第62卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.6
2019年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)06-0865-14 **文献标识码: A**

点星网与度量空间的映像

林 寿

宁德师范学院数理学院 宁德 352100
E-mail: shoulin60@163.com

黄燕晖 张 静

闽南师范大学数学与统计学院 漳州 363000
E-mail: 645137233@qq.com; zhangjing86@126.com

摘 要 拓扑空间 X 的覆盖列 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 被称为空间 X 的点星网, 若 $x \in X$, 则 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网. 本文刻画具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网的空间, 并将其表示为度量空间在确定映射下的像. 在假设集族性质 $\mathfrak{P}$ 满足适当的条件下, 证明对拓扑空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 具有 $\mathfrak{P}$ 且 cs 覆盖列的点星网.

(2) X 具有 $\mathfrak{P}$ 且 sn 覆盖列的点星网.

(3) X 是 Cauchy sn 对称空间且具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 cs 网.

(4) X 是 Cauchy sn 对称空间且具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 sn 网.

(5) X 是度量空间的序列覆盖、π 且 σ-$\mathfrak{P}$ 映像.

(6) X 是度量空间的 1 序列覆盖、紧且 σ-$\mathfrak{P}$ 映像.

这些工作以局部有限集族与点有限集族为特例, 拓展了从基到 cs 网的研究, 丰富了映射与空间的相互分类思想.

关键词 cs 有限集族; cs 覆盖; 点星网; 序列覆盖映射; σ-cs 映射

MR(2010) 主题分类 54C10, 54D55, 54E30

中图分类 O189.1

Point-star Networks and Images of Metric Spaces

Shou LIN

School of Mathematics and Physics, Ningde Normal University,
Ningde 352100*, P. R. China*
E-mail: *shoulin*60*@*163*.com*

Yan Hui HUANG Jing ZHANG

School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University
Zhangzhou 363000*, P. R. China*
E-mail: 645137233*@qq.com*; *zhangjing*86*@*126*.com*

收稿日期: 2019-01-21; 接受日期: 2019-05-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801254, 11471153)

Abstract A sequence $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of covers of a topological space X is called a point-star network for X if the family $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{P}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ is a network at x in X for each $x\in X$. The main purpose of this paper is to characterize the spaces which has a point-star network consisting of cs-finite cs-coverings and express their as certain images of metric spaces. It is proved that the following are equivalent for a topological space X when the property $\mathfrak{P}$ of set families satisfies some suitable conditions:

(1) X has a point-star network consisting of cs-coverings with property $\mathfrak{P}$.

(2) X has a point-star network consisting of sn-coverings with property $\mathfrak{P}$.

(3) X is a Cauchy sn-symmetric space with a σ-$\mathfrak{P}$ cs-network.

(4) X is a Cauchy sn-symmetric space with a σ-$\mathfrak{P}$ sn-network.

(5) X is a sequence-covering, π and σ-$\mathfrak{P}$-image of a metrizable space.

(6) X is a 1-sequence-covering, compact and σ-$\mathfrak{P}$-image of a metrizable space.

The above and some related work contain the study of locally finite or point-finite families as a special case, expand the research from bases to cs-networks, and enrich the idea of mutual classification on mappings and spaces.

Keywords cs-finite families; cs-coverings; point-star networks; sequence-covering mappings; σ-cs-mappings

MR(2010) Subject Classification 54C10, 54D55, 54E30

Chinese Library Classification O189.1

1 引言

度量化问题是一般拓扑学研究的中心课题之一, 众多的度量化定理为广义度量空间的研究提供了广阔的舞台 [22]. 通过开覆盖序列可以建立一系列的度量化定理, 由此产生用覆盖系研究拓扑空间的方法. 尤其是学者们发现了覆盖系可以很有效地用来构造把可度量空间映满具有这种覆盖系空间的一些自然映射, 导致了建立在覆盖系和映射相互作用基础上的空间与映射的相互分类理论 [6, 22]. 例如, Alexandroff [1] 引入点正则基, 将其刻画为具有点有限的展开, 此后, Arhangel'skiĭ [4] 把具有点正则基的空间刻画为度量空间的开紧映像.

拓扑空间中的收敛序列作为一种与分析学密切相关的特殊紧子集, 是一般拓扑学中最基本的概念之一 [9]. 在广义度量空间理论中, 与收敛序列相关的成功概念有 cs 有限集族、cs 网和序列覆盖映射等. 作为局部有限集族的发展, Boone [8] 引入 cs 有限集族, 证明了可度量化空间等价于具有 σ-cs 有限基的正则空间; 作为弱基和伪基的共同推广, Guthrie [16] 引入 cs 网, 为 $\aleph_0$ 空间、$\aleph$ 空间和 g 可度量空间等空间类的研究开辟了新的方向 [10, 27].

作为点正则基的推广, Ikeda, Liu 和 Tanaka [17] 研究了具有点正则弱基的空间, 林寿和燕鹏飞 [25] 探讨了具有点正则 cs 网的空间, 获得一系列等价刻画.

定理 1.1 下述条件相互等价 [25]:

(1) X 具有点正则 cs 网.

(2) X 具有点有限 cs 覆盖列的点星网.

(3) X 是度量空间的序列覆盖的紧映像.

作为点有限 cs 覆盖列的点星网的加强, Tanaka 和 Ge [29] 讨论了具有局部有限 cs 覆盖列点星网的空间. 近来, An 和 Tuyen [3] 系统化了这类空间的研究, 借助 Cauchy sn 对称空间或 mssc

映射, 获得下述结果.

定理 1.2 下述条件相互等价 [3]:

(1) X 具有局部有限 cs 覆盖列的点星网.

(2) X 是具有 σ 局部有限 cs 网的 Cauchy sn 对称空间.

(3) X 是度量空间的序列覆盖、紧且 mssc 映像.

(4) X 是度量空间的序列覆盖、紧且 σ 映像 [24].

上述两个定理都表现了具有确定的 cs 覆盖列点星网的空间与度量空间的序列覆盖紧映像之间的紧密联系. cs 有限集族介于局部有限集族与点有限集族之间. 本文的主要目的是刻画具有 cs 有限 cs 覆盖列点星网的空间, 讨论了与 so 有限集族、so 网等相关的空间类, 并把这些空间刻画为度量空间在确定映射下的像. 我们考察了确定的集族性质 $\mathfrak{P}$, 以一般的形式把 $\mathfrak{P}$ 且 cs 覆盖列的点星网, σ-$\mathfrak{P}$ 的 cs 网及度量空间的序列覆盖、紧且 σ-$\mathfrak{P}$ 映像联系起来. 特别地, 我们引入 mssnc 映射和 σ-cs 映射, 证明了下述结果, 见定理 3.5.

定理 1.3 下述条件相互等价:

(1) X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网.

(2) X 是具有 σ-cs 有限 cs 网的 Cauchy sn 对称空间.

(3) X 是度量空间的序列覆盖、紧且 mssnc 映像.

(4) X 是度量空间的序列覆盖、紧且 σ-cs 映像.

上述定理拓展了从基到 cs 网的研究, 进一步发现了 cs 覆盖或 cs 有限集族在一般拓扑学中的作用, 并且丰富了映射与空间的相互分类思想.

2 cs 有限集族与映射

本节主要介绍本文要使用的一些集族与映射的概念, 并叙述他们之间的一些基本关系.

$\mathbb{N}$, ω 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示全体正整数集, 自然数集和整数集. 所有空间均满足 T_2 分离性质. 一些未定义的记号和术语见文 [9]. 拓扑空间 X 的拓扑记为 τ_X, 或简记为 τ.

设 X 是一个拓扑空间, $P \subset X$ 且 $x \in X$. P 称为点 x 的序列邻域, 若 X 中每一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是终于 P 的, 即存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P$. P 称为 X 的序列开集, 若 P 是其中每一点的序列邻域. 若 x 的序列邻域 P 自身是序列开集, 则称 P 是 x 的序列开邻域. 再设 $\mathscr{P}$ 是 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 x 的网 [9], 如果 $x \in \cap\mathscr{P}$ 且若 $x \in U \in \tau$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使得 $P \subset U$. $\mathscr{P}$ 称为 x 的 sn (so) 网 [20], 如果 $\mathscr{P}$ 是 x 的网且 $\mathscr{P}$ 的每一元是 x 的序列 (序列开) 邻域 (在 sn 网的标准定义中 [20], 还要求 $\mathscr{P}$ 满足 "若 $U, V \in \mathscr{P}$, 则存在 $W \in \mathscr{P}$, 使得 $W \subset U \cap V$". 这条可通过考虑 $\mathscr{P}$ 的有限交来实现). 每一点具有可数 sn (so) 网的空间称为 snf (sof) 可数空间 [21].

显然, 每一开集是序列开集. 拓扑空间 X 称为序列空间 [9], 若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

定义 2.1 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的网 [9], 若 $x \in U \in \tau$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使得 $x \in P \subset U$.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 网 [16], 若 $x \in U \in \tau$ 且 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P 且 $P \subset U$.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 网 (so 网)[20], 若 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 且每一 $\mathscr{P}_x$ 是 x 的 sn 网 (so 网).

显然

$$\text{基} \Rightarrow so\ \text{网} \Rightarrow sn\ \text{网} \Rightarrow cs\ \text{网} \Rightarrow \text{网} \Rightarrow \text{覆盖}.$$

定义 2.2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 覆盖 [30], 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中收敛于 $x\in X$ 的序列, 则存在 $P\in\mathscr{P}$, 使得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 覆盖 [25], 若 $\mathscr{P}$ 的每一元是 X 中某点的序列邻域且对每一 $x\in X$ 存在 $P\in\mathscr{P}$, 使得 P 是 x 的序列邻域.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 so 覆盖 [25], 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的由序列开集组成的覆盖.

显然

$$\text{开覆盖} \Rightarrow so\ \text{覆盖} \Rightarrow sn\ \text{覆盖} \Rightarrow cs\ \text{覆盖} \Rightarrow \text{覆盖}.$$

对空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及 $A\subset X$, 记 $(\mathscr{P})_A=\{P\in\mathscr{P}: A\cap P\neq\emptyset\}$, 如果 $A=\{x\}$, 简记 $(\mathscr{P})_A$ 为 $(\mathscr{P})_x$.

定义 2.3 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的点 (cs) 有限集族 [8], 若 X 的每一单点集 (收敛序列) 仅与 $\mathscr{P}$ 中的有限个元相交; 可数个 cs 有限集族之并称为 σ-cs 有限集族.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn (so, 局部) 有限集族, 若 X 中的每一点存在序列 (序列开, 开) 邻域使其仅与 $\mathscr{P}$ 中的有限个元相交; 可数个 sn (so, 局部) 有限集族之并称为 σ-sn (so, 局部) 有限集族.

显然

$$\text{局部有限集族} \Rightarrow so\ \text{有限} \Rightarrow sn\ \text{有限} \Rightarrow cs\ \text{有限} \Rightarrow \text{点有限集族}.$$

引理 2.4 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族且 X 是 snf (sof, 第一) 可数空间. 若 $\mathscr{P}$ 是 cs 有限的, 则 $\mathscr{P}$ 是 sn (so, 局部) 有限的.

证明 Boone [8] 证明了第一可数空间的 cs 有限集族是局部有限的. 此处, 我们仅证明 X 是 snf 可数空间且 $\mathscr{P}$ 是 cs 有限集族的情形. 若 $\mathscr{P}$ 不是 sn 有限集族, 则存在 $x\in X$, 使得对 x 在 X 中任意的序列邻域 V, $(\mathscr{P})_V$ 是无限的. 由于 X 是 snf 可数空间, 让 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的 sn 网, 则存在 $\mathscr{P}$ 的无限子集 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $V_n\cap P_n\neq\emptyset$. 取定 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $x_n\in V_n\cap P_n$, 则序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x, 从而 $\mathscr{P}$ 不是 cs 有限的, 矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 是 sn 有限的. 证毕.

定义 2.5 设 $f: X\to Y$ 是连续映射.

(1) f 称为 ssnc (ssoc, ssc) 映射 [19], 如果存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 满足: 对每一 $y\in Y$, 存在 y 在 Y 中的序列 (序列开邻域, 开) 邻域列 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使每一 $\overline{p_i(f^{-1}(V_i))}$ 是 X_i 的紧子集, 其中 $p_i:\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i\to X_i$ 是投射; 如果更设所有的 X_i 是度量空间, 那么 f 称为 mssnc (mssoc, mssc) 映射.

(2) f 称为 σ-cs (σ-so, σ) 映射 [27], 若存在空间 X 的基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 中的 σ-cs (σ-so, σ 局部) 有限集族.

显然

$$\text{mssc 映射} \Rightarrow \text{mssoc 映射} \Rightarrow \text{mssnc 映射};\ \ \sigma\ \text{映射} \Rightarrow \sigma\text{-}so\ \text{映射} \Rightarrow \sigma\text{-}cs\ \text{映射}.$$

近来, mssc 映射在拓扑代数的探讨中引起重视 [11].

引理 2.6　(1) 每一 mssoc 映射是 σ-so 映射.

(2) 每一 mssnc 映射是 σ-cs 映射.

(3) 每一 mssc 映射是 σ 映射 [26].

证明　仅证明 mssnc 映射的情形. 设 $f: X \to Y$ 是一个 mssnc 映射, 于是存在度量空间列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 mssnc 映射的条件. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 让 $\mathscr{P}_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{i,j}$ 是 X_i 的基, 其中每一 $\mathscr{P}_{i,j}$ 是 X_i 的局部有限集族. 对每一 $i, j \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{B}_{i,j} = \left\{ X \cap \bigcap_{k\le i} p_k^{-1}(P_{k,j}) : P_{k,j} \in \mathscr{P}_{k,j} \right\}.$$

下证 $f(\mathscr{B}_{i,j})$ 是 sn 有限的. 对每一 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的序列邻域列 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使每一 $\overline{p_k(f^{-1}(V_k))}$ 是 X_k 的紧子集. 令 $U_i = \bigcap_{k\le i} V_k$, 则 U_i 是 y 的序列邻域且对每一 $k \le i$, 由 $\mathscr{P}_{k,j}$ 的局部有限性, 仅有有限个 $P \in \mathscr{P}_{k,j}$, 使得

$$p_k(f^{-1}(U_i)) \cap P \neq \emptyset,$$

即 $f^{-1}(U_i) \cap p_k^{-1}(P) \neq \emptyset$. 因为

$$U_i \cap f\left(X \cap \bigcap_{k\le i} p_k^{-1}(P_{k,j}) \right) \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{k\le i} f^{-1}(U_i) \cap p_k^{-1}(P_{k,j}) \neq \emptyset,$$

所以 U_i 仅与 $f(\mathscr{B}_{i,j})$ 中的有限个元相交. 又因为 sn 有限集族是 cs 有限集族, 所以 $f(\mathscr{B}_{i,j})$ 是 cs 有限集族. 令 $\mathscr{B} = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{i,j}$, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的基且 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ-cs 有限集族. 故 f 是 σ-cs 映射. 证毕.

定义 2.7　设 $f: X \to Y$ 是连续映射.

(1) f 称为紧映射, 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

(2) f 称为序列覆盖映射 [28], 若 Y 中每一收敛序列是 X 中某一收敛序列的像.

(3) f 称为 1 序列覆盖映射 [20], 若对每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足: 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 y, 则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $f(x_n) = y_n$.

(4) f 称为 2 序列覆盖映射 [20], 若 $y \in Y$ 且 $x \in f^{-1}(y)$, 则对 Y 中每一收敛于 y 的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $f(x_n) = y_n$.

显然

$$2\text{ 序列覆盖映射} \Rightarrow 1\text{ 序列覆盖映射} \Rightarrow \text{序列覆盖映射}.$$

引理 2.8　设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖的紧映射. 若 X 是第一可数空间, 则 f 是 1 序列覆盖映射 [23].

3　具有 cs 覆盖列的点星网

本节讨论具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网的空间, 它与具有 σ-cs 有限 cs 网的空间密切相关. 定理 1.2 给出的具有局部有限 cs 覆盖列的点星网空间的刻画有助于我们加深对具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网空间的认识, 尤其是通过度量空间的映像刻画这类空间.

设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的覆盖列. $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为 X 的点星网 [25], 若 $x \in X$, 则 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{P}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网 (点星网也称为半加细序列 [5] 或 σ 强网 [17]). 当每一覆盖 $\mathscr{P}_i$ 具有性质 P 时, 点星网 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为 P 覆盖列的点星网, 或简称为 P 点星网.

显然, 拓扑空间的展开就是开覆盖列的点星网 [9]. 若 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的覆盖列, 则 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的点星网当且仅当对每一 $x\in X$ 及每一 $P_{x,i}\in(\mathscr{P}_i)_x$, 集族 $\{P_{x,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网.

定义 3.1 设 X 是一个拓扑空间, d 是 X 上的对称, 即函数 $d: X\times X\to[0,\infty)$ 满足: 对每一 $x,y\in X$, $d(x,y)=d(y,x)$, 而且

$$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y.$$

对每一 $x\in X$ 及 $m\in\mathbb{N}$, 令 $S_m(x)=\{y\in X: d(x,y)<1/m\}$. (X,d) 称为 sn 对称空间 [15], 若对每一 $x\in X$, $\{S_m(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 x 的 sn 网, 这时 d 称为 X 的 sn 对称. (X,d) 称为 Cauchy sn 对称 [2, 18], 若 d 是 X 上的 sn 对称, 如果 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的收敛序列且 $\varepsilon>0$, 则存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得当 $m,n>k$ 时, 有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

确定的点星网可刻画 Cauchy sn 对称空间. 设 M 是一个度量空间, 连续映射 $f: M\to X$ 称为 π 映射 [6], 若存在 M 上相容的度量 d, 使得对每一 $x\in U\in\tau_X$,

$$d(f^{-1}(x),M\setminus f^{-1}(U))>0.$$

显然, 度量空间上的紧映射是 π 映射.

引理 3.2 下述条件相互等价 [18]:

(1) X 具有 cs 覆盖列的点星网.

(2) X 具有 sn 覆盖列的点星网.

(3) X 是 Cauchy sn 对称空间.

(4) X 是度量空间的序列覆盖的 π 映像.

下述引理可直接验证.

引理 3.3 设 U 是空间 X 中点 x 的序列邻域. 若 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $P_m\subset U$.

对集族性质 $\mathfrak{P}$, 映射 $f: M\to X$ 称为 σ-$\mathfrak{P}$ 映射, 如果存在拓扑空间 M 的基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-$\mathfrak{P}$ 集族. 集族性质 $\mathfrak{P}$ 称为关于有限交 (有限并) 封闭, 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都是具有 $\mathfrak{P}$ 的集族, 则

$$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}=\{A\cap B: A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}\ \ (\mathscr{A}\cup\mathscr{B})$$

也具有 $\mathfrak{P}$. 积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 中的点 x 记为 (x_i), 其中每一 $p_i(x)=x_i$.

引理 3.4 设集族性质 $\mathfrak{P}$ 满足下述条件:

(a) 有限族 $\Rightarrow$ $\mathfrak{P}$ 集族 $\Rightarrow$ 点有限集族;

(b) $\mathfrak{P}$ 关于有限交, 有限并封闭;

(c) $\mathfrak{P}$ 关于子族是遗传的.

对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有 $\mathfrak{P}$ 且 cs 覆盖列的点星网.

(2) X 具有 $\mathfrak{P}$ 且 sn 覆盖列的点星网.

(3) X 是 Cauchy sn 对称空间且具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 cs 网.

(4) X 是 Cauchy sn 对称空间且具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 sn 网.

(5) X 是度量空间的序列覆盖、π 且 σ-$\mathfrak{P}$ 映像.

(6) X 是度量空间的 1 序列覆盖、紧且 σ-$\mathfrak{P}$ 映像.

证明 (2)⇒(6) 设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 $\mathfrak{P}$ 且 sn 覆盖列点星网. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$, Λ_i 赋予离散拓扑. 令

$$M=\left\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i:\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\text{ 构成 }X\text{ 中某点 }x_\alpha\text{ 的网 }\right\},$$

则 M 是可度量化空间, 并且对于每一 $\alpha\in M$, x_α 是唯一确定的, 于是可以定义函数 $f:M\to X$, 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$. $(f,M,X,\{\mathscr{P}_i\})$ 称为 Ponomarev 系 [26]. 由于每一 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的点有限 cs 覆盖, 所以 f 是序列覆盖的紧映射 [14, 15]. 由引理 2.8, f 是 1 序列覆盖映射. 对每一 $(\alpha_i)\in M$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$B(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\{(\beta_i)\in M:\text{ 当 }i\le n\text{ 时, 有 }\beta_i=\alpha_i\},$$

则

$$f(B(\alpha_1,\dots,\alpha_n))=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}\in\bigwedge_{i\le n}\mathscr{P}_i.$$

事实上, 若 $\beta=(\beta_i)\in B(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, 则

$$f(\beta)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\beta_i}\subset\bigcap_{i\le n}P_{\beta_i}=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i},$$

所以 $f(B(\alpha_1,\dots,\alpha_n))\subset\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 另一方面, 若 $x\in\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$, 选取 $\beta=(\beta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i$, 使得 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\beta_i}$ 且当 $i\le n$ 时, 有 $\beta_i=\alpha_i$, 由于 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的点星网, 于是 $\{P_{\beta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网, 从而 $\beta\in B(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 且 $f(\beta)=x$, 因此

$$\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}\subset f(B(\alpha_1,\dots,\alpha_n)).$$

故 $f(B(\alpha_1,\dots,\alpha_n))=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$.

因为 $\{B(\alpha_1,\dots,\alpha_n):(\alpha_i)\in M,n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 的一个基, 由条件 (b) 和 (c), f 是 σ-$\mathfrak{P}$ 映射.

显然, (6)⇒(5).

(5)⇒(3) 设 $f:M\to X$ 是一个序列覆盖、π 且 σ-$\mathfrak{P}$ 映射. 由引理 3.2, X 是 Cauchy sn 对称空间. 因为 f 是 σ-$\mathfrak{P}$ 映射, 存在 M 的基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-$\mathfrak{P}$ 集族. 又因为序列覆盖映射保持 cs 网, 所以 $\mathscr{P}$ 也是 X 的 cs 网.

(3)⇒(4) 设 Cauchy sn 对称空间 X 具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 cs 网 $\mathscr{P}$. 因为 sn 对称空间是 snf 可数空间, 对每一 $x\in X$, 让 $\{U_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的 sn 网. 再令

$$\mathscr{P}_x=\{P\in\mathscr{P}:\text{ 存在 }n\in\mathbb{N},\text{ 使得 }U_{x,n}\subset P\},$$

则 $\mathscr{P}_x$ 是 x 的 sn 网. 否则, 存在 x 的邻域 U, 使得若 $P\in\mathscr{P}_x$, 则 $P\not\subset U$. 由条件 (a), $\mathscr{P}$ 是点可数的集族, 记 $\{P\in(\mathscr{P})_x:P\subset U\}=\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 则每一 $U_{x,n}\not\subset P_k$. 对每一 $n,k\in\mathbb{N}$, 取定 $x_{n,k}\in U_{x,n}\setminus P_k$. 对每一 $n\ge k$, 置 $y_m=x_{n,k}$, 其中 $m=k+\frac{n(n-1)}{2}$. 那么序列 $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x. 由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网, 则存在 $k,i\in\mathbb{N}$, 使得 $\{y_m:m>i\}\subset P_k$. 固定 $m>i$ 和 $n\ge k$, 使得 $y_m=x_{n,k}$, 则 $x_{n,k}\in P_k$, 矛盾. 由条件 (c), $\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 是 X 的 σ-$\mathfrak{P}$ 的 sn 网.

(4)⇒(1) 设 Cauchy sn 对称空间 (X,d) 具有 σ-$\mathfrak{P}$ 的 sn 网 $\mathscr{P}$, 其中 d 是 X 上的 Cauchy sn 对称. 对 X 的非空子集 P, 令

$$d(P)=\sup\{d(x,y):x,y\in P\}.$$

记 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 其中每一 $\mathscr{P}_n$ 具有 $\mathfrak{P}$ 且 $X\in\mathscr{P}_n$. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{H}_i=\bigwedge_{n\leq i}\mathscr{P}_n$, 则 $\mathscr{H}_i$ 具有 $\mathfrak{P}$ 且 $\mathscr{H}_i\subset\mathscr{H}_{i+1}$. 对每一 $m,n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{Q}_{m,n}(x)=\{H\in\mathscr{H}_m:S_m(x)\subset H,\ d(H)<1/n\},\ x\in X;$$
$$A_{m,n}=\{x\in X:\mathscr{Q}_{m,n}(x)=\emptyset\};\quad B_{m,n}=X\setminus A_{m,n};$$
$$\mathscr{Q}_{m,n}=\bigcup\{\mathscr{Q}_{m,n}(x):x\in B_{m,n}\};\quad \mathscr{F}_{m,n}=\mathscr{Q}_{m,n}\cup\{A_{m,n}\}.$$

由于 $\mathscr{Q}_{m,n}\subset\mathscr{H}_m$, 所以 $\mathscr{F}_{m,n}$ 也具有 $\mathfrak{P}$. 下面的 (i) 和 (ii) 说明 (1) 是正确的.

(i) 每一 $\mathscr{F}_{m,n}$ 是 X 的 cs 覆盖.

设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 中收敛于 x 的序列. 分三种情况讨论:

如果 $x\in B_{m,n}$, 则 $\mathscr{Q}_{m,n}(x)\neq\emptyset$, 让 $H\in\mathscr{Q}_{m,n}(x)$, 由于 $S_m(x)$ 是 x 的序列邻域, 则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 终于 $S_m(x)$ 且 $S_m(x)\subset H\in\mathscr{F}_{m,n}$.

如果 $x\notin B_{m,n}$ 且 $B_{m,n}$ 仅含有序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的有限项, 则 $x\in A_{m,n}$ 且 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 终于 $A_{m,n}\in\mathscr{F}_{m,n}$.

如果 $x\notin B_{m,n}$ 且 $B_{m,n}$ 含有序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的无限项, 由于 d 是 X 上的 Cauchy sn 对称, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $i,j\geq n_0$ 时, 有 $d(x_i,x_j)<1/m$ 且 $d(x,x_i)<1/m$. 选取 $x_{k_0}\in B_{m,n}$, 使得 $k_0\geq n_0$, 则存在 $H\in\mathscr{Q}_{m,n}(x_{k_0})$, 于是当 $i\geq n_0$ 时, 有 $x,x_i\in S_m(x_{k_0})\subset H$, 从而 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 终于 $H\in\mathscr{F}_{m,n}$. 这完成了 (i) 的证明.

(ii) $\{\mathscr{F}_{m,n}:m,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的点星网.

设 $x\in U\in\tau$. 选取 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $S_n(x)\subset U$. 对上述 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $j\in\mathbb{N}$, 使得 $d(S_j(x))<1/n$. 否则, 对每一 $k\in\mathbb{N}$ 有 $d(S_k(x))\geq 1/n$, 于是存在 $x_k,y_k\in S_k(x)$, 使得 $d(x_k,y_k)\geq 1/2n$. 定义 X 中的序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $z_{2k-1}=x_k$ 且 $z_{2k}=y_k$, 则 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x, 从而存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $k,m\geq k_0$ 时, 有 $d(z_k,z_m)<1/2n$, 于是 $d(x_{k_0},y_{k_0})<1/2n$, 矛盾. 现在设 $d(S_j(x))<1/n$. 由于 $S_j(x)$ 是 x 的序列邻域且 $\mathscr{P}$ 是 X 的 sn 网, 由引理 3.3, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $H\in\mathscr{H}_k$, 使得 H 是 x 的序列邻域且 $H\subset S_j(x)$. 仍由引理 3.3, 存在 $i\in\mathbb{N}$, 使得 $S_i(x)\subset H$. 让 $m=\max\{i,k\}$, 下面证明 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_{m,n})\subset S_n(x)$. 因为

$$S_m(x)\subset S_i(x)\subset H\in\mathscr{H}_k\subset\mathscr{H}_m\quad 且\ d(H)\leq d(S_j(x))<1/n,$$

所以 $H\in\mathscr{Q}_{m,n}$, 于是 $x\in B_{m,n}$. 设 $x\in F\in\mathscr{F}_{m,n}$, 则 $F\in\mathscr{Q}_{m,n}$, 那么 $d(F)<1/n$, 于是 $F\subset S_n(x)$, 从而 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_{m,n})\subset S_n(x)$. 这表明

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_{m,n})\subset U.$$

这完成了 (ii) 的证明.

(1)⇒(2) 设空间 X 具有 $\mathfrak{P}$ 且 cs 覆盖列的点星网 $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对每一 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $P\in\mathscr{P}_n$ 使其是 x 的序列邻域. 事实上, 若 $(\mathscr{P}_n)_x$ 中的元均不是 x 的序列邻域, 由于 $\mathscr{P}_n$ 是点有限的覆盖, 记 $(\mathscr{P}_n)_x=\{P_i\}_{i\leq k}$, 那么每一 P_i 不是 x 的序列邻域, 于是存在 $X\setminus P_i$ 中的点组成的序列 $\{x_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使其收敛于 x. 对于每一 $i\leq k$ 和 $j\in\mathbb{N}$, 让 $m=i+(j-1)k$, 并定义 $y_m=x_{i,j}$, 则序列 $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x 且不终于任一 P_i, 这与 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的 cs 覆盖相矛盾. 设 $P_{x,n}\in\mathscr{P}_n$ 是 x 的序列邻域. 令

$$\mathscr{Q}_n=\{P_{x,n}:x\in X\},$$

则 $\mathscr{Q}_n$ 是 X 的 $\mathfrak{P}$ 且 sn 覆盖. 从而, $\{\mathscr{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的具有 $\mathfrak{P}$ 且 sn 覆盖列的点星网. 证毕.

上述引理是本文的关键技巧, 其主要思想来自文 [3] 的提练. An 和 Tuyen [3] 分别讨论了点有限、紧有限和局部有限集族等的情形. 我们提出的性质 $\mathfrak{P}$ 具有一般的意义, 如适用于本文探讨的 cs 有限、sn 有限和 so 有限集族等的情形. 下述结果就是引理 3.4 的应用.

定理 3.5 对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有 sn 有限 sn 覆盖列的点星网.

(2) X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网.

(3) X 是具有 σ-sn 有限 sn 网的 Cauchy sn 对称空间.

(4) X 是具有 σ-cs 有限 cs 网的 Cauchy sn 对称空间.

(5) X 是度量空间的 1 序列覆盖、紧且 mssnc 映像.

(6) X 是度量空间的序列覆盖、π 且 σ-cs 映像.

证明 取 $\mathfrak{P}$ 为 cs 有限性质. 由引理 3.4 和 2.4, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (6). 由引理 2.6 (2) 得 (5)$\Rightarrow$(6).

下面证明 (1)$\Rightarrow$(5) 设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的点星网. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 记 $\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$, Λ_i 赋予离散拓扑. 如引理 3.4 的证明, 让 $(f,M,X,\{\mathscr{P}_i\})$ 是 Ponomarev 系, 则 f 具有下述性质: 固定 $i\in\mathbb{N}$,

$$\text{若 } E_i\subset\Lambda_i,\ \text{则 } p_i(f^{-1}(E_i))=\{\alpha_i\in\Lambda_i:P_{\alpha_i}\cap E_i\neq\emptyset\}. \tag{3.1}$$

事实上, 设 $\alpha_i\in\Lambda_i$, 使得 $P_{\alpha_i}\cap E_i\neq\emptyset$, 取定 $x\in P_{\alpha_i}\cap E_i$, 并对每一 $n\in\mathbb{N}$ 取定 $\beta_n\in\Lambda_n$, 使得 $x\in P_{\beta_n}$ 且 $\beta_i=\alpha_i$. 令

$$\beta=(\beta_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n,$$

则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x\in E_i$, 于是 $\beta\in f^{-1}(E_i)$, 从而 $\alpha_i\in p_i(f^{-1}(E_i))$. 另一方面, 设 $\alpha_i\in p_i(f^{-1}(E_i))$, 则存在 $\beta=(\beta_n)\in f^{-1}(E_i)$, 使得 $\beta_i=\alpha_i$, 于是 $\alpha_i\in\Lambda_i$ 且 $f(\beta)\in P_{\alpha_i}\cap E_i$, 所以

$$p_i(f^{-1}(E_i))\subset\{\alpha_i\in\Lambda_i:P_{\alpha_i}\cap E_i\neq\emptyset\}.$$

故 (3.1) 式成立.

由条件 (1), 现在设每一 $\mathscr{P}_i$ 是空间 X 的 sn 有限的 sn 覆盖列. 由引理 3.4 的证明, 则 M 是度量空间且 $f:M\to X$ 是 1 序列覆盖的紧映射. 对每一 $x\in X$, 存在 x 的序列邻域列 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使得每一 V_i 仅与 $\mathscr{P}_i$ 中的有限个元相交. 由上述 (3.1) 式, 每一 $p_i(f^{-1}(V_i))$ 是离散空间 Λ_i 中的有限集, 于是 $\overline{p_i(f^{-1}(V_i))}$ 是 Λ_i 的紧子集. 故 f 是 mssnc 映射. 证毕.

注 3.6 (1) 定理 3.5 中的 1 序列覆盖映射不可以加强为 2 序列覆盖映射, 见例 3.8.

(2) 定理 3.5 证明中的 (3.1) 式具有一般性. 当 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 so (局部) 有限的点星网时, f 是 mssoc (mssc) 映射.

例 3.7 存在具有点有限开覆盖列的点星网的空间使其不具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网.

让 X 是 Heath 的 V 空间 [27], 则 X 是不可度量化的亚紧的可展的正则空间. 由于 X 是亚紧的可展空间, 于是 X 具有点有限开覆盖列的点星网, 即 X 具有点正则基 [1]. 若 X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网, 由引理 2.4, X 具有 σ 局部有限的 cs 网, 又由于 X 是正则的第一可数空间, 所以 X 是可度量化空间 [27], 矛盾. 故 X 不具有 cs 有限的 cs 覆盖列的点星网.

例 3.8 存在具有局部有限 cs 覆盖列的点星网的空间使其不具有 so 覆盖列的点星网.

让 X 是 Arens 空间 S_2, 即集 $X=\{x_n:n\in\omega\}\cup\{x_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$ 赋予下述拓扑 [9]:

(1) 每一 $x_{n,m}$ 是孤立点;

(2) 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 点 x_n 的邻域基元形如 $V_{n,m}=\{x_n\}\cup\{x_{n,k}:k\geq m\}$, $m\in\mathbb{N}$;

(3) 点 x_0 的邻域基元形如 $\{x_0\}\cup\bigcup_{n\geq i}V(n,m_n)$, $i,m_n\in\mathbb{N}$.

易见 X 是不可度量化的正则空间. 由于 X 的每一序列开集都是 X 的开集, 所以 X 是序列空间. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 记

$$W_i=\{x_0\}\cup\{x_n:n\geq i\},$$

并令

$$\mathscr{P}_i=\{\{x_{n,m}\}:n,m\in\mathbb{N}\}\cup\{V_{n,i}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{W_i\}.$$

易见, $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 cs 覆盖的点星网且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_i$ 是 X 的可数 sn 网. 由引理 3.2, X 是 Cauchy sn 对称空间. 由定理 1.2, X 具有局部有限 cs 覆盖列的点星网. 若 X 具有 so 覆盖列的点星网, 由于 X 是序列空间, 那么 X 是可展空间, 从而 X 是第一可数空间, 矛盾. 故 X 不具有 so 覆盖列的点星网. 这表明定理 3.5 及定理 1.2 中的 cs 覆盖或 sn 覆盖均不可加强为 so 覆盖. 空间 X 也不是度量空间的 2 序列覆盖的 σ-cs 映像. 否则, 设 M 是一个可度量化空间且 $f:M\to X$ 是 2 序列覆盖的 σ-cs 映射, 则存在 M 的一个基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-cs 有限集族. 由于 2 序列覆盖映射保持 so 网, 所以 X 具有 σ-cs 有限的 so 网. 又因为 X 是一个序列空间, 所以 X 是第一可数空间, 矛盾. 故 X 不是度量空间的 2 序列覆盖的 σ-cs 映像.

4 具有 *so* 覆盖列的点星网

例 3.8 表明: 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网的空间, 未必具有 so 覆盖列的点星网. 再对照定理 1.2 和 3.5, 有必要探讨具有局部有限 so 覆盖列的点星网及 so 有限 so 覆盖列的点星网. 这是本节的主要内容, 它可以认为是第 3 节方法的应用.

拓扑空间 X 称为 Fréchet–Urysohn 空间 [9], 若 $A\subset X$ 且 $x\in\overline{A}$, 则存在由 A 中点组成的序列使其收敛于 x. 显然, 每一第一可数空间是 Fréchet–Urysohn 空间; 每一 Fréchet–Urysohn 空间是序列空间.

引理 4.1 (1) 设序列空间 X 具有点可数的 cs 网. 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 则 X 是 Fréchet–Urysohn 空间 [21].

(2) 空间 X 是 Fréchet–Urysohn 空间当且仅当 X 中每一点的序列邻域是该点的邻域 [22].

空间 X 的序列余反射 sX 是集 X 赋予由 X 的全体序列开集所组成的拓扑 [7]. 显然, 空间 X 与其序列余反射 sX 有相同的收敛序列 [7], 相同的序列邻域及相同的序列开集, 从而 sX 是序列空间, 并且 X 是序列空间当且仅当 $sX=X$.

定理 4.2 对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有 so 有限 so 覆盖列的点星网.

(2) X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网且 sX 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(3) X 是具有 σ-so 有限 so 网的 Cauchy sn 对称空间.

(4) sX 具有局部有限展开.

(5) X 是度量空间的 2 序列覆盖、紧且 mssoc 映像.

(6) X 是度量空间的 2 序列覆盖、π 且 σ-so 映像.

证明 (1)$\Rightarrow$(5) 设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 so 有限 so 覆盖列的点星网. 如定理 3.5 中的证明, 让 $(f, M, X, \{\mathscr{P}_i\})$ 是 Ponomarev 系, 则 M 是度量空间且 $f: M\to X$ 是紧且 mssoc 映射. 由于每一 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的 so 覆盖, 所以 f 还是 2 序列覆盖映射 [13].

由引理 2.6 (1) 得 (5) $\Rightarrow$ (6). 下面证明:

(6)$\Rightarrow$(3) 设 $f: M\to X$ 是 2 序列覆盖、π 且 σ-so 映射. 因为 f 是 2 序列覆盖的 π 映射, 由定理 3.5, X 是 Cauchy sn 对称空间. 又由于 f 是 σ-so 映射, 存在空间 M 的基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-so 有限集族. 易验证 2 序列覆盖映射保持 so 网, 所以 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-so 有限 so 网. 故 X 是具有 σ-so 有限 so 网的 Cauchy sn 对称空间.

(3)$\Rightarrow$(2) 设 X 是具有 σ-so 有限 so 网的 Cauchy sn 对称空间. 由定理 3.5, X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网. 由引理 3.3, sX 具有 σ 局部有限基, 于是 sX 是第一可数空间. 由于 S_2 不是第一可数空间, 所以 sX 不含有子空间同胚于 S_2.

(2)$\Rightarrow$(4) 设 X 具有 cs 有限 cs 覆盖列的点星网, 且 sX 不含有闭子空间同胚于 S_2. 由定理 3.5, X 具有 sn 有限 sn 覆盖列的点星网 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 不妨设每一 $\mathscr{P}_{i+1}$ 加细 $\mathscr{P}_i$. 由引理 3.3, $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 sX 的 sn 有限 sn 覆盖列的点星网. 由引理 4.1 (1), sX 是 Fréchet–Urysohn 空间. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{B}_i=\{\mathrm{int}_{sX}(P): P\in\mathscr{P}_i\},$$

由引理 4.1 (2) 和 2.4, $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 sX 的局部有限展开.

(4)$\Rightarrow$(1) 设 sX 具有局部有限展开. 显然, X 具有 so 有限 so 覆盖列的点星网. 证毕.

定理 4.3 对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部有限 so 覆盖列的点星网.

(2) X 具有局部有限 cs 覆盖列的点星网且 sX 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(3) X 是具有 σ 局部有限 so 网的 Cauchy sn 对称空间.

(4) X 是度量空间的 2 序列覆盖、紧且 mssc 映像.

(5) X 是度量空间的 2 序列覆盖、π 且 σ 映像.

证明 (1)$\Rightarrow$(4) 设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的局部有限 so 覆盖的点星网. 如定理 3.5 中的证明, 让 $(f, M, X, \{\mathscr{P}_i\})$ 是 Ponomarev 系, 则 M 是度量空间且 $f: M\to X$ 是紧且 mssc 映射. 由于每一 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的 so 覆盖, 所以 f 还是 2 序列覆盖映射 [13].

由引理 2.6 (3) 得 (4) $\Rightarrow$ (5). 下面证明:

(5)$\Rightarrow$(3) 设 $f: M\to X$ 是 2 序列覆盖、π 且 σ 映射. 因为 f 是 2 序列覆盖的 π 映射, 故由定理 3.5, X 是 Cauchy sn 对称空间. 又由于 f 是 σ 映射, 存在空间 M 的基 $\mathscr{B}$, 使得 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ 局部有限集族. 易验证 2 序列覆盖映射保持 so 网, 所以 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ 局部有限 so 网. 故 X 是具有 σ 局部有限 so 网的 Cauchy sn 对称空间.

(3)$\Rightarrow$(2) 设 Cauchy sn 对称空间 X 具有 σ 局部有限 so 网 $\mathscr{P}$. 由定理 4.2, sX 不含有闭子空间同胚于 S_2. 由引理 3.4 中证明 (4) $\Rightarrow$ (1) 的记号及方法, 取 $\mathfrak{P}$ 为局部有限集族, 则 $\{\mathscr{F}_{m,n}: m,n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的局部有限 cs 覆盖列的点星网.

(2)⇒(1) 设 X 具有局部有限 cs 覆盖列的点星网 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 且 sX 不含有闭子空间同胚于 S_2. 由定理 4.2, X 是 sof 可数空间. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{B}_i=\{\mathrm{int}_{sX}(P):P\in\mathscr{P}_i\}.$$

由引理 3.4 中 (1) ⇒ (2) 的证明, 对每一 $x\in X$, 存在 $Q_{x,i}\in\mathscr{P}_i$ 使其是 x 的序列邻域. 由引理 3.3, 存在 X 的序列开集 $O_{x,i}$, 使得 $x\in O_{x,i}\subset Q_{x,i}$, 于是 $O_{x,i}\subset\mathrm{int}_{sX}(Q_{x,i})$. 这表明 $\mathscr{B}_i$ 是 X 的局部有限 so 覆盖. 因此 X 具有局部有限 so 覆盖列的点星网 $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 证毕.

注 4.4 (1) 映射 $M\to X$ 称为紧覆盖映射 [9], 若空间 X 的每一紧子集是空间 M 的某紧子集在 f 下的像. 定理 4.3 中的映射可加强为紧覆盖映射. 事实上, 要证明在 Ponomarev 系 $(f,M,X,\{\mathscr{P}_i\})$ 中 $f:M\to X$ 是紧覆盖映射, 只需证明每一 $\mathscr{P}_i$ 满足下述条件 [31]: X 的每一紧集 K 可表示为紧子集的有限族 $\mathscr{F}$ 之并且 $\mathscr{F}$ 中的每一元含于 $\mathscr{P}_i$ 的某元中. 由于 X 具有 σ 局部有限网, 于是紧子集 K 也具有 σ 局部有限网. 由于紧空间的局部有限集族是有限集, 于是 K 具有可数网, 从而 K 是可度量化空间 [9]. 对每一 $x\in K$, 存在 $P_x\in\mathscr{P}_i$, 使得 $x\in P_x$. 因为 P_x 是序列开集, 由引理 4.1 (2), $x\in\mathrm{int}_K(P_x\cap K)$, 于是存在 K 中的开集 U_x, 使得

$$x\in U_x\subset\mathrm{cl}_K(U_x)\subset\mathrm{int}_K(P_x\cap K).$$

K 的相对开覆盖 $\{U_x:x\in K\}$ 具有有限子覆盖, 设为 $\{U_{x_j}\}_{j\le m}$. 这时,

$$K=\bigcup_{j\le m}\mathrm{cl}_K(U_{x_j})\ \text{ 且每一 }\ \mathrm{cl}_K(U_{x_j})\subset P_{x_j}\in\mathscr{P}_i.$$

但是, 定理 3.5 和 4.2 中的映射都不能加强为紧覆盖映射, 见例 4.5.

(2) 定理 4.2 和定理 4.3 中的 2 序列覆盖映射都不可减弱为 1 序列覆盖映射. 让 X 是例 3.8 中给出的具有局部有限 cs 覆盖列点星网的空间. 由定理 1.2, X 是度量空间的序列覆盖、紧且 σ 映像, 由引理 2.8, 这序列覆盖映射也是 1 序列覆盖映射. 由于 X 不具有 so 覆盖列的点星网, 所以 X 不满足定理 4.2 和定理 4.3 的条件.

(3) 例 3.8 表明定理 4.3 (2) 中的条件 “sX 不含有闭子空间同胚于 S_2” 不可省略.

例 4.5 存在具有 so 有限 so 覆盖列的点星网的空间使其不具有局部有限覆盖列的点星网.

让 X 是正整数集 $\mathbb{N}$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$ (见文 [9]). 由于 X 中不存在非平凡的收敛序列 [9], 于是 X 的每一子集均是序列开集, 从而 $\{\{x\}:x\in X\}$ 是 X 的 so 有限 so 网. 故 X 具有 so 有限 so 覆盖列的点星网 (满足定理 3.5 和 4.2 的条件). 这时, X 不是度量空间的连续的紧覆盖映像. 否则, 设 M 是一个度量空间且 $f:M\to X$ 是连续的紧覆盖映射, 则存在 M 的紧子集 L, 使得 $f(L)=X$, 于是 X 是可度量空间, 矛盾. 由于具有局部有限覆盖列的点星网的紧空间是可度量化空间, 所以 X 不具有局部有限覆盖列的点星网.

例 4.6 存在不可度量化的空间使其具有局部有限的展开.

让 $\tau_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上通常的欧氏拓扑. 让 S 是实直线 $\mathbb{R}$ 赋予 Smirnov 删除序列拓扑 τ_S, 即 $U\in\tau_S$ 当且仅当存在 $O\in\tau_{\mathbb{R}}$ 和 $T\subset\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$, 使得 $U=O\setminus T$[9]. 易见, S 不是正则空间, 所以 S 不是可度量化空间. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 记

$$T_n=\left\{\frac{1}{m}:n\le m\in\mathbb{N}\right\},$$

并令

$$\mathscr{B}_n=\left\{\left(\frac{2k-1}{n},\frac{2k+1}{n}\right)\Big\backslash T_n:k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{2k}{n},\frac{2k+2}{n}\right):k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

易见, $\{\mathscr{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 S 的局部有限的展开.

最后, 本文所讨论的一些空间类之间的关系总结如下:

局部有限 so 覆盖列的点星网
(σ 局部有限 so 网的
Cauchy sn 对称空间)

so 有限 so 覆盖列的点星网
(σ-so 有限 so 网的
Cauchy sn 对称空间)

局部有限 cs 覆盖列的点星网
(σ 局部有限 cs 网的
Cauchy sn 对称空间)

cs 有限 cs 覆盖列的点星网
(σ-cs 有限 cs 网的
Cauchy sn 对称空间)

点有限 cs 覆盖列的点星网
(点正则 cs 网)

参 考 文 献

[1] Alexandroff S. P., On the metrization of topological spaces (in Russian), *Bull. Polon. Sci. Ser. Math.*, 1960, **8**: 135–140.

[2] An T. V., Tuyen L. Q., On π-images of separable metric spaces and a problem of Shou Lin, *Mat. Vesnik*, 2012, **64**(4): 297–302.

[3] An T. V., Tuyen L. Q., Cauchy sn-symmetric spaces with a cs-network (cs^*-network) having property σ-P, *Topology Proc.*, 2018, **51**: 61–75.

[4] Arhangel'skiĭ A. V., On mappings of metric spaces (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, **145**(2): 245–247.

[5] Arhangel'skiĭ A. V., Bicompact sets and the topology of spaces (in Russian), *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1965, **13**: 3–55.

[6] Arhangel'skiĭ A. V., Mappings and spaces (in Russian), *Uspechi Mat. Nauk*, 1966, **21**(4): 133–184.

[7] Banakh T. O., Bogachev V. I., Kolesnikov A. V., k^*-Metrizable spaces and their applications, *J. Math. Sci.*, 2008, **155**(4): 475–522.

[8] Boone J. R., Some characterizations of paracompactness in k-spaces, *Fund. Math.*, 1971, **72**(2): 145–153.

[9] Engelking R., General Topology (Revised and Completed Edition), Heldermann, Berlin, 1989.

[10] Foged L., Characterizations of $\aleph$-spaces, *Pacific J. Math.*, 1984, **110**(1): 59–63.

[11] Gabriyelyan S. S., Kąkol J., On $\mathfrak{P}$-spaces and related concepts, *Topol. Appl.*, 2015, **191**: 178–198.

[12] Gao Z. M., $\aleph$-space is invariant under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, 1987, **5**(2): 271–279.

[13] Ge X., Ge Y., 2-Sequence-covering mappings in Ponomarev-systems, *Adv. Math. China*, 2015, **44**(5): 752–756.

[14] Ge Y., Lin S., On Ponomarev-systems, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 2007, **10B**(2): 455–467.

[15] Ge Y., Lin S., g-Metrizable spaces and the images of semi-metric spaces, *Czech. Math. J.*, 2007, **57**(4): 1141–1149.

[16] Guthrie J. A., A characterization of $\aleph_0$-spaces, *General Topol. Appl.*, 1971, **1**(2): 105–110.

[17] Ikeda Y., Liu C., Tanaka Y., Quotient compact images of metric spaces, and related matters, *Topol. Appl.*, 2002, **122**(1–2): 237–252.
[18] Li Z. W., Xie T. S., A note on sequence-covering π-images of metric spaces, *Mat. Vesnik*, 2012, **64**(4): 326–329.
[19] Lin S., Locally countable collections, locally finite collections and Alexandroff's problems, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 1994, **37**(4): 491–496.
[20] Lin S., On sequence-covering s-mappings (in Chinese), *Adv. Math. PRC*, 1996, **25**(6): 548–551.
[21] Lin S., A note on the Arens' space and sequential fan, *Topol. Appl.*, 1997, **81**: 185–196.
[22] Lin S., Poin-covering Covers and Sequence-covering Mappings (in Chinese), the Second Edition, Science Press, Beijing, 2015.
[23] Lin S., Cai Z. Y., Closed mappings, boundary-compact mappings and sequence-covering mappings, *Houston J. Math.*, 2016, **42**(3): 1059–1078.
[24] Lin S., Ge Y., Compact-covering and 1-sequence-covering images of metric spaces, *Houston J. Math.*, 2019, **45**(1): 293–305.
[25] Lin S., Yan P. F., On sequence-covering compact mappings, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2001, **44**(1): 175–182.
[26] Lin S., Yan P. F., Notes on cfp-covers, *Comment Math. Univ. Carolinae*, 2003, **44**: 295–306.
[27] Lin S., Yun Z. Q., Generalized Metric Spaces and Mappings, Atlantis Studies in Mathematics 6, Atlantis Press, Paris, 2016; Mathematics Monograph Series 34, Science Press, Beijing, 2017.
[28] Siwiec F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings, *General Topol. Appl.*, 1971, **1**: 143–154.
[29] Tanaka Y., Ge Y., Around quotient compact images of metric spaces, and symmetric spaces, *Houston J. Math.*, 2006, **32**(1): 99–117.
[30] Yan P. F., On strong sequence-covering compact mappings, *North. Math. J.*, 1998, **14**(3): 341–344.
[31] Yan P. F., Jiang S. L., On the compact-covering π-maps (in Chinese), *J. Math.*, 2004, **24**(4): 429–432.