第62卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.6
2019年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2019

**文章编号:** 0583-1431(2019)06-0889-14 **文献标识码: A**

# 自由半群的估计熵和 Δ- 弱混合集

钟兴富

广东外语外贸大学数学与统计学院 广州 510006
E-mail: xfzhong@gdufs.edu.cn

**摘　要**　本文对自由半群作用的动力系统引入了估计熵和 Δ- 弱混合集的概念, 得到一些性质. 通过引入 Δ- 熊混沌集, 给出了 Δ- 弱混合集的一个等价刻画.

**关键词**　拓扑熵; 估计熵; Δ- 弱混合
**MR(2010) 主题分类**　37B05, 37B20, 54H20
**中图分类**　O193

**Estimation Entropy and Δ-weakly Mixing Sets for Free Semigroup Actions**

Xing Fu ZHONG

*School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou* 510006*, P. R. China*
*E-mail*: *xfzhong@gdufs.edu.cn*

**Abstract**　We introduce the notion of estimation entropy for semigroup action systems and give some properties. Furthermore, we investigate the concept of Δ-weakly mixing sets for semigroup actions and give a characterisation of Δ-weakly mixing sets by Δ-Xiong chaotic sets.

**Keywords**　topological entropy; estimation entropy; Δ-weakly mixing set
**MR(2010) Subject Classification**　37B05, 37B20, 54H20
**Chinese Library Classification**　O193

## 1　引言

Adler 等人 [1] 为了刻画拓扑动力系统的复杂性于 1965 年引入了拓扑熵. 随后, Dinaburg [13] 和 Bowen [5] 应用张成集和分离集的概念给出了拓扑熵的一个等价定义. 1973 年, Bowen [6] 给出了拓扑熵的一个类似于 Hausdorff 维数的刻画. 1984 年, Pesin 与 Pitskel [31] 进一步研究了拓扑熵的维数特征.

在 1999 年和 2004 年, Bufetov [7] 和 Biś [3] 分别对有限生成的自由半群作用引入了两种拓扑熵 (本文分别称之为平均拓扑熵和最大拓扑熵). 2011 年, Ma 和 Wu [25] 利用 Carathéodory–Pesin

收稿日期: 2019-01-02; 接受日期: 2019-06-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771459, 11701584); 广东外语外贸大学青年项目 (18QN30)

结构研究了最大拓扑熵的维数特征. 随后, Wang 和 Ma [35] 以及 Wang 等人 [36] 将最大熵和平均熵推广到底空间非紧的情形. 2017 年, Tang 等人 [34] 给出了平均拓扑熵的开覆盖定义. 2018 年, Huang 和 Zhong 在文 [16] 中将最大熵和平均熵推广到了有限型子转移作用的系统上. 2016 年, Lin 等人 [24] 对自由半群作用引入了一种测度熵 (本文称之为平均测度熵) 且证明了平均测度熵的上确界小于平均拓扑熵. 2017 年, Hui 和 Ma [18] 进一步研究了平均测度熵的性质. 2018 年, Carvalho 等人在文 [9] 中推广了平均测度熵.

在控制领域, 一些学者已经将文 [1, 5, 6] 中拓扑熵的想法用于刻画网络控制系统在完成相关任务时需要的最小数据率. 比如, Nair 等人于 2004 年在文 [29] 中引入的拓扑反馈熵, Colonius 和 Kawan 于 2009 年引入的不变熵 [12], Savkin 在 2006 年为了研究不确定控制系统的能观性引入的拓扑熵 [26, 32] 以及 Liberzon 和 Mitra 在 2016 年引入的估计熵 [20, 23]. 2013 年, Colonius 等人在文 [11] 中证明了拓扑反馈熵和不变熵等价. 2018 年, Huang 和 Zhong 研究了这两种熵的维数特征 [15]. 由于有限生成的自由半群可以被看成是一类控制系统 [33], 我们自然可以对自由半群考虑 Savkin 在文 [32] 中引入的拓扑熵 (这种拓扑熵在文 [23] 中被称为估计熵). 另一方面, Kelly 和 Tennant [21] 于 2015 年对集值动力系统引入了一种拓扑熵. 当我们把离散控制系统作为集值动力系统考虑时, 文 [21] 中的拓扑熵正好对应 Savkin [32] 引入的估计熵. 集值动力系统上还有另外一种拓扑熵, 见文 [8]. 就我们所知而言, 研究自由半群估计熵的文献非常少. 这也正是写此文的动力之一.

正拓扑熵和弱混合均被认为是拓扑动力系统中的两种混沌. Xiong 和 Yang [38] 在 1999 年对弱混合给出了一个非常漂亮的刻画: 熊混沌. 2012 年, Blanchard 和 Huang [4] 引入了弱混合集的概念并证明了正拓扑熵系统具有弱混合集. 2017 年, Huang 等人 [14] 引入了对角线弱混合集 ($\Delta$- 弱混合集) 且证明了正拓扑熵系统还有对角线弱混合集. 同一年, Hui 和 Ma [19] 对自由半群引入了弱混合并得到弱混合的一些性质. 2018 年, Huang 和 Zhong [17] 证明了自由半群的弱混合有类似的熊混沌刻画.

本文研究紧致度量空间上的有限生成自由半群系统的估计熵和对角线弱混合. 第 2 节回顾最大熵和平均熵的定义 [16], 并给出估计熵的定义, 得到了估计熵和平均熵的一些关系. 第 3 节给出了估计熵的一个开覆盖定义, 得到了一些基本性质. 第 4 节引入对角线弱混合集的概念, 并通过引入对角线熊混沌给出了对角线弱混合集的一个等价刻画.

## 2 自由半群的拓扑熵

设 $\mathscr{I}=\{0,1,\ldots,k-1\}$ 是一个有限字母表, 其中 $k\in\mathbb{N}$ 大于 0. 再设

$$\mathscr{I}^n=\{u=(\omega_0\cdots\omega_{n-1})\,|\,\omega_i\in\mathscr{I},\,i=0,\ldots,n-1\},\quad n\in\mathbb{N},\quad \mathscr{I}^*=\bigcup_{n\geq 1}\mathscr{I}^n,$$

$$\mathscr{I}^{\mathbb{N}}=\{u=(\omega_0\omega_1\omega_2\cdots)\,|\,\omega_i\in\mathscr{I}\}.$$

对 $\mathscr{I}^*$ 中的任意两个字 $u$, $v$, 用 $uv$ 表示 $u$ 和 $v$ 的连接. 称 $u$ 是 $v$ 的前缀, 如果存在 $x$, 使得 $ux=v$, 记为 $u\sqsubseteq v$. 设 $a,b$ 是整数, $w\in\mathscr{I}^*$, 记 $w_{[a,b]}=w_a\cdots w_b$.

设 $(X,d)$ 为紧致度量空间. 考虑 $X$ 上的有限生成自由半群作用 $G$, 即存在 $X$ 上的有限个连续映射 $\mathscr{G}=\{f_0,f_1,\ldots,f_{k-1}\}$, 使得 $G=\bigcup_n G_n$, 其中 $G_n=\{f_\omega=f_{\omega_{n-1}}\circ\cdots\circ f_{\omega_0}\,|\,\omega=(\omega_0\cdots\omega_{n-1})\in\mathscr{I}^n\}$. 把此系统记为 $(X,\mathscr{G})$.

现在回顾 Biś [3] 和 Bufetov [7] 引入的两种拓扑熵. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $w\in\mathscr{I}^n$, 定义 $X$ 上的两个距离 $D_n$ 和 $d_w$ 如下:

$$D_n(x,y)=\max_{0\le i\le n}\{d(g(x),g(y)):g\in G_i\} \tag{2.1}$$

和

$$d_w(x,y)=\max_{w'\sqsubseteq w} d(f_{w'}(x),f_{w'}(y)). \tag{2.2}$$

设 $Z\subset X$, $\varepsilon>0$, 称 $E\subset X$ 是 $Z$ 的一个 $(n,\varepsilon,Z)$- 生成集, 如果对任意的 $x\in Z$ 存在 $y\in E$, 使得 $D_n(x,y)\le\varepsilon$. 称 $F\subset Z$ 是 $Z$ 的一个 $(n,\varepsilon,Z)$- 分离集, 如果 $F$ 中的任意两个不同的元素 $x,y$ 均满足 $D_n(x,y)>\varepsilon$. 用 $R(n,\varepsilon,Z)$ 和 $S(n,\varepsilon,Z)$ 分别表示 $Z$ 的生成集的最小基数和分离集的最大基数.

类似地, 对任意的 $w\in\mathscr{I}^n$ 和 $\varepsilon>0$, 可以定义 $Z$ 的相对于距离 $d_w$ 的 $(w,\varepsilon)$- 生成集和 $(w,\varepsilon)$- 分离集. 用 $N_{\mathrm{span}}(w,\varepsilon,Z)$ 和 $N_{\mathrm{sep}}(w,\varepsilon,Z)$ 分别记 $Z$ 的 $(w,\varepsilon,Z)$- 生成集的最小基数和 $(w,\varepsilon,Z)$- 分离集的最大基数. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$N_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,Z)=\frac{1}{k^n}\sum_{w\in\mathscr{I}^n}N_{\mathrm{span}}(w,\varepsilon,Z),\quad N_{\mathrm{sep}}(n,\varepsilon,Z)=\frac{1}{k^n}\sum_{w\in\mathscr{I}^n}N_{\mathrm{sep}}(w,\varepsilon,Z).$$

由定义可知

$$R(n,\varepsilon,Z)\le S(n,\varepsilon,Z)\le R\left(n,\frac{\varepsilon}{2},Z\right),\quad N_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,Z)\le N_{\mathrm{sep}}(n,\varepsilon,Z)\le N_{\mathrm{span}}\left(n,\frac{\varepsilon}{2},Z\right).$$

定义

$$h_M(Z,\mathscr{G})=\lim_{\varepsilon\to0}R(\varepsilon,Z)=\lim_{\varepsilon\to0}S(\varepsilon,Z),$$

其中

$$R(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log R(n,\varepsilon,Z),\quad S(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S(n,\varepsilon,Z)$$

和

$$h_A(Z,\mathscr{G})=\lim_{\varepsilon\to0}N_{\mathrm{span}}(\varepsilon,Z)=\lim_{\varepsilon\to0}N_{\mathrm{sep}}(\varepsilon,Z),$$

其中

$$N_{\mathrm{span}}(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,Z),\quad N_{\mathrm{sep}}(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_{\mathrm{sep}}(n,\varepsilon,Z).$$

称 $h_M(Z,\mathscr{G})$ 和 $h_A(Z,\mathscr{G})$ 为 $Z$ 的最大熵和平均熵.

**注 2.1** (1) 如果 $Z=X$, 则最大熵和平均熵分别对应文 [3] 和 [7] 中的拓扑熵.

(2) 由定义可知 $h_M(Z,\mathscr{G})\ge h_A(Z,\mathscr{G})$.

下面介绍估计熵.

对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $w\in\mathscr{I}^n$, 用 $l(w)$ 表示 $w$ 的长度, 即 $l(w)=n$. 给定 $x\in X$, $Z\subset X$, 定义

$$\mathrm{Orb}(x,w)=(x,f_{w_0}(x),\dots,f_{w_{[0,l(w)-1]}}(x)),\quad \mathrm{Orb}_n(Z,w)=\bigcup_{x\in Z}\mathrm{Orb}(x,w),$$

$$\mathrm{Orb}_n(x,\mathscr{G})=\bigcup_{w\in\mathscr{I}^n}\mathrm{Orb}(x,w),\quad \mathrm{Orb}_n(Z,\mathscr{G})=\bigcup_{x\in Z}\mathrm{Orb}_n(x,\mathscr{G}).$$

$Z$ 在 $\mathscr{G}$ 作用下的轨道定义为

$$\mathrm{Orb}(Z,\mathscr{G})=\bigcup_{\omega\in\mathscr{I}^{\mathbb{N}}}\bigcup_{x\in Z}\mathrm{Orb}(x,\omega).$$

对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x,y\in X^n$, 定义

$$d_n(x,y)=\max\{d(x_i,y_i)\}.$$

给定 $\varepsilon>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 称 $E\subset\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 是 $Z$ 的一个 $(n,\varepsilon,Z)$- 生成集, 如果对任意的 $x\in\mathrm{Orb}_n(Z,\mathscr{G})$ 存在 $y\in E$, 使得 $d_{n+1}(x,y)\le\varepsilon$. 称 $F\subset\mathrm{Orb}_n(Z,\mathscr{G})$ 是 $Z$ 的一个 $(n,\varepsilon,Z)$- 分离集, 如果 $F$ 中的任意两个不同的点 $x,y$ 均满足 $d_n(x,y)>\varepsilon$. 用 $r(n,\varepsilon,Z)$ 和 $s(n,\varepsilon,Z)$ 分别表示 $Z$ 的 $(n,\varepsilon,Z)$- 生成集的最小基数和 $(n,\varepsilon,Z)$- 分离集的最大基数.

易知对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$r(n,\varepsilon,Z)\le s(n,\varepsilon,Z)\le r\left(n,\frac{\varepsilon}{2},Z\right).$$

定义 $Z$ 的估计熵为

$$h_{\mathrm{est}}(Z,\mathscr{G})=\lim_{\varepsilon\to0}r(\varepsilon,Z)=\lim_{\varepsilon\to0}s(\varepsilon,Z),$$

其中

$$r(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\varepsilon,Z),\quad s(\varepsilon,Z)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s(n,\varepsilon,Z).$$

**命题 2.2** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, 则对任意的 $Z\subset X$, 有

$$h_A(Z,\mathscr{G})\le h_{\mathrm{est}}(Z,\mathscr{G})\le\log k+h_A(Z,\mathscr{G})\le\log k+h_M(Z,\mathscr{G}).$$

**证明** 由定义可得最后一个不等式成立, 下面证明前两个不等式成立. 设 $E\subset\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 是一个基数为 $r(n,\varepsilon,Z)$ 的 $(n,\varepsilon,Z)$- 生成集. 令

$$E=\{y^i=(y_0^i,y_1^i,\dots,y_n^i):i=1,\dots,r(n,\varepsilon,Z)\}.$$

对任意的 $w\in\mathscr{I}^n$, 有

$$\mathrm{Orb}(Z,w)\subset\bigcup_{i=1}^{r(n,\varepsilon,Z)}B_{d_{n+1}}(y^i,\varepsilon).$$

取 $\mathrm{Orb}(x_0^i,w)\in B_{d_{n+1}}(y^i,\varepsilon)$ (对某些 $i$ 而言, $\mathrm{Orb}(Z,w)\cap B_{d_{n+1}}(y^i,\varepsilon)$ 可能是空集, 所以 $\mathrm{Orb}(x_0^i,w)$ 可能不存在). 容易验证 $E(w):=\{x_0^i:i=1,\dots,r(n,\varepsilon,Z)\}$ 是 $Z$ 的 $(w,2\varepsilon,Z)$- 生成集. 因此

$$N_{\mathrm{span}}(n,2\varepsilon,Z)\le r(n,\varepsilon,Z). \tag{2.3}$$

下面证明

$$r(n,\varepsilon,Z)\le k^nN_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,Z). \tag{2.4}$$

对任意的 $w\in\mathscr{I}^n$, 假设 $E_w$ 是具有最小基数 $N_{\mathrm{span}}(w,\varepsilon,Z)$ 的 $(w,\varepsilon,Z)$- 生成集, 则

$$E_{\mathrm{est}}:=\bigcup_{w\in\mathscr{I}^n}\mathrm{Orb}(E_w,w)$$

是相对于度量 $d_{n+1}$ 的 $(n,\varepsilon,Z)$- 生成集, 且

$$r(n,\varepsilon,Z)\le|E_{\mathrm{est}}|\le\sum_{w\in\mathscr{I}^n}N_{\mathrm{span}}(w,\varepsilon,Z)=k^nN_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,Z).$$

联立不等式 2.3 和不等式 2.4, 有

$$N_{\text{span}}(n,2\varepsilon,Z)\le r(n,\varepsilon,Z)\le k^n N_{\text{span}}(n,\varepsilon,Z).$$

故命题 2.2 成立.

**注 2.3** (1) 当 $k=1$ 时, 对任意的 $Z\subset X$, 有 $h_A(Z,\mathscr{G})=h_{\text{est}}(Z,\mathscr{G})=h_M(Z,\mathscr{G})$.

(2) 从例 2.5 可知 $h_M(Z,\mathscr{G})<\log k+h_A(Z,\mathscr{G})$. 但我们不知道是否对任意的系统都有 $h_M(Z,\mathscr{G})\le\log k+h_A(Z,\mathscr{G})$.

现在构造一些例子说明命题 2.2 中的一些严格不等式成立.

设 $\mathscr{A}$ 是一个有限集合, $\mathscr{A}^{\mathbb{N}}=\{x=(x_0,x_1,\ldots)\,|\,x_n\in\mathscr{A},\ \forall n\ge 0\}$ 为 $\mathscr{A}$ 上的符号空间, 其上度量为 $d_1(x,y)=\max_n\{\frac{1}{n+1}\,|\,x_n\neq y_n\}$. 称 $(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\sigma)$ 为全转移, 如果 $\sigma$ 是转移映射, 即 $\sigma(x)_i=x_{i+1}$. 称 $(\Sigma,\sigma)$ 是 $(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\sigma)$ 的一个子转移, 如果 $\Sigma\subset\mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ 是一个闭的 $\sigma$- 不变集, 即 $\sigma(\Sigma)\subset\Sigma$. 记 $\mathscr{A}^*=\bigcup_{n\ge 1}\mathscr{A}^n$. 令 $[u]=\{x\in\mathscr{A}^{\mathbb{N}}:x_0\cdots x_{l(u)-1}=u\}$, 其中 $u\in A^*$.

**例 2.4** 设 $\mathscr{A}=\{a,b\}$ 和 $\mathscr{G}=\{f_0,f_1\}$, 其中 $f_0:\mathscr{A}^{\mathbb{N}}\to\{1^\infty\}$ 和 $f_1=\sigma^2$, 则

$$\log 2=h_A(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})<h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})=2\log 2\le h_{\text{est}}(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G}).$$

**证明** 设 $\mathscr{I}=\{0,1\}$, $y_n=\underbrace{1\cdots 1}_{n}$. 对任意的 $\varepsilon>0$, $n>0$, $x\in\mathscr{I}^n$, 令

$$E_x=\{w0^\infty:w\in\mathscr{A}^{2L(x)+[\frac{1}{\varepsilon}]}\},$$

其中

$$L(x)=\min\{j:x_j=0\},\quad L(y_n)=n.$$

由 $E_x$ 的构造知它是一个相对于 $d_x$ 的 $(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})$- 生成集且 $N_{\text{span}}(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})=|E_x|$. 因此

$$\begin{aligned}N_{\text{span}}(n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})&=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\mathscr{I}^n}N_{\text{span}}(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})\\&=\frac{1}{2^n}\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l(x)=n,\,x_{[0,j]}=\underbrace{1\cdots 1}_{j}0}N_{\text{span}}(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})+N_{\text{span}}(y_n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})\Bigg)\\&=\frac{1}{2^n}(2^{2n}+2^{2n-1}-2^{n-1})2^{[\frac{1}{\varepsilon}]}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{2^n}2^{2n}2^{[\frac{1}{\varepsilon}]}\le N_{\text{span}}(n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})\le\frac{1}{2^n}2^{2n+1}2^{[\frac{1}{\varepsilon}]}.$$

故 $\log 2=h_A(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})$.

可以验证 $E_{y_n}$ 是相对于 $D_n$ 的 $(n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})$- 生成集且 $R(n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})=|E_{y_n}|$. 所以

$$h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})=h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\{\sigma^2\})=2\log 2.$$

由不等式 2.3 的证明可知 $h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\{\sigma^2\})\le h_{\text{est}}(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})$. 这意味着 $h_{\text{est}}(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})\ge 2\log 2$. 证毕.

**例 2.5** 设 $\mathscr{A}=\{a,b\}$, $\mathscr{G}=\{f_0,f_1\}$, 其中 $f_0=\sigma$, $f_1=\sigma^2$, 则

$$\log 3=h_A(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})<h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})=2\log 2<\log 2+\log 3.$$

**证明** 设 $\mathscr{I}=\{0,1\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$, $n>0$, $x\in\mathscr{I}^n$, 令

$$E_x=\{w0^\infty: w\in\mathscr{A}^{S(x)+[\frac{1}{\varepsilon}]}\},$$

其中

$$S(x)=\sum_{x_j=0}1+2\sum_{x_j=1}1.$$

不难验证 $E_x$ 是相对于 $d_x$ 的一个 $(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})$- 生成集且 $N_{\mathrm{span}}(x,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})=|E_x|$. 从而

$$N_{\mathrm{span}}(n,\varepsilon,\mathscr{A}^{\mathbb{N}})=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}4^i=3^n.$$

这表明 $h_A(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})=\log 3$. 类似于例 2.4 的证明, 有

$$h_M(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})=2\log 2.$$

故结论得证.

**注 2.6** 我们不知道是否存在系统 $(X,\mathscr{G})$ 和 $Z\subset X$, 使得 $h_{\mathrm{est}}(Z,\mathscr{G})<h_M(Z,\mathscr{G})$.

## 3 估计熵的开覆盖定义

在文 [25] 和 [34] 中, Ma 和 Wu 以及 Tang 等人分别给出了最大熵和平均熵的开覆盖定义. 此节主要给出估计熵的开覆盖定义.

设 $\mathscr{U}=\{U_1,\dots,U_m\}$ 是 $X$ 的一个有限覆盖, 其中 $m\in\mathbb{N}$ 且 $m\geq 1$. 设 $\mathscr{A}_{\mathscr{U}}=\{1,\dots,m\}$. 给定 $w\in\mathscr{I}^*$ 和 $s\in\mathscr{A}_{\mathscr{U}}^{l(w)+1}$, 令 $U_{w,s}=\bigcap_{i=0}^{l(w)}f_{w_{[0,i-1]}}^{-1}U_{s_i}$, 其中 $f_{w_{[0,-1]}}^{-1}U_{s_0}=U_{s_0}$. 定义

$$\mathscr{W}_w(\mathscr{U})=\{s\in\mathscr{A}_{\mathscr{U}}^{l(w)+1}:U_{w,s}\neq\emptyset\}.$$

令 $\mathscr{W}_n(\mathscr{U})=\bigcup_{w\in\mathscr{I}^n}\mathscr{W}_w(\mathscr{U})$. 称 $S\subset\mathscr{W}_n(\mathscr{U})$ 是 $Z$ 相对于 $\mathscr{I}^n$ 的一个覆盖, 如果对任意的 $w\in\mathscr{I}^n$, 有

$$Z\subset\bigcup_{s\in S}U_{w,s}.$$

记 $\#\mathscr{W}_n(Z,\mathscr{U})$ 为 $Z$ 相对于 $\mathscr{I}^n$ 的所有覆盖的最小基数. 我们称

$$h(Z,\mathscr{U},\mathscr{G})=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\mathscr{W}_n(Z,\mathscr{U})$$

为 $Z$ 相对于 $\mathscr{U}$ 的拓扑熵.

重述文 [37, 定理 4.9] 如下.

**引理 3.1** 如果 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是一列实数序列, 且满足对任意的 $n,p\in\mathbb{N}$, 有 $a_{n+p}\leq a_n+a_p$, 则极限 $\lim_{n\to\infty}a_n/n$ 存在.

借助引理 3.1, 有

**引理 3.2** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统. 如果 $\mathscr{U}$ 是 $X$ 的有限开覆盖, 则

$$h(X,\mathscr{U},\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U}).$$

**证明** 只需证明对任意的 $n,p\geq 1$, 有

$$\#\mathscr{W}_{n+p}(X,\mathscr{U})\leq\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\cdot\#\mathscr{W}_p(X,\mathscr{U}).\tag{3.1}$$

令 $S_1=\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})$, $S_2=\mathscr{W}_p(X,\mathscr{U})$. 设

$$S=\{(s_0,\dots,s_n,s'_1,\dots,s'_p):s\in S_1,s'\in S_2\},$$

则 $|S|\le\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\cdot\#\mathscr{W}_p(X,\mathscr{U})$. 我们将证明 $S$ 是相对于 $\mathscr{I}^{n+p}$ 的覆盖. 对任意的 $w\in\mathscr{I}^{n+p}$, 存在唯一的 $w_1\in\mathscr{I}^n$ 和 $w_2\in\mathscr{I}^p$, 使得 $w=w_1w_2$. 因为 $S_1$ 和 $S_2$ 分别是 $w_1$ 和 $w_2$ 的覆盖, 所以有

$$X\subset\bigcup_{s\in S_1}U_{w_1,s}\ \text{且}\ X\subset\bigcup_{s\in S_2}U_{w_2,s}.$$

由此可得

$$X\subset\bigcup_{s\in S}U_{w_1w_2,s}.$$

这表明 $S$ 是相对于 $\mathscr{I}^{n+p}$ 的覆盖. 故不等式 (3.1) 成立. 证毕.

定义

$$h^*(X,\mathscr{G})\triangleq\sup_{\mathscr{U}}\{h(X,\mathscr{U},\mathscr{G})\},$$

其中上确界取遍 $X$ 的所有有限开覆盖. 称 $h^*(X,\mathscr{G})$ 为 $X$ 相对于 $\mathscr{G}$ 的拓扑熵. 给定 $X$ 的两个开覆盖 $\mathscr{A},\mathscr{U}$, 称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个加细, 如果对任意的 $A\in\mathscr{A}$ 存在 $U\in\mathscr{U}$, 使得 $A\subset U$. 记为 $\mathscr{U}<\mathscr{A}$.

**引理 3.3** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统. 如果 $\mathscr{U}<\mathscr{A}$, 则

$$h(X,\mathscr{U},\mathscr{G})\le h(X,\mathscr{A},\mathscr{G}).$$

**证明** 设 $\mathscr{U}=\{U_1,\dots,U_p\}$, $\mathscr{A}=\{A_1,\dots,A_q\}$. 令 $\mathscr{A}_1=\{1,\dots,p\}$, $\mathscr{A}_2=\{1,\dots,q\}$. 假定 $S$ 是 $X$ 的具有最小基数 $\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{A})$ 的子覆盖. 令

$$S=\{s^i=(s^i_0,s^i_1,\dots,s^i_n):1\le i\le\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{A})\},$$

其中 $s^i_j\in\mathscr{A}_2$. 因为 $\mathscr{U}<\mathscr{A}$, 所以对任意的 $s^i_j\in\mathscr{A}_2$ 存在 $\overline{s}^i_j\in\mathscr{A}_1$, 使得 $A_{s^i_j}\subset U_{\overline{s}^i_j}$. 令

$$\overline{S}=\{\overline{s}^i:s^i\in S\},$$

则 $\overline{S}$ 是 $X$ 的一个覆盖. 因此

$$\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\le|\overline{S}|\le\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{A}).$$

这蕴含

$$h(X,\mathscr{U},\mathscr{G})\le h(X,\mathscr{A},\mathscr{G}).$$

证毕.

**定理 3.4** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统. 假定 $\{\mathscr{U}_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $X$ 的一列开覆盖且满足

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\mathscr{U}_n)=0.$$

那么下列命题成立:

(1) 如果 $h^*(X,\mathscr{G})<\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}h(X,\mathscr{U}_n,\mathscr{G})=h^*(X,\mathscr{G})$.

(2) 如果 $h^*(X,\mathscr{G})=\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}h(X,\mathscr{U}_n,\mathscr{G})=\infty$.

**证明** 假设 $h^*(X,\mathscr{G})<\infty$, 则对任意的 $\varepsilon>0$ 存在开覆盖 $\mathscr{A}$, 使得 $h(X,\mathscr{A},\mathscr{G})>h^*(X,\mathscr{G})-\varepsilon$. 设 $\delta$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个 Lebesgue 数. 对此 $\delta$ 存在 $N>0$, 使得对任意的 $n\geq N$, 有 $\operatorname{diam}\mathscr{U}_n<\delta$. 故 $\mathscr{A}<\mathscr{U}_n$. 所以

$$h^*(X,\mathscr{G})\geq h(X,\mathscr{U}_n,\mathscr{G})\geq h(X,\mathscr{A},\mathscr{G})>h^*(X,\mathscr{G})-\varepsilon,\quad \forall\, n\geq N.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}h(X,\mathscr{U}_n,\mathscr{G})=h^*(X,\mathscr{G}).$$

类似地, 可以证明 $\lim_{n\to\infty}h(X,\mathscr{U}_n,\mathscr{G})=\infty$. 证毕.

**注 3.5** 定理 3.4 的证明类似于文 [37, 定理 7.6] 的证明.

**定理 3.6** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统. 假设 $\mathscr{U}$ 是 $X$ 的一个有限开覆盖:

(1) 如果 $\delta$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个 Lebesgue 数, 则

$$\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\leq r\left(n,\frac{\delta}{2},X\right)\leq s\left(n,\frac{\delta}{2},X\right).$$

(2) 如果 $\varepsilon>0$ 且 $\operatorname{diam}(\mathscr{U})\leq\varepsilon$, 则

$$r(n,\varepsilon,X)\leq s(n,\varepsilon,X)\leq\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U}).$$

**证明** 设 $\mathscr{U}=\{U_1,\dots,U_m\}$. 令 $\mathscr{A}_{\mathscr{U}}=\{1,\dots,m\}$.

(1) 假设 $E\subset\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 是 $\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 的一个 $(n,\frac{\delta}{2},X)$- 生成集且具有最小基数 $r(n,\frac{\delta}{2},X)$. 记

$$E=\left\{(y_0^i,y_1^i,\dots,y_n^i):i=1,\dots,r\left(n,\frac{\delta}{2},X\right)\right\}.$$

因为存在 $U_{i_j}\in\mathscr{U}$, 使得对任意的 $1\leq i\leq r(n,\frac{\delta}{2},X)$ 和 $0\leq j\leq n$, 有 $d(y_j^i,\frac{\delta}{2})\subset U_{i_j}$, 其中 $i_j\in\mathscr{A}_{\mathscr{U}}$, 所以对任意的 $w\in\mathscr{I}^n$, 有

$$X\subset\bigcup_{s\in S}U_{w,s},$$

其中

$$S=\left\{(i_0,i_1,\dots,i_n):i=1,\dots,r\left(n,\frac{\delta}{2},X\right)\right\}.$$

从而

$$\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\leq r\left(n,\frac{\delta}{2},X\right).$$

(2) 设 $F\subset\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 是 $\mathrm{Orb}_n(X,\mathscr{G})$ 的一个 $(n,\varepsilon,X)$- 分离集且具有最大基数 $s(n,\varepsilon,X)$, $S\subset\mathscr{I}^n$ 是 $X$ 的一个相对于 $\mathscr{I}^n$ 的覆盖且具有基数 $\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})$. 令

$$F=\{(y_0^i,y_1^i,\dots,y_n^i):i=1,\dots,s(n,\varepsilon,X)\},$$

则对任意的 $1\leq i\leq s(n,\varepsilon,X)$ 和 $0\leq j\leq n$, 存在 $i_j\in\mathscr{A}_{\mathscr{U}}$, 使得 $y_j^i\in U_{i_j}$ 和 $(i_0,i_1,\dots,i_n)\in S$. 这蕴含

$$\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U})\geq s(n,\varepsilon,X).$$

证毕.

**定理 3.7** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, 则

$$h_{\rm est}(X,\mathscr{G})=h^*(X,\mathscr{G}).$$

**证明** 设 $\varepsilon>0$. 用 $\mathscr{U}_\varepsilon'$ 和 $\mathscr{A}_\varepsilon'$ 分别表示所有半径为 $2\varepsilon$ 和 $\varepsilon/2$ 的开球构成的集合. 取 $\mathscr{U}_\varepsilon'$ 中的一个子覆盖, 记为 $\mathscr{U}_\varepsilon$. 取 $\mathscr{U}_\varepsilon$ 的一个 Lebesgue 数, 记为 $\delta_\varepsilon$. 选取 $\mathscr{A}'_{\frac{\delta_\varepsilon}{2}}$ 的一个子覆盖 $\mathscr{A}_{\frac{\delta_\varepsilon}{2}}$, 则由定理 3.6, 有

$$\#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{U}_\varepsilon)\le r\bigg(n,\frac{\delta_\varepsilon}{2},X\bigg)\le s\bigg(n,\frac{\delta_\varepsilon}{2},X\bigg)\le \#\mathscr{W}_n(X,\mathscr{A}_{\frac{\delta_\varepsilon}{2}}).$$

因此

$$h(X,\mathscr{U}_\varepsilon)\le r\bigg(\frac{\delta_\varepsilon}{2},X\bigg)\le s\bigg(\frac{\delta_\varepsilon}{2},X\bigg)\le h(X,\mathscr{A}_{\frac{\delta_\varepsilon}{2}}).$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{n}$. 由定理 3.4 可得

$$h^*(X,\mathscr{G})=h_{\rm est}(X,\mathscr{G}).$$

证毕.

## 4 Δ- 弱混合集

Blanchard 和 Huang [4] 以及 Huang 等人 [14] 分别引入了弱混合集和 Δ- 弱混合集且分别证明了: 如果 $|\mathscr{G}|=1$ 且 $h_M(X,\mathscr{G})>0$, 则 $(X,\mathscr{G})$ 有弱混合集和 Δ- 弱混合集.

最近, 文 [17] 中作者对自由半群引入了两种类型的弱混合集, 并得到了类似的熊混沌刻画. 受此启发, 现在对自由半群引入两种 Δ- 弱混合集.

对任意的 $d\ge 2$ 和 $X$ 的子集 $U_1,\dots,U_d$, 定义 $U_1,\dots,U_d$ 的第一型和第二型碰撞时间集为

$$N_1(U_1,\dots,U_d)=\bigg\{n\in\mathbb{N}:\exists\,\omega_1,\dots,\omega_{d-1}\in\mathscr{I}^n\ \text{s.t.}\ \bigcap_{i=1}^d f^{-1}_{\omega_1\cdots\omega_{i-1}}U_i\ne\emptyset\bigg\},$$

$$N_2(U_1,\dots,U_d)=\bigg\{\omega\in\mathscr{I}^*:\bigcap_{i=1}^d f^{-1}_{\underbrace{\omega\cdots\omega}_{i-1}}U_i\ne\emptyset\bigg\}.$$

**定义 4.1** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统. 称 $A\subset X$ 是第一型 (第二型) Δ- 弱混合 (简记为 Δ-WM1, 2), 如果对任意的 $n,d\ge 2$ 和与 $A$ 相交非空的开集 $U_{i,j}\subset X$, 其中 $1\le i\le n$ 和 $1\le j\le d$, 下列集合

$$\bigcap_{i=1}^n N_q(U_{i,1}\cap A,U_{i,2},\dots,U_{i,d})$$

是一个无限集, $q=1$ $(q=2)$.

**注 4.2** (1) 如果 $|\mathscr{G}|=1$, 则 Δ-WM1 和 Δ-WM2 都对应文 [14] 中的 Δ- 弱混合.

(2) 如果 $d=2$, 则 Δ-WM1 和 Δ-WM2 分别对应文 [17] 中的 WM1 和 WM2.

**定义 4.3** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, $A\subset X$. 称 $A$ 是第一型 (第二型) Δ- 熊混沌, 如果存在可数个 Cantor 集 $C_1\subset C_2\subset\cdots\subset A$, 使得 $C=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ 在 $A$ 中稠且对任意的 $d\ge 2$ 和 $E\subset C$ 及任意的连续映射 $g_j:E\to A$, $j=1,\dots,d$, 在 $\mathbb{N}$ 中存在递增序列 $\{q_i\}$, 使得对任意的 $x\in E$, 存在 $\{\omega^x_{q_i,j}\}$ 且 $\omega^x_{q_i,j}\in\mathscr{I}^{q_i}$, $j=1,\dots,d$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{\omega^x_{q_i,1}\cdots\omega^x_{q_i,j}}(x)=g_j(x)$$

(在 $\mathbb{N}$ 中存在递增序列 $\{q_i\}$ 和 $\omega_{q_i}\in\mathscr{I}^{q_i}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{\underbrace{\omega_{q_i}\cdots\omega_{q_i}}_{j}}(x)=g_j(x)$$

对任意的 $x\in E$ 和 $j=1,\dots,d$ 成立).

**定理 4.4** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, $A$ 是 $X$ 的至少包含两个不同点的自密闭子集, 则 $A$ 是第一 (二) 型 $\Delta$- 弱混合当且仅当它是第一 (二) 型 $\Delta$- 熊混沌.

**证明** 由于证明类似, 这里只给出第二型的证明. 必要性由引理 4.6, 4.7 和 4.8 可得. 充分性由引理 4.5 可得. 证毕.

**引理 4.5** 在定理 4.4 的假设下, 如果 $A$ 是第一 (二) 型 $\Delta$- 熊混沌, 则 $A$ 是第一 (二) 型 $\Delta$- 弱混合.

**证明** 固定 $n,d\in\mathbb{N}$ 和与 $A$ 相交非空的开集 $U_{i,j}\subset X$, $1\le i\le n$ 且 $1\le j\le d$. 取 $x_{i,j}\in U_{i,j}\cap A$ 并定义 $g_j:\{x_{1,1},\dots,x_{n,1}\}\to A$ 为 $g_j(x_{i,1})=x_{i,j+1}$, 则由第二型 $\Delta$- 熊混沌的定义可知存在 $m,\varepsilon$, 使得对任意 $k\ge m$ 存在 $\omega\in\mathscr{I}^{q_k}$, 使得

$$f_{\underbrace{\omega\cdots\omega}_{j}}(x_{i,1})\in B(x_{i,j+1},\varepsilon)\subset U_{i,j+1},$$

这意味着 $\bigcap_{i=1}^{n}N_2(A\cap U_{i,1},U_{i,2},\dots,U_{i,d})$ 是一个无限集. 证毕.

接下来, 将采用文 [30] 中的方法证明定理 4.4 的必要性. 因此需要介绍一下超空间.

设 $(X,d)$ 是一个紧致度量空间, $A$ 是 $X$ 的非空子集. 称 $A$ 是完全不连通的, 如果它的连通子集是单点集; 自密的, 如果它是闭的且没有孤立点; 康托尔的, 如果它是完全不连通的自密紧集; 剩余的, 如果它包含一个稠密的 $G_\delta$ 集; Mycielski 集, 如果 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$, 其中 $C_i$ 是康托尔集, $i=1,\dots$.

记 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X,\, d(x,y)<\varepsilon\}$, $d(x,A)=\inf\{d(x,a),\, a\in A\}$, $B(A,\varepsilon)=\{x\in X: d(x,A)<\varepsilon\}$. 用 $\overline{B}(A,\varepsilon)$ 表示 $B(A,\varepsilon)$ 的闭包.

在 $X$ 的所有非空闭子集构成的集合 $2^X$ 上赋予 Hausdorff 度量 $d_H$:

$$d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:\overline{B}(A,\varepsilon)\supseteq B \text{ 且 } \overline{B}(B,\varepsilon)\supseteq A\},$$

则我们把得到的空间 $(2^X,d_H)$ 称为 $X$ 的超空间. 下面这个族

$$\{\langle U_1,\dots,U_n\rangle: U_1,\dots,U_n \text{ 是 } X \text{ 的非空子集}, n\in\mathbb{N}\}$$

构成了 $2^X$ 的一个拓扑基, 被称为 Vietoris 拓扑, 其中

$$\langle U_1,\dots,U_n\rangle:=\left\{A\in 2^X: A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i,\ \text{且 } U_i\cap A\neq\emptyset,\, i=1,\dots,n\right\}.$$

从文 [28] 中可知 Hausdorff 度量 $d_H$ 和 Vietoris 拓扑兼容. 称 $\mathscr{Q}\subset 2^X$ 是可遗传的, 如果对任意的 $A\in\mathscr{Q}$ 有 $2^A\subset\mathscr{Q}$.

引理 4.6 是 Kuratowski–Mycielski 定理的一个形式 (见文 [2, 定理 5.10]). 我们将在定理 4.4 的证明中用到它.

**引理 4.6** 设 $X$ 是自密紧空间. 如果 $\mathscr{Q}\subset 2^X$ 是可遗传的剩余集, 则存在可数个康托尔集 $C_1\subset C_2\subset\cdots\subset X$ 满足对任意 $i\ge 1$, 有 $C_i\in\mathscr{Q}$ 且 $C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ 在 $X$ 中稠.

设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, $A$ 是 $X$ 的闭子集. 给定 $\varepsilon>0$ 和 $d\geq 1$, 称 $E\subset X$ 在 $A$ 中 $(\varepsilon,d)$- 分离, 如果存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$, $z_1,z_2,\ldots,z_n\in X$, 使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^n B(z_i,\delta)$ 且对任意的映射 $h_j:\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}\to A$, $j=1,\ldots,d$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{k}<\varepsilon$ 和 $\omega\in\mathscr{I}^k$, 使得

$$f_{\underbrace{\omega\cdots\omega}_{j}}(B(z_i,\delta))\subset B(h_j(z_i),\varepsilon).$$

用 $\mathfrak{X}(\varepsilon,d,A)$ 表示在 $A$ 中 $(\varepsilon,d)$- 分离的紧致子集, 则 $\mathfrak{X}(\varepsilon,d,A)$ 是可遗传的. 事实上, 如果 $E$ 在 $A$ 中 $(\varepsilon,d)$- 分离且 $B$ 是 $E$ 非空紧集, 则 $B$ 也是在 $A$ 中 $(\varepsilon,d)$- 分离的. 令

$$\mathfrak{X}(A)=\bigcap_{d=1}^{\infty}\bigcap_{p=1}^{\infty}\mathfrak{X}\left(\frac{1}{p},d,A\right).$$

**引理 4.7** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统且 $A\subset X$ 是第二型 Δ- 弱混合的闭子集, 则 $\mathfrak{X}(A)\cap 2^A$ 是 $2^A$ 的一个剩余集.

**证明** 首先, 证明对任意的 $p,d\geq 1$, $\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)\cap 2^A$ 在 $2^A$ 中是开集. 设 $E\in\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)\cap 2^A$, 则存在 $\delta>0$ 和 $z_1,z_2,\ldots,z_n\in X$ 满足在 $A$ 中 $(\frac{1}{p},d)$- 分离的定义. 令 $V_i=B(z_i,\delta)$, $i=1,2,\ldots,n$. 由定义有 $E\subset\bigcup_{i=1}^n V_i$. 因此 $\langle V_1\cap A,\ldots,V_n\cap A\rangle$ 是 $E$ 的一个邻域. 容易验证 $B\subset\bigcup_{i=1}^n V_i$ 在 $A$ 中 $(\frac{1}{p},d)$- 分离. 特别地, 如果 $B\in\langle V_1\cap A,\ldots,V_n\cap A\rangle$, 则 $B\in\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)$. 因此 $\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)\cap 2^A$ 在 $2^A$ 中为开集.

为了证明 $\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)\cap 2^A$ 在 $2^A$ 中稠, 需证 $X$ 中的任意 $n$ 个与 $A$ 相交非空的开集 $U_1,U_2,\ldots,U_n$, 有

$$\langle U_1\cap A,U_2\cap A,\ldots,U_n\cap A\rangle\cap\mathfrak{X}\left(\frac{1}{p},d,A\right)\cap 2^A\neq\emptyset.$$

因为 $A$ 是紧致的, 所以存在有限个点 $y_1,y_2,\ldots,y_m\in A$, 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^m B(y_i,\frac{1}{2p})$. 为了方便, 记 $V_i=B(y_i,\frac{1}{2p})$, $i=1,2,\ldots,m$ 和

$$\mathscr{S}=\{M_{n\times d}=(\alpha_{i,j}^l):a_{i,j}^l\in\{1,2,\ldots,m\},\ i=1,2\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,d,\ l=1,2,\ldots,m^{nd}\}.$$

由于 $A$ 是弱混合集, 则存在 $k_1$ 和 $\omega_1\in\mathscr{I}^{k_1}$, 使得

$$(U_i\cap A)\cap f_{\omega_1}^{-1}V_{\alpha_{i,1}^1}\cdots\cap f^{-1}_{\underbrace{\omega_1\cdots\omega_1}_{d}}V_{\alpha_{i,d}^1}\neq\emptyset,\quad i=1,2,\ldots n.$$

取与 $A$ 交非空的开集 $W_i^1\subset U_i$, 使得

$$f_{\underbrace{\omega_1\cdots\omega_1}_{j}}(W_i^1)\subset V_{\alpha_{i,j}^1}.$$

对 $W_i^1$ 而言, $i=1,2,\ldots,n$ 存在 $k_2$ 和 $\omega_2\in\mathscr{I}^{k_2}(\Lambda)$, 使得

$$(W_i^1\cap A)\cap f_{\omega_2}^{-1}V_{\alpha_{i,1}^2}\cdots\cap f^{-1}_{\underbrace{\omega_2\cdots\omega_2}_{d}}V_{\alpha_{i,d}^2}\neq\emptyset,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

取与 $A$ 交非空的开集 $W_i^2\subset W_i^1$, 使得

$$f_{\underbrace{\omega_2\cdots\omega_2}_{j}}(W_i^2)\subset V_{\alpha_{i,j}^2}.$$

对 $\mathscr{S}$ 中的所有矩阵重复上述过程, 得到 $k_1,k_2,\ldots,k_{m^{nd}}$ 和 $\omega^q$, $1\leq q\leq m^{nd}$, 使得

$$W_i^{m^{nd}}\subset W_i^{m^{nd-1}}\subset\cdots\subset W_i^1\subset U_i,$$

且

$$f_{\underbrace{\omega_q\cdots\omega_q}_{j}}(W_i^{m^{nd}})\subset V_{\alpha_{i,j}^l},\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,d,\quad l=1,\ldots,m^{nd}.$$

取 $z_i\in W_i^{m^{nd}}\cap A$, 则 $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}\in\langle U_1\cap A,U_2\cap A,\ldots,U_n\cap A\rangle\cap 2^A$. 再取 $\delta\in(0,\frac{1}{p})$, 使得 $B(z_i,\delta)\subset W_i^{m^{nd}}$, $i=1,2,\ldots,n$. 由于对任意映射 $h_j:\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}\to A$, $j=1,\ldots,d$, 存在 $1\le q\le m^{nd}$, 使得 $V_{\alpha_{i,j}^q}\subset B(h(z_i),\frac{1}{p})$, $i=1,2,\ldots,n$. 因此

$$f_{\underbrace{\omega_q\cdots\omega_q}_{j}}(B(z_i,\delta))\subset f_{\underbrace{\omega_q\cdots\omega_q}_{j}}(W_i^{m^{nd}})\subset V_{\alpha_{i,j}^q}\subset B\left(h(z_i),\frac{1}{p}\right),\quad i=1,2,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,d.$$

这意味着 $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ 在 $A$ 中 $(\frac{1}{p},d)$- 分离. 所以 $\mathfrak{X}(\frac{1}{p},d,A)\cap 2^A$ 在 $2^A$ 中稠. 从而 $\mathfrak{X}(A)\cap 2^A$ 是 $2^A$ 的一个剩余集. 证毕

**引理 4.8** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统, $A$ 是 $X$ 的闭子集. 如果 $C_1\subset C_2\subset\cdots$ 是 $\mathfrak{X}(A)$ 中的一列元素, 则对任意的 $E\subset C:=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$, $d\ge 2$ 和连续映射 $h_j:E\to A$, $j=1,\ldots,d$, 存在递增的正整数序列 $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\omega_i\in\mathscr{I}^{k_i}$, 使得对任意 $x\in E$, 有

$$\lim_{i\to\infty}f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}(x)=h_j(x).$$

**证明** 设 $i\in\mathbb{N}$, 则 $C_i$ 在 $A$ 中 $\frac{1}{i}$- 分离, 故存在 $\delta_i<\frac{1}{i}$ 和 $z_1^i,z_2^i,\ldots,z_{n_i}^i$, 使得对任意的映射 $h_j:C_i\to Y$, $j=1,\ldots,d$ 存在 $k_i$ 和 $\omega_i\in\mathscr{I}^{k_i}$ 满足 $C_i\subset\bigcup_{m=1}^{n_i}B(z_m^i,\delta_i)$ 和

$$f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}(B(z_m^i))\subset B\left(h_j(z_m^i),\frac{1}{i}\right),\quad m=1,2,\ldots,n_i.$$

下面证明 $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ 就是所需要的序列.

对任意的 $x\in A$ 存在 $l_x$, 使得 $x\in C_i$, $\forall\, i>l_x$. 由 $h_j$ 的连续性, $j=1,\ldots,d$, 对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $l_\varepsilon>\frac{2}{\varepsilon}$, 使得如果 $d(x,y)<\frac{1}{l_\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2}$, 则

$$d(h_j(x),h_j(y))<\frac{\varepsilon}{2},\quad j=1,\ldots,d.$$

对任意的 $i>\max\{l_x,l_\varepsilon\}$, 存在 $\delta_i<\frac{1}{i}<\frac{1}{l_\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2}$, $z_1^i,z_2^i,\ldots,z_{n_i}^i$, 使得

$$f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}((B(z_m^i,\delta_i))\subset B\left(h_j(z_m^i),\frac{1}{i}\right),\quad\forall\, m=1,2,\ldots,n_i,$$

且存在 $m\in\{1,2,\ldots,n_i\}$, 使得 $x\in B(z_m^i,\delta_i)$. 故

$$d(f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}(x),h(x))<d(f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}(x),h_j(z_m^i))+d(h_j(z_m^i),h_j(x))<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{i\to\infty}f_{\underbrace{\omega_i\cdots\omega_i}_{j}}(x)=h_j(x).$$

证毕.

**问题 1** 设 $(X,\mathscr{G})$ 是一个系统且 $|\mathscr{G}|\ge 2$. 自然要问 $h_{\rm est}(X,\mathscr{G})/h_A(X,\mathscr{G})/h_M(X,\mathscr{G})>0$ 是否蕴含 $(X,\mathscr{G})$ 包含第一 (二) 型 $\Delta$- 弱混合集呢?

**注 4.9** Moothathu [27] 引入了对角线传递 (Δ-transitivity) 并证明了 Δ- 传递蕴含弱混合. 类似于 Huang 等人的做法 [14], 我们同样可以对系统 $(X,\mathscr{G})$ 引入对角线传递. 关于对角线传递的研究, 见文 [10, 39, 40].

下面构造一类具有 Δ- 弱混合集的系统. 给定子转移 $(\Sigma,\sigma)$, 称 $(\Sigma,\sigma)$ 是强混合的 (简称为混合), 如果对任意的非空开集 $U,V\subset\Sigma$, 有 $N_1(U,V)$ 是余有限的 (即 $\mathbb{N}\setminus N_1(U,V)$ 是有限的). 从文 [22, 命题 3.39] 知 $(\Sigma,\sigma)$ 是混合的当且仅当存在 $m>0$, 使得对任意的 $a,b\in A$ 和 $n\geq m$ 存在 $u\in\mathscr{L}^n(\Sigma)$ 满足 $u_0=a$, $u_{n-1}=b$, 其中 $\mathscr{L}^n(\Sigma)=\{u\in A^n:\exists x\in\Sigma \text{ s.t. } u_0u_1\cdots u_{n-1}=x_0x_1\cdots x_{n-1}\}$.

**例 4.10** 设 $\mathscr{A}=\{a,b,c,d,e\}$, $\mathscr{B}=\{ab,cde\}$, $f_0=\sigma|^2_{\mathscr{A}}$, $f_1=\sigma|^3_{\mathscr{A}}$, 则对 $(\mathscr{B}^{\mathbb{N}},\sigma|_{\mathscr{B}})$ 的任意的混合子转移 $(\Sigma,\sigma|_{\mathscr{B}})$, $\Sigma$ 是 $(\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\mathscr{G})$ 的第一型 Δ- 弱混合集, 其中 $\mathscr{G}=\{f_0,f_1\}$.

**证明** 固定 $n\in\mathbb{N}$ 和 $d\geq 2$. 对任意的开集 $U_{i,j}\subset\Sigma$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,d$ 存在 $M\in\mathbb{N}$, 使得对任意的 $m\geq M$ 存在 $u^{i,j}\in\mathscr{L}^m(\Sigma)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,d$, 使得

$$[u^{i,j}]\cap\Sigma\subset U_{i,j},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,d.$$

因为 $(\Sigma,\sigma|_{\mathscr{B}})$ 是混合的, 所以存在 $p\in\mathbb{N}$ 和 $v^{i,j}\in\mathscr{L}^p(\Sigma)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,d-1$, 使得

$$v_0^{i,j}=u_{m-1}^{i,j} \text{ 且 } v_{p-1}^{i,j}=u_0^{i,j+1},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,d-1.$$

用 $w^i$ 表示 $u_0^{i,1}\cdots u_{m-1}^{i,1}$, $v_1^{i,1}\cdots v_{p-2}^{i_1}$, $u_0^{i,2}\cdots u_{m-1}^{i,2}$, $v_1^{i,2}\cdots v_{p-2}^{i_2},\dots,v_1^{i,d-1}\cdots v_{p-2}^{i_d-1}$, $u_0^{i,d}\cdots u_m^{i,d}$ 的连接, $i=1,\dots,n$, 则 $[w^i]\cap\Sigma\subset U_{i,1}$, $i=1,\dots,n$. 容易验证

$$m+p-2\in\bigcap_{i=1}^n N_1(U_{i,1},\dots,U_{i,d}).$$

故结论成立.

## 参 考 文 献


[1] Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H, Topological entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1965, **114**(2): 309–319.

[2] Akin E., Lectures on Cantor and Mycielski sets for dynamical systems, *Chapel Hill Ergodic Theory Workshops*, 2004: 21–79.

[3] Biś A., Entropies of a semigroup of maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2004, **11**(2–3): 639–648.

[4] Blanchard F., Huang W., Entropy sets, weakly mixing sets and entropy capacity, *Discrete & Continuous Dynamical Systems—Series A*, 2012, **20**(2): 275–311.

[5] Bowen R., Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1971, **153**: 401–401.

[6] Bowen R., Topological entropy for noncompact sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1973, **184**: 125–136.

[7] Bufetov A., Topological entropy of free semigroup actions and skew-product transformations, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1999, **5**(1): 137–143.

[8] Carrasco-Olivera D., Alvan R. M., Rojas C. A. M., Topological entropy for set-valued maps, *Discrete & Continuous Dynamical Systems—Series B*, 2015, **20**(10): 3461–3474.

[9] Carvalho M., Rodrigues F. B., Varandas P., Quantitative recurrence for free semigroup actions, *Nonlinearity*, 2018, **31**(3): 864.

[10] Chen Z., Li J., Lü J., Point transitivity, Δ-transitivity and multi-minimality, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2015, **35**(5): 1423–1442.

[11] Colonius F., Kawan C., Nair G., A note on topological feedback entropy and invariance entropy, *Systems & Control Letters*, 2013, **62**(5): 377–381.

[12] Colonius F., Kawan C., Invariance entropy for control systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, **48**(3): 1701–1721.

[13] Dinaburg E. I, A correlation between topological entropy and metric entropy, *Dokl. Akad. Nauk Sssr*, 1970, **190**: 19–22.

[14] Huang W., Li J., Ye X., et al., Positive topological entropy and Δ-weakly mixing sets, *Advances in Mathematics*, 2017, **306**: 653–683.

[15] Huang Y., Zhong X., Carathéodory–Pesin structures associated with control systems, *Systems & Control Letters*, 2018, **112**: 36–41.

[16] Huang Y., Zhong X., Topological entropy of switched systems, *Journal of the Korean Mathematial Society*, 2018, **55**(5): 1157–1175.

[17] Huang Y., Zhong X., Weak Mixing of Switched Systems, *Science China Mathematics*, 2018, accepted.

[18] Hui H., Ma D., Some remarks on measure-theoretic entropy for a free semigroup action, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2017, **21**(2): 429–440.

[19] Hui H., Ma D., Some dynamical properties for free semigroup actions, *Stochastics and Dynamics*, 2018, **18**(4): 1850032 (20pages).

[20] Kawan C., Exponential state estimation, entropy and Lyapunov exponents, *Systems & Control Letters*, 2018, **113**: 78–85.

[21] Kelly J., Tennant T., Topological entropy on set-valued functions, arXiv preprint arXiv: 1509.08413, 2015.

[22] Kurka P., Topological and Symbolic Dynamics, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[23] Liberzon D., Mitra S., Entropy and minimal data rates for state estimation and model detection, In: Proceedings of the 19th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control, ACM, 2016, 247–256.

[24] Lin X., Ma D., Wang Y., On the measure-theoretic entropy and topological pressure of free semigroup actions, *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 2018, **38**: 686–716.

[25] Ma D., Wu M., Topological pressure and topological entropy of a semigroup of maps, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011, **31**(2): 545–557.

[26] Matveev A., Pogromsky A., Observation of nonlinear systems via finite capacity channels: Constructive data rate limits, *Automatica*, 2016, **70**: 217–229.

[27] Moothathu T. S., Diagonal points having dense orbit, *Proceedings of Colloquium Mathematicum Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk*, 2010, **120**(1): 127–138.

[28] Nadler S. B., Hyperspaces of Sets, A Text with Research Questions, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.

[29] Nair G. N., Evans R. J., Mareels I. M. Y., et al., Topological feedback entropy and Nonlinear stabilization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1585–1597.

[30] Oprocha P., Coherent lists and chaotic sets, *Discrete & Continuous Dyn. Sys.*, 2013, **31**(3): 797–825.

[31] Pesin Y. B., Pitskel' B. S., Topological pressure and the variational principle for noncompact sets, *Functional Analysis and Its Applications*, 1984, **18**(4): 307–318.

[32] Savkin A. V., Analysis and synthesis of networked control systems: topological entropy, observability, robustness and optimal control, *Automatica*, 2006, **42**(1): 51–62.

[33] Sun Z., Ge S. S., Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag, London, 2005.

[34] Tang J., Li B., Cheng W. C., Some properties on topological entropy of free semigroup action, *Dynamical Systems*, 2018, **33**(1): 54–71.

[35] Wang Y., Ma D., On the topological entropy of a semigroup of continuous maps, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, **427**(2): 1084–1100.

[36] Wang Y., Ma D., Lin X., On the topological entropy of free semigroup actions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, **435**(2): 1573–1590.

[37] Walters P., An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.

[38] Xiong J., Yang Z., Chaos caused by a topological mixing map, In: Shiraiwa K., eds., Proceedings of Advance Series in Dynamical Systems, 1990.

[39] Zeng T., Multi-transitivity and Δ-transitivity for semigroup actions, *Topology and Its Appl.*, 2017, **226**: 1–15.

[40] Zhong X., Lü J., Functional envelope of Cantor spaces, *Acta Math. Sin., Engl. Series*, 2017, **33**(3): 1–14.