 56 页])　设 M,N 为 Banach 空间 X 的闭子空间. P_M,P_N 分别为到 M,N 上的投影, 则 $N\subseteq M$ 等价于 $P_MP_N=P_N$.

引理 2.2　设 $A\in B(X,Y)$, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$ 且 $T=EAF\in B(X,Y)$. 若 E^+ 及 F^+ 存在且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$, 则 $F^+A^+E^+$ 为 T 的一个 $\{1,2\}$ 逆.

证明　直接验证可知. 证毕.

子空间间距是扰动分析的重要工具, 其概念如下:

定义 2.3 [13, 17]　设 M,N 为 Banach 空间 X 的子空间. 令

$$\delta(M,N)=\begin{cases}\sup\{\operatorname{dist}(x,N)\,|\,x\in M,\,\|x\|=1\}, & M\neq\{0\},\\ 0, & M=\{0\},\end{cases}$$

则称 $\hat{\delta}=\max\{\delta(M,N),\delta(N,M)\}$ 为 M 与 N 的间距.

由定义 2.3 易知如下的不等式:

$$\operatorname{dist}(x,N)\leq\|x\|\delta(M,N),\quad \forall\,x\in M.$$

关于子空间间距更多的性质参见文 [13, 17, 23].

接下来, 回顾 (集值) 度量投影的概念.

设 $M\subset X$ 为 Banach 空间 X 的子集. 定义点 $x\in X$ 到集合 M 的距离为

$$\operatorname{dist}(x,M)=\inf_{\forall y\in M}\|x-y\|.$$

集值映射 $P_M:X\rightrightarrows M$ 定义为

$$P_M(x)=\{z\in M\,|\,\|x-z\|=\operatorname{dist}(x,M)\},\ \ \forall\,x\in X,$$

则称 P_M 为从 X 到 M 上的 (集值) 度量投影.

若 $P_M(x)\neq\emptyset$, 则称 M 为迫近集. 若 $P_M(x)$ 为单点集, 则称 M 为 Chebyshev 集. 此时, 记 P_M 为 π_M. π_M 具有如下性质:

命题 2.4 [20]　设 $M\subset X$ 为 Banach 空间 X 的 Chebyshev 子集, 则

(1) $\pi_M^2(x)=\pi_M(x)$, $\forall\,x\in X$, 即 π_M 为幂等算子.

(2) $\|x-\pi_M(x)\|\leq\|x\|$, 从而 $\|\pi_M(x)\|\leq 2\|x\|$, $\forall\,x\in X$.

(3) $\pi_M(\lambda x)=\lambda\pi_M(x)$, $\forall\,x\in X$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, 即 π_M 为齐性算子.

(4) $\pi_M(x+z)=\pi_M(x)+\pi_M(z)=\pi_M(x)+z, \forall z\in M$, 即 π_M 在 M 上为拟可加的.

引理 2.5 [15] 设 X 为自反 Banach 空间, 则 X 为严格凸空间当且仅当任何非空闭凸子集 $M\subset X$ 为 Chebyshev 集.

注 2.6 由引理 2.5 可知, 对任何 $T\in B(X,Y)$, 若 $R(T)$ 闭, 则 Moore–Penrose 度量广义逆 T^M 存在.

下面的引理给出了 Moore–Penrose 度量广义逆 T^M 的表示.

引理 2.7 [11] 设 $T\in B(X,Y)$ 且 $R(T), N(T)$ 为 Chebyshev 子空间, 则

$$T^M=(I-\pi_{N(T)})T^-\pi_{R(T)},$$

且 T^M 不依赖于 $T^-\in B(Y,X)$ 的选取, 其中 T^- 满足等式 $TT^-T=T$.

设 $T\in B(X,Y)$. 定义算子 T 的最小约化模 $\gamma(T)$ 为:

$$\gamma(T)=\inf\{\|Tx\|\,|\,\mathrm{dist}(x,N(T))=1,\ \forall x\in D(T)\}$$

易知, $\gamma(T)\mathrm{dist}(x,N(T))\le\|Tx\|$.

引理 2.8 (见文 [17, 定理 2]) 设 $T\in B(X,Y)$, 则 $R(T)$ 闭当且仅当 $\gamma(T)>0$.

引理 2.9 (见文 [17, 定理 3]) 设 $T\in B(X,Y)$, 则 $\gamma(T)=\gamma(T^*)$, 其中 T^* 为 T 的伴随算子.

引理 2.10 (见文 [11, 引理 2.14]) 设 $T\in B(X,Y)$ 且 $R(T)$ 闭, 则 T^M 存在且

$$\frac{1}{\|T^M\|}\le\gamma(T)\le\frac{\|TT^M\|}{\|T^M\|}.$$

引理 2.11 设 $A\in B(X,Y)$, $E\in B(Y)$, $T=EA\in B(X,Y)$. 若 E^+ 存在且 $E^+EA=A$, 则 $\gamma(T)\le\|E\|\gamma(A)$.

证明 由 $E^+EA=A$ 知 $N(A)=N(EA)$. 因此, 对任何 $x\in X$, 有

$$\gamma(T)\mathrm{dist}(x,N(A))=\gamma(T)\mathrm{dist}(x,N(EA))\le\|Tx\|\le\|E\|\,\|Ax\|.$$

从而结论成立. 证毕.

引理 2.12 设 $A\in B(X,Y)$, $F\in B(X)$, $T=AF\in B(X,Y)$. 若 F^+ 存在且 $AFF^+=A$, 则 $\gamma(T)\le\|F\|\gamma(A)$.

证明 注意到 $T^*=F^*A^*$, $(F^*)^+F^*A^*=A^*$, 由引理 2.11 知

$$\gamma(T^*)\le\|F^*\|\gamma(A^*).$$

再由引理 2.9 知结论成立. 证毕.

引理 2.13 设 $A\in B(X,Y)$, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$, $T=EAF\in B(X,Y)$. 若 E^+, F^+ 存在且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$, 则

$$\gamma(T)\le\|E\|\,\|F\|\gamma(A).$$

证明 由引理 2.11 及 2.12 知

$$\gamma(T)=\gamma(EAF)\le\|E\|\gamma(AF)\le\|E\|\,\|F\|\gamma(A).$$

证毕.

注 2.14 在引理 2.13 的条件下可得 $A=E^+TF^+$. 故由引理 2.13 有

$$\gamma(A)\le\|E^+\|\,\|F^+\|\gamma(T).$$

从而可得: 若 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$, 则 $\gamma(T)>0$ 当且仅当 $\gamma(A)>0$.

接下来, 借助于子空间间距对度量投影的乘积扰动进行分析, 首先我们给出如下命题.

命题 2.15　设 $A \in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E \in B(Y)$, $F \in B(X)$, $T = EAF \in B(X,Y)$. 若 E^+, F^+ 存在且 $E^+EA = A$, $AFF^+ = A$, 则 $E^+\pi_{R(T)}E$ 与 $I - F(I - \pi_{N(T)})F^+$ 分别为到 $R(A)$ 和 $N(A)$ 上的投影算子, 并且有

$$(I - \pi_{R(A)})E^+\pi_{R(T)}E = 0,\ \ (I - E^+\pi_{R(T)}E)\pi_{R(A)} = 0,$$
$$F(I - \pi_{N(T)})F^+\pi_{N(A)} = 0,\ \ (I - \pi_{N(A)})(I - F(I - \pi_{N(T)})F^+) = 0.$$

证明　由注 2.14 知 $R(T)$ 闭, 因而 T^M 存在.

由 $E^+EA = A$ 易知 $E^+\pi_{R(T)}E$ 为幂等算子. 再由 $AFF^+ = A$ 知等式 $\pi_{N(T)}(F^+F - I) = F^+F - I$ 成立, 从而 $F\pi_{N(T)}F^+F = F\pi_{N(T)}$. 因此 $F\pi_{N(T)}F^+$ 为幂等算子. 简单计算可知 $I - F(I - \pi_{N(T)})F^+$ 也是幂等算子.

由 $E^+EA = A$, $AFF^+ = A$ 可知 $R(A) = R(AF)$, $N(EA) = N(A)$.

又由 $R(E^+\pi_{R(T)}E) \subseteq R(AF)$ 和 $E^+\pi_{R(T)}EAF = AF$, 可得

$$R(E^+\pi_{R(T)}E) = R(AF) = R(A).$$

从而可知 $E^+\pi_{R(T)}E$ 为到 $R(A)$ 上的投影算子.

由 $EAF(I - \pi_{N(T)})F^+ = EA$ 和 $N(EA) \subseteq N(F(I - \pi_{N(T)})F^+)$, 可知

$$N(F(I - \pi_{N(T)})F^+) = N(EA) = N(A).$$

从而 $I - F(I - \pi_{N(T)})F^+$ 为到 $N(A)$ 上的投影算子.

由引理 2.1 易得如下等式:

$$(I - \pi_{R(A)})E^+\pi_{R(T)}E = 0,\ \ (I - E^+\pi_{R(T)}E)\pi_{R(A)} = 0,$$
$$F(I - \pi_{N(T)})F^+\pi_{N(A)} = 0,\ \ (I - \pi_{N(A)})(I - F(I - \pi_{N(T)})F^+) = 0.$$

证毕.

推论 2.16　设 $A \in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E \in B(Y)$, $F \in B(X)$, $T = EAF \in B(X,Y)$. 若 E, F 为可逆算子, 则 $E^{-1}\pi_{R(T)}E$ 与 $F\pi_{N(T)}F^{-1}$ 分别为到 $R(A)$ 和 $N(A)$ 上的投影算子, 并且下列等式成立:

$$\pi_{R(A)} = E^{-1}\pi_{R(T)}E\pi_{R(A)},\ \ \ \pi_{R(T)} = E\pi_{R(A)}E^{-1}\pi_{R(T)},$$
$$\pi_{N(T)} = F^{-1}\pi_{N(A)}F\pi_{N(T)},\ \ \ \pi_{N(A)} = F\pi_{N(T)}F^{-1}\pi_{N(A)}.$$

引理 2.17　设 $A \in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E \in B(Y)$, $F \in B(X)$, $T = EAF \in B(X,Y)$. 若 E^+, F^+ 存在且 $E^+EA = A$, $AFF^+ = A$, 则

(1) $\delta(R(A), R(T)) \leq \|I - E\|$;

(2) $\delta(N(T), N(A)) \leq \|I - F\|$.

证明　(1) 对任意的 $u \in R(A)$ 且 $\|u\| = 1$, 存在 $y \in Y$, 使得 $AA^My = u$. 再由 $AFF^+ = A$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(u, R(T)) &\leq \|u - EAF(F^+)A^My\| \\ &= \|(I - E)AA^My\| \leq \|I - E\|\,\|AA^My\| \\ &\leq \|I - E\|\,\|u\|.\end{aligned}$$

因而, $\delta(R(A),R(T))\le\|I-E\|$.

(2) 由 $E^+EA=A$ 知 $N(EA)=N(A)$. 对任意的 $u\in N(T)$ 且 $\|u\|=1$, 有 $Tu=EAFu=0$, 即有 $Fu\in N(EA)=N(A)$. 故

$$\mathrm{dist}(u,N(A))\le\|u-Fu\|\le\|I-F\|.$$

因而 $\delta(N(T),N(A))\le\|I-F\|$. 证毕.

命题 2.18 设 $A\in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$, $T=EAF\in B(X,Y)$. 若 E^+,F^+ 存在且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$, 则

(1) $\|(I-\pi_{R(T)})\pi_{R(A)}\|\le\|I-E\|\,\|\pi_{R(A)}\|$,

(2) $\|(I-\pi_{N(A)})\pi_{N(T)}\|\le\|I-F\|\,\|\pi_{N(T)}\|$.

证明 对任意的 $x\in X$, 由引理 2.17 知

$$\begin{aligned}\|(I-\pi_{R(T)})\pi_{R(A)}x\|&=\mathrm{dist}(\pi_{R(A)}x,R(T))\\&\le\|\pi_{R(A)}x\|\delta(R(A),R(T))\\&\le\|I-E\|\,\|\pi_{R(A)}x\|.\end{aligned}$$

因而结论 (1) 成立.

类似于结论 (1) 可证得结论 (2). 证毕.

3 扰动分析

文 [14, 定义 2.1] 中定义度量投影 π_M 在 M 处 $\alpha\le1$ 阶强唯一为: 如果对每个 $x\in X$ 都存在常数 $\gamma_M(x)\in(0,1]$ (仅依赖于 x 和 M), 使得对每个 $m\in M$ 有

$$\gamma_M(x)\|\pi_Mx-m\|^\alpha\le\|x-m\|^\alpha-\|x-\pi_Mx\|^\alpha. \tag{3.1}$$

曹建兵和薛以锋在文 [2] 中对 $\alpha\le1$ 阶强唯一的概念进行了改进, 引入了在 M 处 $\alpha\le1$ 阶一致强唯一的概念.

定义 3.1 (见文 [2, 定义 3.1]) 设 X 为自反严格凸 Banach 空间, M 为闭子空间. π_M 称为在 M 处 $\alpha\le1$ 阶一致强唯一, 如果存在常数 $\gamma_M\in(0,1]$, 使得对每个 $x\in X$ 和 $m\in M$,都有

$$\gamma_M\|\pi_Mx-m\|^\alpha\le\|x-m\|^\alpha-\|x-\pi_Mx\|^\alpha. \tag{3.2}$$

引理 3.2 (见文 [14, 定理 2.1]) 设 M 为赋范空间 X 的闭线性子空间, 度量投影 π_M 满足强唯一条件 (3.1), 则对任意的 $x\in X$ 和闭子空间 $N\subset X$, 有

$$\|\pi_Mx-\pi_Nx\|\le10\gamma_M(x)^{-\frac{1}{\alpha}}\|x\|\hat{\delta}(M,N)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

引理 3.3 设 $A\in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$, 使得 E^+,F^+ 存在. 设 $T=EAF\in B(X,Y)$ 且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$. 若 $\pi_{R(A)}$ 在 $R(A)$ 处 α 阶一致强唯一, $\pi_{N(A)}$ 在 $N(A)$ 处 β 阶一致强唯一, 则

(1) $\|\pi_{R(A)}y-\pi_{R(T)}y\|\le10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\|y\|\max\{\|I-E\|^{\frac{1}{\alpha}},\|I-E^+\|^{\frac{1}{\alpha}}\},\ \forall y\in Y$;

(2) $\|\pi_{N(A)}x-\pi_{N(T)}x\|\le10\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|x\|\max\{\|I-F\|^{\frac{1}{\beta}},\|I-F^+\|^{\frac{1}{\beta}}\},\ \forall x\in X$;

(3) $\|(I-\pi_{N(A)})x-(I-\pi_{N(A)})y\|\le[1+2(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}})^{\frac{1}{\beta}}][\|x\|+\|y\|]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\|x-y\|^{\frac{1}{\beta}}$.

证明 注意到 $A=E^+TF^+$, $EE^+T=T$ 和 $TF^+F=T$, 由引理 2.17 知

$$\delta(R(T),R(A))\leq\|I-E^+\|.$$

因而, $\hat{\delta}(R(A),R(T))\leq\max\{\|I-E\|,\|I-E^+\|\}$. 再由引理 3.2 可知结论 (1) 成立.

类似于 (1) 的证明可知 (2) 成立.

结论 (3) 来自于文 [2, 命题 3.5 (2)]. 证毕.

引理 3.4 设 $A\in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$, 使得 E^+,F^+ 存在. 设 $T=EAF\in B(X,Y)$ 且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$. 若 $\pi_{R(A)}$ 在 $R(A)$ 处 α 阶一致强唯一, 则对任意的 $y\in Y$, 存在 $z\in N(A)$, 使得

$$\|T^My-A^My-z\|\leq\|A^M\|\big\{\|A-T\|\,\|T^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\big\}\|y\|,$$

及

$$\|T^My\|+\|A^My+z\|\leq3\|T^My\|+\|A^My\|.$$

其中, $\Delta_E=\max\{\|I-E\|^{\frac{1}{\alpha}},\|I-E^+\|^{\frac{1}{\alpha}}\}$.

证明 令

$$\Delta_E=\max\{\|I-E\|^{\frac{1}{\alpha}},\|I-E^+\|^{\frac{1}{\alpha}}\}.$$

由引理 3.3 可知

$$\|AA^My-TT^My\|=\|\pi_{R(A)}y-\pi_{R(T)}y\|\leq10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\|y\|\Delta_E.$$

从而

$$\begin{aligned}\|A(T^My-A^My)\|&=\|AT^My-TT^My+TT^My-AA^My\|\\&\leq\|A-T\|\,\|T^My\|+\|TT^My-AA^My\|\\&\leq\|A-T\|\,\|T^M\|\,\|y\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\|y\|.\end{aligned}$$

因为 $N(A)$ 闭, 故存在 $z\in N(A)$, 使得

$$\begin{aligned}\|T^My-A^My-z\|&=\mathrm{dist}(T^My-A^My,N(A))\\&\leq\frac{1}{\gamma(A)}\|A(T^My-A^My)\|\quad(\text{因 }R(A)\text{ 闭})\\&\leq\|A^M\|\,\|A(T^My-A^My)\|.\end{aligned}$$

从而

$$\|T^My-A^My-z\|\leq\|A^M\|\big\{\|A-T\|\,\|T^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\big\}\|y\|.$$

再由

$$\|T^My-A^My-z\|=\mathrm{dist}(T^My-A^My,N(A))\leq\|T^My-A^My\|,$$

可得

$$\|T^My\|+\|A^My+z\|\leq\|T^My\|+\|T^My-A^My\|+\|T^My\|\leq3\|T^My\|+\|A^My\|.$$

证毕.

定理 3.5 设 $A\in B(X,Y)$ 且 $R(A)$ 闭, $E\in B(Y)$, $F\in B(X)$, 使得 E^+,F^+ 存在. 设 $T=EAF\in B(X,Y)$ 且 $E^+EA=A$, $AFF^+=A$. 若 $\pi_{R(A)}$ 在 $R(A)$ 处 α 阶一致强唯一, $\pi_{N(A)}$ 在 $N(A)$ 处 β 阶一致强唯一, 则 T^M 存在且

(1) $T^M=(I-\pi_{N(T)})F^+A^ME^+\pi_{R(T)}$,

(2) $\|T^M\|\le 2\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\|T^M-A^M\|}{\|A^M\|}&\le 20\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|F^+\|\,\|E^+\|\Delta_F\\&\quad+\left[1+2\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}}\right]^{\frac{1}{\beta}}\right)(3\|F^+\|\,\|E^+\|+1)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\\&\quad\times\left\{2\|A-T\|\,\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\right\}^{\frac{1}{\beta}},\end{aligned}$$

其中
$$\Delta_E=\max\{\|I-E\|^{\frac{1}{\alpha}},\|I-E^+\|^{\frac{1}{\alpha}}\},\quad \Delta_F=\max\{\|I-F\|^{\frac{1}{\beta}},\|I-F^+\|^{\frac{1}{\beta}}\}.$$

证明 由 $R(A)$ 闭知 $\gamma(A)>0$. 由引理 2.13 知 $\gamma(T)>0$, 故 $R(T)$ 闭, 从而 T^M 存在.

由引理 2.2 和 2.7 易知 (1) 成立. 由 (1) 可得 (2). 接下来证明 (3).

由引理 3.3 和 3.4 知, 对任意的 $y\in Y$, 存在 $z\in N(A)$, 使得

$$\begin{aligned}\|T^My-A^My\|&=\|T^My-A^MA(A^My+z)\|\\&=\|T^My-A^MAT^My+A^MAT^My-A^MA(A^My+z)\|\\&\le\|(I-A^MA)T^My\|+\|A^MAT^My-A^MA(A^My+z)\|\\&=\|(I-T^MT)T^My-(I-A^MA)T^My\|+\|A^MAT^My-A^MA(A^My+z)\|\\&=\|\pi_{N(T)}T^My-\pi_{N(A)}T^My\|+\|(I-\pi_{N(A)})T^My-(I-\pi_{N(A)})(A^My+z)\|\\&\le 10\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|T^My\|\Delta_F+\left[1+2\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right][\|T^My\|\\&\quad+\|A^My+z\|]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\|T^My-A^My-z\|^{\frac{1}{\beta}}\\&\le 10\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|T^My\|\Delta_F+\left[1+2\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right](3\|T^M\|+\|A^M\|)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\\&\quad\times\|A^M\|^{\frac{1}{\beta}}\left\{\|A-T\|\,\|T^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\right\}^{\frac{1}{\beta}}\|y\|\\&\le 20\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|\Delta_F\|y\|+\left[1+2\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right](3\|F^+\|\,\|E^+\|+1)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\\&\quad\times\|A^M\|\left\{2\|A-T\|\,\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\right\}^{\frac{1}{\beta}}\|y\|.\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}\frac{\|T^My-A^My\|}{\|A^M\|}&\le 20\gamma_{N(A)}^{-\frac{1}{\beta}}\|F^+\|\,\|E^+\|\Delta_F\|y\|+\left[1+2\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N(A)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right](3\|F^+\|\,\|E^+\|+1)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\\&\quad\times\left\{2\|A-T\|\,\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|+10\gamma_{R(A)}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta_E\right\}^{\frac{1}{\beta}}\|y\|.\end{aligned}$$

证毕.

最后, 我们考虑 L^p 空间上度量广义逆的乘积扰动问题.

引理 3.6[14] 设 $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$ 且 M, N 为 L^p 的闭线性子空间, 则

$$\|P_M f - P_N f\|_p \le \begin{cases} 10c_p^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p \hat{\delta}(M,N)^{\frac{1}{p}}, & 2 \le p < \infty, \\ 10(p-1)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_p \hat{\delta}(M,N)^{\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2, \end{cases}$$

其中, $c_p = (p-1)(1+s)^{2-p}$ 且 s 为函数 $t^{p-1} - (p-1)t - (p-2)$ 唯一的正零点.

推论 3.7 设 $X = L^p(\Omega, \mu)$ $(1 < p < \infty)$. $A, E, F \in B(X)$ 且 $R(A)$ 闭, E^+, F^+ 存在. 设 $T = EAF \in B(X)$. 若 $E^+EA = A$, $AFF^+ = A$, 则 T^M 存在且

(1) $T^M = (I - \pi_{N(T)})F^+A^ME^+\pi_{R(T)}$;

(2) $\|T^M\| \le 2\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\|$.

此外

(I) 当 $2 \le p < \infty$ 时,

$$\frac{\|T^M - A^M\|}{\|A^M\|} \le 20c_p^{-\frac{1}{p}}\|F^+\|\,\|E^+\|\Delta_F^p + \left[1 + 2\left(\frac{p}{2c_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right](3\|F^+\|\,\|E^+\| + 1)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\times \left\{2\|A - T\|\,\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\| + 10c_p^{-\frac{1}{p}}\Delta_E^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

其中, $c_p = (p-1)(1+s)^{2-p}$ 且 s 为函数 $t^{p-1} - (p-1)t - (p-2)$ 唯一的正零点,

$$\Delta_E^p = \max\{\|I - E\|^{\frac{1}{p}}, \|I - E^+\|^{\frac{1}{p}}\}, \quad \Delta_F^p = \max\{\|I - F\|^{\frac{1}{p}}, \|I - F^+\|^{\frac{1}{p}}\}.$$

(II) 当 $1 < p \le 2$ 时,

$$\frac{\|T^M - A^M\|}{\|A^M\|} \le 20(p-1)^{-\frac{1}{2}}\|F^+\|\,\|E^+\|\Delta_F^2 + (1 + 2(p-1)^{-\frac{1}{2}})(3\|F^+\|\,\|E^+\| + 1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{2\|A - T\|\,\|F^+\|\,\|E^+\|\,\|A^M\| + 10(p-1)^{-\frac{1}{2}}\Delta_E^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\Delta_E^2 = \max\{\|I - E\|^{\frac{1}{2}}, \|I - E^+\|^{\frac{1}{2}}\}, \quad \Delta_F^2 = \max\{\|I - F\|^{\frac{1}{2}}, \|I - F^+\|^{\frac{1}{2}}\}.$$

参 考 文 献

[1] Cai L., Xu W., Li W., Additive and multiplicative perturbation bounds for the Moore-Penrose inverse, *Linear Algebra Appl.*, 2011, **434**: 480–489.

[2] Cao J., Xue Y., Perturbation analysis of the Moore–Penrose metric generalized inverse with applications, *Banach J. Math. Anal.*, 2018, **3**(12): 709–729.

[3] Castro-González N., Ceballos J., Dopico F. M., et al., Accurate solution of structured least squares problems via rank-revealing decompositions, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2013, **34**: 1112–1128.

[4] Castro-González N., Ceballos J., Dopico F. M., et al., Multiplicative Perturbation Theory and Accurate Solution of Least Squares Problems, Technical report, http://gauss.uc3m.es/web/personal web/fdopico/index sp.html, 2013.

[5] Castro-González N., Ceballos J., Dopico F. M., et al., Accurate solution of structured least squares problems via rank-revealing decompositions, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2013, **34**: 1112–1128.

[6] Castro-González N., Dopico F. M., Molera J. M., Multiplicative perturbation theory of the Moore–Penrose inverse and the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 2016, **503**: 1–25.

[7] Deutsch F., Linear selections for the metric projection, *J. Funct. Anal.*, 1982, **49**: 269–292.

[8] Demmel J., Accurate singular value decompositions of structured matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, **21**: 562–580.

[9] Dopico F. M., Koev P., Molera J. M., Implicit standard Jacobi gives high relative accuracy, *Numer. Math.*, 2009, **113**: 519–553.

[10] Drmač Z., Veselić K., New fast and accurate Jacobi SVD algorithm, I, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2008, **29**: 1322–342. .

[11] Du F., Perturbation analysis for the Moore–Penrose metric generalized inverse of bounded linear operators, *Banach J. Math. Anal.*, 2015, **4**(9): 100–114.

[12] Karmarkar N., A new polynomial–time algorithm for linear programming, *Combinatorics*, 1984, **4**: 373–395.

[13] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1984.

[14] Kroó A., Pinkus A., On stability of the metric projection operator, *SIAM J. Math. Anal.*, 2003, **45**(2): 639–661.

[15] Li J., The metric projection and its applications to sloving variational inequalities in Banach spaces, *Fixed Point Theory*, 2004, **5**(2): 285–298.

[16] Meng L., Zheng B., Multiplicative perturbation bounds of the group invese and oblique projection, *Filomat*, 2016, **30**(12): 3171–3175.

[17] Müller V., Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras, Birkhäuser Verlag AG, 2nd Edn., 2007.

[18] Nashed M. Z., Generalized Inverse and Applications, Academic Press, New York, 1976.

[19] Nashed M. Z., Votruba G. F., A unified approach to generalized inverses of linear operators: II, Extremal and proximinal properties, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, **80**: 831–835.

[20] Wang Y., Theory of Generalized Inverse of Operators on Banach Spaces and its Application (in Chinese), Science Press, Beijing, 2005.

[21] Wang H., Wang Y., Metric generalized inverse of linear operator in Banach spaces, *Chin. Ann. Math.*, 2003, **24B**(4): 509–520.

[22] Xu Q., Song C., Wang G., Multiplicative perturbations of matrices and the generalized triple reverse order law for the Moore–Penrose inverse, *Linear Algebra Appl.*, 2017, **530**: 366–383.

[23] Xue Y., Stable Perturbations of Operators and Related Topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.

[24] Zhang X., Fang X., Song C., et al., Representations and norm estimations for the Moore–Penrose inverse of multiplicative perturbations of matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 2017, **65**: 555–571.