

文章编号: 0583-1431(2019)06-0903-10

文献标识码: A

多项式的特征和及其 L -函数

张佳凡 吕星星

西北大学数学学院 西安 710127

E-mail: zhangjiafan@stumail.nwu.edu.cn; lvxingxing@stumail.nwu.edu.cn

摘 要 本文使用解析方法及特征和的性质研究了一类多项式的特征和与模 p 的狄利克莱 L -函数的混合幂均值的计算问题, 并给出了它们的一些计算公式.

关键词 狄利克莱 L -函数; 多项式的特征和; 混合幂均值; 解析方法; 计算公式

MR(2010) 主题分类 11L03, 11L05

中图分类 O156.4

On the Character Sums of Polynomials and L -functions

Jia Fan ZHANG Xing Xing LV

*School of Mathematics, Northwest University,
Xi'an 710127, P. R. China*

E-mail: zhangjiafan@stumail.nwu.edu.cn; lvxingxing@stumail.nwu.edu.cn

Abstract The main purpose of this paper is using the analytic methods and the properties of character sums to study the computational problem of one kind hybrid power mean involving the character sums of polynomials and Dirichlet L -functions modulo p , an odd prime, and give some exact computational formulas for them.

Keywords Dirichlet L -functions; character sums of polynomials; hybrid power mean; analytic method; computational formula

MR(2010) Subject Classification 11L03, 11L05

Chinese Library Classification O156.4

1 引言

令 $q \geq 3$ 为整数, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$ 为复数, χ 表示模 q 的一个狄利克莱特征, $L(s, \chi)$ 表示对应于 χ 的狄利克莱 L -函数. 对任意正整数 N 和 M , $M > N$, 以及 n 次有理系数多项式 $f(x)$, 模 q 的多项式的特征和定义为

$$S(\chi, f; q) = \sum_{a=N+1}^{N+M} \chi(f(a)).$$

收稿日期: 2019-01-02; 接受日期: 2019-06-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771351)

通讯作者: 吕星星

众所周知, $S(\chi, f; q)$ 的上界估计是解析数论中非常经典的问题. 这一领域的任何实质性进展必将对解析数论的发展发挥重要作用. 因此, 许多学者研究了 $S(\chi, f; q)$ 的估计问题, 并得到了一系列有趣的结果. 例如, Pólya 和 Vinogradov 给出了突破性的结果 (见文 [1, 定理 8.21 和 13.15]), 证明了对于模 q 的任意非主特征 χ , 有估计式

$$\sum_{a=N+1}^{N+M} \chi(a) \ll q^{\frac{1}{2}} \ln q,$$

其中符号 $A \ll B$ 表示存在某一常数 c , 使得 $|A| < cB$.

当 $q = p$ 为奇素数时, Weil [9] 证明了一个一般而又重要的结论: 令 χ 为模 p 的 q 次特征, 多项式 $f(x)$ 不是模 p 的一个完全 q 次幂, 则有估计式

$$\left| \sum_{x=N+1}^{N+M} \chi(f(x)) \right| \ll p^{\frac{1}{2}} \ln p, \quad (1.1)$$

其中 (1.1) 中的主项 $p^{\frac{1}{2}}$ 是最佳的. 事实上, 存在许多多项式 $f(x)$, 使得

$$\left| \sum_{a=1}^q \chi(f(a)) \right| = \sqrt{q}.$$

例如, 张文鹏和易媛在文 [15] 中给出了一系列多项式 $f(x) = (x-r)^m(x-s)^n$, 使得

$$\left| \sum_{a=1}^q \chi((a-r)^m(a-s)^n) \right| = \sqrt{q},$$

其中 $(r-s, q) = 1$, m, n 及 χ 满足一些特定的条件.

而 (1.1) 中的次要项 $\ln p$ 也很难改进, 也就是说对任意实数 $0 < \beta < 1$, 我们甚至不能把次要项改进为 $\ln^\beta p$.

其它与多项式特征相关的结果也可在一些解析数论书中找到 [6, 7], 有关多项式特征和的论文可参阅 [2-5, 14]. 本文主要研究 $S(\chi, f; p)$ 及模 p 的狄利克莱 L -函数的混合幂均值的计算问题, 即

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(f(a)) \right|^{2\alpha} \cdot |L(1, \chi)|^2, \quad (1.2)$$

其中 α 为实数, $f(x)$ 是一个多项式, $\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 p 的所有奇特征 χ 求和.

关于这个问题, 张文鹏 [10] 研究了特殊多项式 $f(x) = x$ 的情况, 并证明了以下结论: 对任意正数 N , $1 < N < \sqrt{q}$, 有渐近公式

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}} \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq \chi_0}} \chi(n) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6} \frac{\phi^2(q)}{q} N \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + O(\phi(q) 2^{\omega(q)} \ln^2 q) \\ &+ \frac{\pi^2}{3} \frac{\phi^2(q)}{q} \frac{N}{\zeta(3)} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2 + p + 1} \right) \sum_{\substack{m=1 \\ (m+n, q)=1}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ (m+n, q)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} + O(N^3 \ln^2 q), \end{aligned}$$

其中

$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}}$ 表示模 p 的所有非主特征的和, $\sum_{m=1}^{\infty}$ 表示所有使得 $(m, q) = 1$ 成立的 m 的和,

$\omega(q)$ 表示 q 的不同素因子个数.

在一篇未发表的文章中, Shparlinski 将 N 的范围从 $1 < N \leq \sqrt{q}$ 改进到 $1 < N \leq q^{1-\varepsilon}$, 其中 ε 是任意固定的正数.

另外有一些与 L -函数的混合幂均值相关的论文, 有兴趣的读者可以参考 [11, 16].

本文中, 对于一些特殊多项式 $f(x)$, 我们利用解析方法及特征和的性质研究 (1.2) 的计算问题, 并给出一些确切的计算公式. 具体地说也就是证明以下几个结论:

定理 1.1 令 p 为奇素数, α 为任意实数, 则对任意整数 m 满足 $(m, p) = 1$, 正整数 k, h 满足 $(h, p-1) = (h+k, p-1) = 1$, 则有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^{2\alpha} \cdot |L(1, \chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot p^{\alpha-2} \cdot (p-1)^2 \cdot (p-2).$$

定理 1.2 令 p 为奇素数, 则对任意正整数 k, h 满足 $(h, p-1) = 1, (h+k, p-1) = 2$, 整数 m 满足 $(m, p) = 1$, 则有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2 \cdot (p-2)}{p}, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2(p-2) - 12 \cdot (p-1) \cdot h_p^2}{p}, & p \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

其中 h_p 表示二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ 的类数.

定理 1.3 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 则对模 p 的任意特征 χ 且 $\chi^4 \neq \chi_0$, 有恒等式

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + a) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + ra) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + r^2a) \right|^2 = 9p;$$

若 $\chi = \left(\frac{*}{p}\right) = \chi_2$ 是模 p 的勒让德符号, 则有

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + a}{p}\right) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + ra}{p}\right) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + r^2a}{p}\right) \right|^2 = 3(2p+1),$$

其中 r 是模 p 的三次非剩余.

定理 1.4 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 则有恒等式

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + a}{p}\right) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + ra}{p}\right) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + r^2a}{p}\right) \right|^4 \\ &= 18p^2 + 36p + 3 - 12\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\lambda) \cdot \tau^3(\bar{\lambda}\chi_2)}{p^2} - 12\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\bar{\lambda}) \cdot \tau^3(\lambda\chi_2)}{p^2}, \end{aligned}$$

其中 λ 表示模 p 的三阶特征, 即就是 $\lambda \neq \chi_0, \lambda^3 = \chi_0$.

由定理 1.1-1.4 可推导出以下几个推论:

推论 1.5 令 p 为奇素数且 $p \equiv 5 \pmod{12}$, 则对任意整数 m 且 $(m, p) = 1$, 有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \pmod{p} \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^4 \cdot |L(1, \chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot (p-1)^2 \cdot (p-2).$$

推论 1.6 令 p 为奇素数且 $p \equiv 11 \pmod{12}$, 则对任意整数 m 且 $(m, p) = 1$, 有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \pmod{p} \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2(p-2) - 12 \cdot (p-1) \cdot h_p^2}{p}.$$

推论 1.7 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 则 $\frac{2p+1}{3}$ 为整数, 而且它可以表示为三个整数的平方和, 即

$$\frac{2p+1}{3} = \left| \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + a}{p} \right) \right|^2 + \left| \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + ra}{p} \right) \right|^2 + \left| \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + r^2a}{p} \right) \right|^2.$$

推论 1.8 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 则有渐近公式

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + a}{p} \right) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + ra}{p} \right) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + r^2a}{p} \right) \right|^4 = 18p^2 + O(p^{\frac{3}{2}}).$$

2 几个基本引理

本节将会用到模 q 的经典高斯和的许多性质, 它的定义如下:

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^q \chi(a) e\left(\frac{a}{q}\right), \text{ 其中 } e(y) = e^{2\pi i y}.$$

如果 χ 是模 q 的原特征或者 $(n, q) = 1$, 则有恒等式

$$\sum_{a=1}^q \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right) = \bar{\chi}(n) \tau(\chi) \text{ 以及 } |\tau(\chi)| = \sqrt{q}.$$

$\tau(\chi)$ 的其他性质也可以在解析数论书比如 [1, 6, 7] 中找到, 这里不再赘述.

由高斯和的性质我们可以证明以下几个简单引理:

引理 2.1 令 p 为奇素数, χ 为模 p 的任意非主特征, 则对任意正整数 k, h 满足 $(h, p-1) = 1$, 有恒等式

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 = \begin{cases} p, & \chi^{k+h} \neq \chi_0 \text{ 且 } \chi^k \neq \chi_0, \\ 1, & \chi^{k+h} = \chi_0 \text{ 或 } \chi^k = \chi_0. \end{cases}$$

证明 对任意整数 m 且 $(m, p) = 1$, 如果 χ^k 和 χ^{k+h} 都不是模 p 的主特征, 由于 $(h, p-1) = 1$, 因此, 当 a 通过模 p 的完全剩余系时, a^h 也通过模 p 的完全剩余系, 由经典高斯和及三角和的性质可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 &= \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^k(a) \chi(a^h + m) \right|^2 = \left| \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} \chi^k(a) e\left(\frac{b(a^h + m)}{p}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{p} \sum_{b=1}^{p-1} \sum_{d=1}^{p-1} \bar{\chi}(b\bar{d}) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{c=1}^{p-1} \chi^k(a\bar{c}) e\left(\frac{b(a^h + m) - d(c^h + m)}{p}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \sum_{b=1}^{p-1} \sum_{d=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{c=0}^{p-1} \chi^k(a) e\left(\frac{dc^h(ba^h-1)+dm(b-1)}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a^k \bar{b}) \sum_{c=0}^{p-1} \sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{dc(ba^h-1)+dm(b-1)}{p}\right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a^k \bar{b}) \sum_{c=0}^{p-1} e\left(\frac{c(ba^h-1)}{p}\right) \sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{d(b-1)}{p}\right) \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ ba^h \equiv 1 \pmod{p}}}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a^k \bar{b}) \sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{d(b-1)}{p}\right) \\
&= p \cdot \sum_{\substack{a=1 \\ a^h \equiv 1 \pmod{p}}}^{p-1} \chi(a^k) - \sum_{\substack{a=1 \\ ba^h \equiv 1 \pmod{p}}}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a^k \bar{b}) \\
&= p \cdot \chi(1) - \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h}) = p, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

其中用到 $\chi^{k+h} \neq \chi_0$, $\chi^k \neq \chi_0$ 和性质 $\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h}) = \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^k) = 0$. 如果 $\chi^k = \chi_0$, 则由高斯和的性质可得

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 &= \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^h + m) \right|^2 = \left| \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{b(a^h + m)}{p}\right) \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{ba + mb}{p}\right) \right|^2 = \left| \frac{-1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) e\left(\frac{mb}{p}\right) \right|^2 = 1. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

同理, 如果 $\chi^{k+h} = \chi_0$, 则有恒等式

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 &= \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(1 + m\bar{a}^h) \right|^2 = \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(\bar{m} + a^h) \right|^2 \\
&= \left| \frac{-1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\chi}(b) e\left(\frac{\bar{m}b}{p}\right) \right|^2 = 1. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

由 (2.1)–(2.3) 可得引理 2.1. 证毕.

为证引理 2.2, 首先给出模 p 的三次特征的定义. 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$. 对于模 p 的非主特征 χ , 如果存在模 p 的特征 χ_1 , 使得 $\chi = \chi_1^3$, 则称 χ 为模 p 的三次特征, 且有如下结论:

引理 2.2 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 对任意整数 m , $(m, p) = 1$. 如果 χ 不是模 p 的三次特征, 则有

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 = 0;$$

如果 χ 是模 p 的三次特征且 $\chi^4 \neq \chi_0$, 则有恒等式

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 &= 3p + \bar{\lambda}(m) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\
&\quad + \lambda(m) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1);
\end{aligned}$$

如果 χ 是模 p 的三次特征且 $\chi^4 = \chi_0$, 则有恒等式

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 = 2p + 1 + \bar{\lambda}(m) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\ + \lambda(m) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1),$$

其中 λ 是模 p 的任意三阶特征, 即 $\lambda \neq \chi_0$ 且 $\lambda^3 = \chi_0$.

证明 如果 χ 不是模 p 的三次特征, 则存在整数 r 使得 $r^3 \equiv 1 \pmod{p}$ 且 $\chi(r) \neq 1$. 因此, 由模 p 的简化剩余系的性质可得

$$\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) = \sum_{a=1}^{p-1} \chi((ra)^4 + mra) = \chi(r) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(r^3 a^4 + ma) = \chi(r) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma),$$

或者

$$(1 - \chi(r)) \cdot \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) = 0. \quad (2.4)$$

因为 $\chi(r) \neq 1$, 故由 (2.4) 可得恒等式

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 = 0. \quad (2.5)$$

如果 χ 是模 p 的三次特征, 则对任意整数 m 且 $(m, p) = 1$ 有恒等式

$$\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right) = 1 + \sum_{a=1}^{p-1} (1 + \lambda(a) + \bar{\lambda}(a)) e\left(\frac{ma}{p}\right) = \lambda(m)\tau(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}(m)\tau(\lambda),$$

其中 λ 为模 p 的任意三阶特征.

由高斯和的性质以及 (2.1) 的证明方法可得

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \sum_{c=0}^{p-1} \sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{dc^3(ba^3 - 1) + md(b-1)}{p}\right) \\ = \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \sum_{d=0}^{p-1} e\left(\frac{md(b-1)}{p}\right) - \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \\ + \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \sum_{d=1}^{p-1} (\lambda(d(ba^3 - 1))\tau(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}(d(ba^3 - 1))\tau(\lambda)) e\left(\frac{md(b-1)}{p}\right) \\ = p \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) - \sum_{a=1}^{p-1} \chi^4(a) + \frac{\tau(\lambda)\tau(\bar{\lambda})}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \lambda(ba^3 - 1) \bar{\lambda}(m(b-1)) \\ + \frac{\tau(\lambda)\tau(\bar{\lambda})}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a\bar{b}) \bar{\lambda}(ba^3 - 1) \lambda(m(b-1)) \\ = 3p + \bar{\lambda}(m) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a) \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\ + \lambda(m) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1), \quad (2.6)$$

如果 $\chi^4 \neq \chi_0$, 其中用到恒等式 $\tau(\lambda)\tau(\bar{\lambda}) = p$.

如果 $\chi^4 = \chi_0$, 则有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^4 + ma) \right|^2 &= 2p + 1 + \bar{\lambda}(m) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a) \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\ &\quad + \lambda(m) \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

由 (2.5)–(2.7) 可得引理 2.2. 证毕.

引理 2.3 对任意奇素数 p , 有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} |L(1, \chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2(p-2)}{p^2}.$$

证明 见张文鹏 [12, 13] 或 Walum [8]. 证明从略.

引理 2.4 令 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{3}$, λ 是模 p 的三阶特征, 则有恒等式

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \right|^2 \\ &= p^2 + 4p - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\lambda) \cdot \tau^3(\bar{\lambda}\chi_2)}{p^2} - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\bar{\lambda}) \cdot \tau^3(\lambda\chi_2)}{p^2}, \end{aligned}$$

其中 $\chi_2 = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ 为模 p 的勒让德符号.

证明 对任意整数 $1 \leq b \leq p-1$, 有 $\chi_2(b^2 a) = \chi_2(a)$, 由模 p 的简化剩余系的性质可得

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a \bar{b}^2) \bar{\lambda}(b^4 \bar{b}^6 a^3 - 1) \lambda(b-1) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(\bar{b}^2 a^3 - 1) \lambda(b-1) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(\bar{b}^2 a - 1) \lambda(ba - 1) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) \lambda(b^3 a - 1) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) \lambda(a - \bar{b}^3) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) \lambda(b^3 - a) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) \sum_{b=1}^{p-1} (1 + \lambda(b) + \bar{\lambda}(b)) \lambda(b-a) \\ &= \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) \sum_{b=1}^{p-1} (1 + \lambda(ba) + \bar{\lambda}(ba)) \lambda(ba-a) \\ &= -2 \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) + \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a(a-1)) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b(b-1)). \quad (2.8) \end{aligned}$$

由经典高斯和的性质可得恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a-1) &= \frac{1}{\tau(\lambda)} \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) e\left(\frac{ba-b}{p}\right) \\ &= \frac{\tau(\chi_2)}{\tau(\lambda)} \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b) \chi_2(b) e\left(\frac{-b}{p}\right) = \chi_2(-1) \cdot \frac{\tau(\chi_2) \cdot \tau(\lambda \chi_2)}{\tau(\lambda)}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

同理, 我们有

$$\sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(a) \bar{\lambda}(a-1) = \chi_2(-1) \frac{\tau^2(\bar{\lambda} \chi_2)}{\tau(\lambda)} \quad (2.10)$$

及

$$\sum_{a=1}^{p-1} \lambda(a(a-1)) = \frac{\tau^2(\lambda)}{\tau(\bar{\lambda})} = \frac{\tau^3(\lambda)}{p}. \quad (2.11)$$

结合 (2.8)–(2.11) 可得恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \\ = -2\chi_2(-1) \cdot \frac{\tau(\chi_2) \cdot \tau(\lambda \chi_2)}{\tau(\lambda)} + \chi_2(-1) \frac{\tau^2(\lambda) \cdot \tau^2(\bar{\lambda} \chi_2)}{p}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

因为 $|\tau(\lambda)|^2 = |\tau(\bar{\lambda} \chi_2)|^2 = p$, $\tau(\lambda)\tau(\bar{\lambda}) = p$ 及 $\overline{\tau(\chi_2)\tau(\lambda \chi_2)} = \tau(\chi_2)\tau(\bar{\lambda} \chi_2)$, 由 (2.12) 可得

$$\begin{aligned}\left| \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b=1}^{p-1} \chi_2(a) \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \right|^2 \\ = \left| -2\chi_2(-1) \cdot \frac{\tau(\chi_2) \cdot \tau(\lambda \chi_2)}{\tau(\lambda)} + \chi_2(-1) \frac{\tau^2(\lambda) \cdot \tau^2(\bar{\lambda} \chi_2)}{p} \right|^2 \\ = p^2 + 4p - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\lambda) \cdot \tau^3(\bar{\lambda} \chi_2)}{p^2} - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\bar{\lambda}) \cdot \tau^3(\lambda \chi_2)}{p^2},\end{aligned}$$

即证引理 2.4.

3 定理的证明

下面证明我们的几个定理. 首先证明定理 1.1. 令 p 为奇素数. 如果正整数 h 和 k 满足 $(h, p-1) = (k+h, p-1) = 1$, 则对于任意整数 m 且 $(m, p) = 1$ 及模 p 的任意奇特征 χ , 有 $\chi^k \neq \chi_0$ 且 $\chi^{k+h} \neq \chi_0$. 故由引理 2.1 和 2.3 可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^{2\alpha} \cdot |L(1, \chi)|^2 &= p^\alpha \cdot \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} |L(1, \chi)|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{12} \cdot p^{\alpha-2} \cdot (p-1)^2 \cdot (p-2),\end{aligned}$$

即证定理 1.1.

接下来证明定理 1.2. 令 p 为素数且 $p \equiv 3 \pmod{4}$, 则勒让德符号 $\chi_2 = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ 为模 p 的一个奇特征. 如果 $(h, p-1) = 1$ 且 $(h+k, p-1) = 2$, 则 $\chi(-1) = -1$ 和 $\chi^{k+h} = \chi_0$ 只对模 p 的勒让德符号成立. 由恒等式 $|L(1, \chi_2)| = \pi \cdot \frac{h_p}{\sqrt{p}}$, 引理 2.1 及 2.3 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 \\ &= \sum_{\substack{\chi(-1)=-1 \\ \chi \neq \chi_2}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(1 + m\bar{a}^h) \right|^2 \cdot |L(1, \chi_2)|^2 \\ &= p \cdot \sum_{\substack{\chi(-1)=-1 \\ \chi \neq \chi_2}} |L(1, \chi)|^2 + |L(1, \chi_2)|^2 = p \cdot \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} |L(1, \chi)|^2 - (p-1) \cdot |L(1, \chi_2)|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2 \cdot (p-2)}{p} - \pi^2 \cdot \frac{p-1}{p} \cdot h_p^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

如果 p 为奇素数且 $p \equiv 1 \pmod{4}$, 则对任意正整数 h, k 满足 $(h, p-1) = 1$ 及 $(k+h, p-1) = 2$, 不存在模 p 的奇特征 χ 使得 $\chi^{h+k} = \chi_0$ 或者 $\chi^k = \chi_0$ 成立. 故由引理 2.1 和 2.3 可得

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a^{k+h} + ma^k) \right|^2 \cdot |L(1, \chi)|^2 = p \cdot \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} |L(1, \chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(p-1)^2 \cdot (p-2)}{p}. \quad (3.2)$$

由 (3.1) 及 (3.2) 可得定理 1.2.

下面证明定理 1.3, 对模 p 的任意三次非剩余 r 及三阶特征 λ , 有恒等式

$$1 + \lambda(r) + \lambda^2(r) = 0. \quad (3.3)$$

如果 χ 是模 p 的非实特征且 $\chi^3 \neq \chi_0, \chi^4 \neq \chi_0$, 则由 (3.3) 及引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + a) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + ra) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi^3(a^4 + r^2a) \right|^2 \\ &= 9p + (1 + \bar{\lambda}(r) + \bar{\lambda}(r^2)) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\ & \quad + (1 + \lambda(r) + \lambda(r^2)) \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \\ &= 9p. \end{aligned} \quad (3.4)$$

显然

$$\chi_2 = \chi_2^3 \neq \chi_0 \text{ 且 } \chi_2^4 = \chi_0,$$

故由 (3.3) 及引理 2.2 可得

$$\left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + a}{p} \right) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + ra}{p} \right) \right|^2 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a^4 + r^2a}{p} \right) \right|^2 = 6p + 3. \quad (3.5)$$

由 (3.4) 和 (3.5) 可得定理 1.3.

下证定理 1.4. 因为 $1 + \lambda(r) + \lambda(r^2) = 1 + \lambda(r) + \bar{\lambda}(r) = 0$, 由引理 2.2 和 2.4 可得

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a^4 + a) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a^4 + ra) \right|^4 + \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a^4 + r^2a) \right|^4 \\
 &= 3(2p+1)^2 + 2(2p+1) \left(1 + \bar{\lambda}(r) + \bar{\lambda}(r^2) \right) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \\
 & \quad + 2(2p+1) \left(1 + \lambda(r) + \lambda(r^2) \right) \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \\
 & \quad + (1 + \lambda(r) + \lambda(r^2)) \left(\sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \right)^2 \\
 & \quad + (1 + \bar{\lambda}(r) + \bar{\lambda}(r^2)) \left(\sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \bar{\lambda}(b^4 a^3 - 1) \lambda(b-1) \right)^2 + 6 \cdot \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \right|^2 \\
 &= 3(2p+1)^2 + 6 \cdot \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi_2(a) \sum_{b=1}^{p-1} \lambda(b^4 a^3 - 1) \bar{\lambda}(b-1) \right|^2 \\
 &= 3(2p+1)^2 + 6 \left(p^2 + 4p - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\lambda) \cdot \tau^3(\bar{\lambda}\chi_2)}{p^2} - 2\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\bar{\lambda}) \cdot \tau^3(\lambda\chi_2)}{p^2} \right) \\
 &= 18p^2 + 36p + 3 - 12\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\lambda) \cdot \tau^3(\bar{\lambda}\chi_2)}{p^2} - 12\tau(\chi_2) \frac{\tau^3(\bar{\lambda}) \cdot \tau^3(\lambda\chi_2)}{p^2}.
 \end{aligned}$$

这就完成了所有结果的证明.

致谢 本文得到导师张文鹏的细心指导并提出了许多宝贵的修改意见, 在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Apostol Tom M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [2] Bourgain J., Garaev M. Z., Konyagin S. V., et al., On the hidden shifted power problem, *SIAM J. Comput.*, 2012, **41**: 1524–1557.
- [3] Burgess D. A., On character sums and primitive roots, *Proc. London Math. Soc.*, 1962, **12**: 179–192.
- [4] Burgess D. A., On Dirichlet characters of polynomials, *Proc. London Math. Soc.*, 1963, **13**: 537–548.
- [5] Granville A., Soundararajan K., Large character sums: Pretentious characters and the Pólya-Vinogradov theorem, *J. Amer. Math. Soc.*, 2007, **20**: 357–384.
- [6] Ireland K., Rosen M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [7] Pan C. D., Pan C. B., Goldbach Conjecture, Science Press, Beijing, 1992.
- [8] Walum H., An exact formula for an average of L -series, *Illinois Journal of Mathematics*, 1982, **26**: 1–3.
- [9] Weil A., On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1948, **34**: 203–210.
- [10] Zhang W. P., On the mean value of L -functions with the weight of character sums, *Journal of Number Theory*, 2008, **128**: 2459–2466.
- [11] Zhang W. P., Moments of Generalized Quadratic Gauss Sums Weighted by L -Functions, *Journal of Number Theory*, 2002, **92**: 304–314.
- [12] Zhang W. P., Lecture Notes in Contemporary Mathematics, Science Press, Beijing, 1989: 173–179.
- [13] Zhang W. P., On the mean values of Dedekind Sums, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1996, **8**: 429–442.
- [14] Zhang W. P., Yao W. L., A note on the Dirichlet characters of polynomials, *Acta Arith.*, 2004, **115**: 225–229.
- [15] Zhang W. P., Yi Y., On Dirichlet characters of polynomials, *Bull. London Math. Soc.*, 2002, **34**: 469–473.
- [16] Zhang W. P., Yi Y., He X. L., On the $2k$ -th Power Mean of Dirichlet L -Functions with the Weight of General Kloosterman Sums, *Journal of Number Theory*, 2000, **84**: 199–213.