第62卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.6
2019年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)06-0853-12 **文献标识码:** A

双单子分配律的 R- 矩阵

郭双建

贵州财经大学数学与统计学院 贵阳 550025
E-mail: shuangjguo@gmail.com

张晓辉

曲阜师范大学数学科学学院 曲阜 273165
E-mail: zxhui-000@126.com

摘 要 本文讨论了双单子分配律的表示及其 R- 矩阵结构. 设 F 和 G 是给定的双单子, 刻画了单子双模范畴, 并给出了其为辫子范畴的充要条件, 由此构造了量子 Yang–Baxter 方程的一组新解系.

关键词 双单子; 单子分配律; 辫子张量范畴
MR(2010) 主题分类 18D10, 16T05
中图分类 O154.1

The R-Matrix of Bimonad Distributive Law

Shuang Jian GUO

School of Mathematics and Statistics,
Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025*, P. R. China*
E-mail: *shuangjguo@gmail.com*

Xiao Hui ZHANG

School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University,
Qufu 273165*, P. R. China*
E-mail: *zxhui*-000@126.*com*

Abstract The aim of this paper is to define and study the R-matrix of a bimonad distributive law. Assume that F and G are bimonads, we give necessary and sufficient conditions for $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$, the category of F,G-bimodules, to be a braided monoidal category.

Keywords Bimonad; Monad distributive law; Braided monoidal category
MR(2010) Subject Classification 18D10, 16T05
Chinese Library Classification O154.1

收稿日期: 2019-01-21; 接受日期: 2019-05-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761017, 11801304); 中国博士后基金资助项目 (2018M630768)
通讯作者: 张晓辉

1 引言

单子 (monad) 和余单子 (comonad) 的概念源于同调代数中对标准预解式的研究. 1956 年, MacLane 描述了和伴随对有着密切联系的 (余) 单子 [11]. 1969 年, Beck 提出了 (余) 单子分配率与混合分配率的概念 [1], 刻画了函子的提升理论; 1972 年, Street 将 (余) 单子的概念推广到了 2- 范畴上 [15], 并得出一些有意义的结果. 随后, 越来越多的学者加入了单子的研究行列, 并取得了大量实质性的研究成果 [2, 3, 14]. 2002 年, Moerdijk 提出了余张量单子的概念 [13], 这个概念将张量结构和单子结构融合在一起, 为研究张量范畴的结构提供了新的思路和方法. 2007 年, Bruguières 和 Virelizier [7], 文 [5] 为了在非辫子张量范畴中发展 Hopf 代数理论, 赋予了余张量单子以对极结构, 从而得到了一类 Hopf 单子, 并研究了其半单性拟三角结构、ribbon 结构和量子偶, 为解决代数学一些问题比如范畴的中心 [6]、Hopf 代数胚乃至 fusion 范畴 [8] 等都提供了新的工具. 关于单子的进一步研究, 可见文献 [10, 16].

本文在上述研究的基础上, 考虑了由两个双单子 F 和 G 在单子分配律下构成的双模范畴, 利用分配律的 R- 矩阵, 给出了其做成辫子范畴的充要条件.

2 预备知识

定义 2.1 [1, 15] 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴, F 为从 $\mathscr{C}$ 到自身的一个函子, 若存在自然变换: $m: FF\to F$ 和 $\eta:\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to F$, 使得下图可换

$$\begin{tikzcd} FFF \arrow[r, "mF"] \arrow[d, "Fm"'] & FF \arrow[d, "m"] \\ FF \arrow[r, "m"] & F, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta F"] \arrow[d, "F\eta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_F"] & FF \arrow[d, "m"] \\ FF \arrow[r, "m"'] & F, \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

则称三元对 (F,m,η) 为范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子.

定义 2.2 [1, 15] 设 (F,m,η) 为范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子. V 为 $\mathscr{C}$ 的一个对象, 若存在 $\mathscr{C}$ 中的一个态射 θ_V, 使得下图可换

$$\begin{tikzcd} FFV \arrow[r, "m_V"] \arrow[d, "F\theta_V"'] & FV \arrow[d, "\theta_V"] \\ FV \arrow[r, "\theta_V"] & V, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\eta_V"'] & V \\ FV, \arrow[ur, "\theta_V"] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

则称 (V,θ_V) 为单子 F 上的模, 简记为 F- 模.

易知对于任意的 $X\in\mathscr{C}$, (FX,m_X) 均为 F- 模. 我们称这种 F- 模为自由 F- 模.

设 V 和 W 都是 F- 模, F- 模同态是指 $\mathscr{C}$ 中的态射 $f:V\to W$, 且满足

$$\theta_W\circ Ff=f\circ\theta_V.$$

此时由 F- 模和 F- 模同态构成的 F- 模范畴记为 $\mathscr{C}_F$.

例 2.3 若 H 为域 k 上的一个代数, 则 H 所对应的张量函子 $H\otimes \_$ 与 $\_\otimes H$ 均是 k- 空间范畴上的单子, 而 $H\otimes\_$- 模则是右 H 模, $\_\otimes H$- 模则是左 H 模.

定义 2.4 [1, 15] 设 $\mathscr{C}$ 为范畴, (F,m,η) 和 (G,μ,e) 为 $\mathscr{C}$ 中两个单子, 若存在自然变换 $\varphi:$

$FG \to GF$, 使得下图可换

$$\begin{tikzcd} FGG \arrow[r, "\varphi G"] \arrow[d, "F\mu"'] & GFG \arrow[r, "G\varphi"] & GGF \arrow[d, "\mu F"] \\ FG \arrow[rr, "\varphi"] & & GF, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} FFG \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "mG"'] & FGF \arrow[r, "\varphi F"] & GFF \arrow[d, "Gm"] \\ FG \arrow[rr, "\varphi"] & & GF, \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "G\eta"'] & FG \arrow[d, "\varphi"] \\ & GF, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "Fe"] \arrow[d, "eF"'] & FG \arrow[dl, "\varphi"] \\ GF, & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

则称 φ 为一个单子分配律, 称 GF 为 F 和 G 的冲积.

引理 2.5 (文 [16, 4.4 节]) φ 是一个单子分配律当且仅当以下两个条件之中任一个成立:

(1) 存在由单子 G 所诱导的提升 $\hat{G}:\mathscr{C}_F \to \mathscr{C}_F$;

(2) φ 可以诱导结合函子 GF 的一个单子结构 $(GF, \mu m \circ G\varphi F, e\eta)$.

例 2.6 若 A, B 均为域 k 上的代数, 则由例 2.3 可知 $F = A \otimes \_$ 与 $G = B \otimes \_$ 均为 k- 空间范畴上的单子, 此时定义 $\varphi : FG \to GF$ 为由换位映射诱导的自然变换, 即满足对任意的 k- 空间 V, $v \in V$, $a \in A$, $b \in B$,

$$\varphi_V(a \otimes b \otimes v) := b \otimes a \otimes v.$$

易知 φ 为单子分配律, 且此时冲积即为张量积代数的张量函子 $A \otimes B \otimes \_$.

定义 2.7 (文 [4, 2.12 节]) 设 $\mathscr{C}$ 为任一范畴, (F, m, η) 和 (G, μ, e) 为 $\mathscr{C}$ 中的两个单子, $\varphi : FG \to GF$ 是一个单子分配律, $V \in \mathscr{C}$, 若 (V, θ_V) 为 F- 模, (V, ρ_V) 为 G- 模, 且有如下图形可换

$$\begin{tikzcd} FGV \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "F(\rho_V)"'] & GFV \arrow[r, "G(\theta_V)"] & GV \arrow[d, "\rho_V"] \\ FV \arrow[rr, "\theta_V"] & & V, \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

则称 (V, θ_V, ρ_V) 为 (F, G)- 双模. 由 (F, G)- 双模和同时为 F- 模同态, G- 模同态的态射所构成的 (F, G)- 双模范畴记为 $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$.

注 2.8 由文 [4, 2.12 节] 可知, (F, G)- 双模与单子 GF 上的模是等价的.

设 $(\mathscr{C}, \otimes, I, a, l, r)$ 为张量范畴, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 被称为一个余张量函子, 若存在自然变换

$$F_2 : F\otimes \to F \otimes F \quad 和态射 \quad F_0 : F(I) \to I,$$

使得对于任意的 $X, Y, Z \in \mathscr{C}$, 有下列等式成立:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes F_2(Y, Z)) \circ F_2(X, Y \otimes Z) \circ F(a_{X,Y,Z}) \\ &\quad = a_{FX,FY,FZ} \circ (F_2(X, Y) \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}) \circ F_2(X \otimes Y, Z), \\ &r_{FX} \circ (\mathrm{id}_{F(X)} \otimes F_0) \circ F_2(X, I) \circ F(r_X^{-1}) \\ &\quad = \mathrm{id}_{F(X)} = l_{FX}(F_0 \otimes \mathrm{id}_{F(X)})F_2(I, X) \circ F(l_X^{-1}). \end{aligned}$$

定义 2.9[7, 13] 设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 为 $\mathscr{C}$ 中的单子. 若 F 同时为一个余张量函子, 则由文 [13] (或 [7]) 可知, F 被称为 $\mathscr{C}$ 中的一个双单子, 若下列条件成立:

$$\begin{tikzcd} FF(X\otimes Y) \arrow[r, "m_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "F(F_2(X,Y))"'] & F(X\otimes Y) \arrow[r, "F_2(X,Y)"] & FX\otimes FY \\ F(F(X)\otimes F(Y)) \arrow[rr, "F_2(FX,FY)"] & & FFX\otimes FFY, \arrow[u, "m_X\otimes m_Y"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta_I"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_I"'] & FI \arrow[d, "F_0"] \\ & I, \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

$$\begin{tikzcd} X\otimes Y \arrow[r, "\eta_{X\otimes Y}"] \arrow[dr, "\eta_X\otimes\eta_Y"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F_2(X,Y)"] \\ & FX\otimes FY, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FF(I) \arrow[r, "FF_0"] \arrow[d, "m_I"'] & F(I) \arrow[d, "F_0"] \\ FI \arrow[r, "F_0"] & I. \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

注 2.10 由双单子的定义易知 $(I,F_0)\in\mathscr{C}_F$, 且此时 $(\mathscr{C}_F,\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴. 对于任意的 $(V,\theta_V),(W,\theta_W)\in\mathscr{C}_F$, 其张量积的模结构如下:

$$\theta_{V\otimes W}:\ F(V\otimes W)\xrightarrow{F_2(V,W)}FV\otimes FW\xrightarrow{\theta_V\otimes\theta_W}V\otimes W.$$

例 2.11 若 H 为域 k 上的一个双代数, 则 H 所对应的张量函子 $H\otimes\_$ 与 $\_\otimes H$ 均是 k- 空间范畴上的双单子.

定义 2.12 (文 [7, 8.2 节]) 设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 为 $\mathscr{C}$ 中的双单子, 若存在卷积可逆的自然变换:

$$\sigma:\otimes\Rightarrow\otimes^{\mathrm{op}}\circ(F\times F):\mathscr{C}^{\times 2}\to\mathscr{C},$$

满足以下条件成立:

(1) $(m_Y\otimes m_X)\circ\sigma_{FX,FY}\circ F_2(X,Y)=(m_Y\otimes m_X)\circ F_2(FY,FX)\circ F\sigma_{X,Y}$;

(2) $(m_Y^2\otimes m_Z^2\otimes m_X^2)\circ(F_2(FY,FZ)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{FX,FY\otimes FZ}$
$\quad=(m_Y\otimes m_Z\otimes m_X^2)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{FFX,FZ})\circ(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id})$;

(3) $(m_Z^2\otimes m_X^2\otimes m_Y^2)\circ(\mathrm{id}\otimes F_2(FX,FY))\circ\sigma_{FX\otimes FY,FZ}$
$\quad=(m_Z^2\otimes m_X\otimes m_Y)\circ(\sigma_{FX,FFZ}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{Y,Z})$,

则称 σ 为单子 F 上的一个拟三角结构, 称 (F,σ) 为 $\mathscr{C}$ 中的一个拟三角双单子.

定义 2.13 设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 和 (G,μ,e) 为 $\mathscr{C}$ 中的两个双单子, $\varphi:FG\to GF$ 为单子分配律. 若对于任意的 $X,Y\in\mathscr{C}$, φ 总满足如下条件:

(1) $(\varphi_X\otimes\varphi_Y)\circ F_2(GX,GY)\circ F(G_2(X,Y))=G_2(FX,FY)\circ G(F_2(X,Y))\circ\varphi_{X\otimes Y}$;

(2) $G_0\circ G(F_0)\circ\varphi_I=F_0\circ F(G_0)$,

则称 φ 是一个双单子分配律.

引理 2.14 (文 [10, 定理 3]) φ 为双单子分配律当且仅当以下条件中任一个成立:

(1) 冲积 GF 在复合余张量结构和 φ 诱导的单子结构下, 可以做成一个双单子;

(2) $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)=\mathscr{C}_{GF}$, 且是一个张量范畴.

3 单子分配律的卷积

以下总是约定 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 和 (G,μ,e) 为 $\mathscr{C}$ 中的两个双单子, $\varphi:FG\to GF$ 是一个双单子分配律. 易知此时 GF 为 F 和 G 的冲积.

首先定义如下从 $\mathscr{C}$ 的卡氏积范畴到 $\mathscr{C}$ 的函子:

$$\begin{aligned}
&\otimes^{\mathrm{op}}:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad (X,Y)\mapsto Y\otimes X,\\
&GF\otimes GF:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad (X,Y)\mapsto GFX\otimes GFY,\\
&GF\otimes:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad (X,Y)\mapsto GF(X\otimes Y),\\
&GF\otimes^{\mathrm{op}}GF:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad (X,Y)\mapsto GFY\otimes GFX.
\end{aligned}$$

我们用 Nat 表示函子间的自然变换集, 则有如下命题.

命题 3.1 $\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}})\cong \mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF)$.

证明 一方面, 我们构造映射

$$P:\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}})\to \mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF),$$

满足对任意的 $f\in \mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}})$ 和 $X,Y\in\mathscr{C}$, $P(f)$ 定义如下

$$P(f)_{X,Y}:\ X\otimes Y\xrightarrow{e\eta_X\otimes e\eta_Y}GFX\otimes GFY\xrightarrow{f_{GFX,GFY}}GFY\otimes GFX\ ;$$

另一方面, 定义映射

$$Q:\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF)\to \mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}}),$$

其中对任意的 $\sigma\in \mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF)$ 和 $V,W\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$, $Q(\sigma)$ 定义为

$$Q(\sigma)_{V,W}:\ V\otimes W\xrightarrow{\sigma_{V,W}}GFW\otimes GFV\xrightarrow{G\theta_W\otimes G\theta_V}GW\otimes GV\xrightarrow{\rho_W\otimes\rho_V}W\otimes V.$$

下证 P 和 Q 互逆.

事实上, 由下图可换

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "e\eta_X\otimes e\eta_Y"] \arrow[dr, "\sigma_{X,Y}"] \arrow[dd, "\sigma_{X,Y}"'] & GFX\otimes GY \arrow[r, "\sigma_{GFX,GFY}"] & GFGFY\otimes GFGFX \arrow[dd, "G\varphi F_X\otimes G\varphi F_Y"] \\
& GFY\otimes GFX \arrow[ur, "GFe\eta_Y\otimes GFe\eta_X"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & \\
GFY\otimes GFX & & GGFFY\otimes GGFFX, \arrow[ll, "\mu m_Y\otimes\mu m_X"]
\end{tikzcd}$$

即知

$$P(Q(\sigma))=\sigma.$$

同理, 由下图可换

$$\begin{tikzcd}
V\otimes W \arrow[r, "e\eta_V\otimes e\eta_W"] \arrow[d, "f_{V,W}"'] & GFV\otimes GFW \arrow[r, "f_{GFV,GFW}"] & GFW\otimes GFV \arrow[d, "G\theta_W\otimes G\theta_V"] \\
W\otimes V \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[urr, "e\eta_W\otimes e\eta_V"] & W\otimes V & W\otimes V, \arrow[l, "\rho_W\otimes\rho_V"']
\end{tikzcd}$$

即知

$$Q(P(f))=f.$$

于是 P 和 Q 互逆. 证毕.

命题 3.2 $\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes^{\mathrm{op}},\otimes)\cong\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)$.

证明 类似于命题 3.1, 做映射

$$P':\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes^{\mathrm{op}},\otimes)\to\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF),$$

满足对任意的 $f'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes^{\mathrm{op}},\otimes)$ 和 $X,Y\in\mathscr{C}$, $P'(f')$ 定义如下

$$P'(f')_{X,Y}:\ Y\otimes X\xrightarrow{e\eta_Y\otimes e\eta_X}GFY\otimes GFX\xrightarrow{f'_{GFX,GFY}}GFX\otimes GFY\ ,$$

易知其逆映射为

$$Q':\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)\to\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes^{\mathrm{op}},\otimes),$$

其中对任一 $\sigma'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)$ 和 $V,W\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$, $Q'(\sigma')$ 定义为

$$Q'(\sigma')_{V,W}:\ W\otimes V\xrightarrow{\sigma'_{V,W}}GFV\otimes GFW\xrightarrow{G\theta_V\otimes G\theta_W}GV\otimes GW\xrightarrow{\rho_V\otimes\rho_W}V\otimes W.$$

证毕.

定义 3.3 对任意的 $\sigma\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes,GF\otimes^{\mathrm{op}}GF)$ 和 $\sigma'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)$, 定义 σ' 和 σ 的卷积如下:

$$\begin{tikzcd}
(\sigma'*\sigma)_{X,Y}:\ X\otimes Y \arrow[r, "\sigma_{X,Y}"] & GFY\otimes GFX \arrow[r, "\sigma'_{GFX,GFY}"] & GFGFX\otimes GFFGFY \arrow[d, "G\varphi F_X\otimes G\varphi F_Y"] \\
& GFX\otimes GFY & GGFFX\otimes GGFFY, \arrow[l, "\mu m_X\otimes\mu m_Y"]
\end{tikzcd}$$

定义 σ 和 σ' 的卷积如下:

$$\begin{tikzcd}
(\sigma*\sigma')_{X,Y}:\ Y\otimes X \arrow[r, "\sigma'_{X,Y}"] & GFX\otimes GFY \arrow[r, "\sigma_{GFX,GFY}"] & GFGFY\otimes GFFGFX \arrow[d, "G\varphi F_Y\otimes G\varphi F_X"] \\
& GFY\otimes GFX & GGFFY\otimes GGFFX, \arrow[l, "\mu m_Y\otimes\mu m_X"]
\end{tikzcd}$$

其中 $\sigma\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes,GF\otimes^{\mathrm{op}}GF)$ 被称为卷积可逆的, 若存在 $\sigma'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)$, 使得 $\sigma'*\sigma=\mu m\otimes\mu m$, 且 $\sigma*\sigma'=\mu m\otimes^{\mathrm{op}}\mu m$. 此时我们称 σ' 为 σ 的卷积逆.

注 3.4 文中设 $\tau\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}})$, 并将 τ 在映射 P 下的像元记为 σ.

此时, 我们有如下的引理.

引理 3.5 τ 为 $\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes,\otimes^{\mathrm{op}})$ 中的可逆元当且仅当 σ 是卷积可逆的.

证明 $\Rightarrow$ 若 τ 是可逆的, 其逆元设为 $\tau'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)}(\otimes^{\mathrm{op}},\otimes)$, 则由命题 3.2 可知必存在 $\sigma'\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes^{\mathrm{op}},GF\otimes GF)$, 使得 $\sigma'=P'(\tau')$. 此时用下图计算 $\sigma'*\sigma$:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "e\eta_X\otimes e\eta_Y"] \arrow[dd, "e\eta_X\otimes e\eta_Y"'] \arrow[ddr, "ee\eta\eta_X\otimes ee\eta\eta_Y"'] & GFX\otimes GFY \arrow[r, "\tau_{GFY,GFX}"] \arrow[d, "e\eta GF_X\otimes e\eta GF_Y"] & GFY\otimes GFX \arrow[d, "e\eta GF_Y\otimes e\eta GF_X"] \\
& GFGFX\otimes GFGFY \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "G\varphi F_X\otimes G\varphi F_Y"] & GFGFY\otimes GFGFX \arrow[d, "\tau'_{GFGFY,GFGFX}"] \\
GFX\otimes GFY & GGFFX\otimes GGFFY \arrow[l, "\mu m_X\otimes\mu m_Y"] & GFGFX\otimes GFGFY, \arrow[l, "G\varphi F_X\otimes G\varphi F_Y"]
\end{tikzcd}$$

其中 $X,Y\in\mathscr{C}$. 可知 $\sigma'*\sigma=\mu m\otimes\mu m$. 同理可证

$$\sigma*\sigma'=\mu m\otimes^{\mathrm{op}}\mu m,$$

即 σ' 为 σ 的卷积逆.

$\Leftarrow$ 反之, 设 σ 是卷积可逆的, σ' 为其卷积逆. 由命题 3.1 和 3.2, 取 $\tau=Q(\sigma)$, $\tau'=Q'(\sigma')$, 此时对任意的 $V,W\in\mathscr{C}_{(F,G)}$, 由

$$\begin{aligned}
&{\tau'}_{V,W}\circ\tau_{V,W}\\
&\quad=Q'(\sigma')_{V,W}\circ Q(\sigma)_{V,W}\\
&\quad=(\rho_V\otimes\rho_W)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W)\circ\sigma'_{V,W}\circ(\rho_W\otimes\rho_V)\circ(G\theta_W\otimes G\theta_V)\circ\sigma_{V,W}\\
&\quad=(\rho_V\otimes\rho_W)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W)\circ(GF(\rho_V\circ G\theta_V)\otimes GF(\rho_W\circ G\theta_W))\circ\sigma'_{GFV,GFW}\circ\sigma_{V,W}\\
&\quad=(\rho_V\otimes\rho_W)\circ(\mu_V\otimes\mu_W)\circ(GG\theta_V\otimes GG\theta_W)\circ(GGm_V\otimes GGm_W)\circ(G\varphi F_V\otimes G\varphi F_W)\\
&\qquad\circ\sigma'_{GFV,GFW}\circ\sigma_{V,W}\\
&\quad=(\rho_V\otimes\rho_W)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W)\circ(\mu m_V\otimes\mu m_W)\circ(G\varphi F_V\otimes G\varphi F_W)\circ\sigma'_{GFV,GFW}\circ\sigma_{V,W}\\
&\quad=(\rho_V\otimes\rho_W)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W)\circ(e\eta_V\otimes e\eta_W)=\mathrm{id}_{V\otimes W}
\end{aligned}$$

可知 $\tau'\circ\tau=\mathrm{id}$. 同理可证

$$\tau\circ\tau'=\mathrm{id}.$$

于是 τ 为可逆元. 证毕.

4 (F,G)- 双模范畴中的辫子结构

张量范畴 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 中的一个辫子结构是指一个自然同构

$$T:\otimes\Rightarrow\otimes^{\mathrm{op}}:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C},$$

满足对任意的 $X,Y,Z\in\mathscr{C}$, 以下图形均可换:

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "T_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_Z"'] & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "T_{X,Y\otimes Z}"] & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"] \\
(Y\otimes X)\otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"] & Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_Y\otimes T_{X,Z}"] & Y\otimes(Z\otimes X),
\end{tikzcd}\tag{B1}$$

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X\otimes T_{Y,Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "T_{X\otimes Y,Z}"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] \\
X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[r, "T_{X,Z}\otimes\mathrm{id}_Y"] & (Z\otimes X)\otimes Y.
\end{tikzcd}\tag{B2}$$

引理 4.1 对任一对象 $X\in\mathscr{C}$, 我们有 $GFX\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$.

证明 我们定义 GFX 的 F- 模作用和 G- 模作用分别如下:

$$\rho_{GFX}:\ GGFX\xrightarrow{\mu_{FX}}GFX\ ;$$

$$\theta_{GFX}:\ FGFX\xrightarrow{\varphi_{FX}}GFFX\xrightarrow{Gm_X}GFX,$$

则易证

$$(GFX, \theta_{GFX}) \in \mathscr{C}_F.$$

同时

$$(GFX, \rho_{GFX}) \in \mathscr{C}_G.$$

进而由如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
FGGFX \arrow[r, "\varphi_{GFX}"] \arrow[d, "F\mu_{FX}"'] & GFGFX \arrow[r, "G\varphi_{FX}"] & GGFFX \arrow[r, "GGm_X"] \arrow[d, "\mu_{FFX}"'] & GGFX \arrow[d, "\mu_{FX}"] \\
FGFX \arrow[rr, "\varphi_{FX}"'] & & GFFX \arrow[r, "Gm_X"'] & GFX
\end{tikzcd}$$

可知

$$(GFX, \theta_{GFX}, \rho_{GFX}) \in \mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi).$$

证毕.

注 4.2 对任一态射 $f \in \mathrm{Mor}\mathscr{C}$, 可知 $GF(f)$ 同时为 F- 模同态和 G- 模同态, 进而我们得到一个自由函子

$$GF : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi).$$

命题 4.3 τ 是 F- 模同态当且仅当对任意的 $X, Y \in \mathscr{C}$, σ 满足如下交换图

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "F\sigma_{X,Y}"] \arrow[d, "F_2"'] & F(GFY \otimes GFX) \arrow[r, "F_2"] & FGFY \otimes FGFX \arrow[d, "\varphi F_Y \otimes \varphi F_X"] & \\
FX \otimes FY \arrow[rr, "\sigma_{FX,FY}"'] & & GFFY \otimes GFFX \arrow[r, "Gm_Y \otimes Gm_X"'] & GFY \otimes GFX.
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

证明 $\Rightarrow$ 由引理 4.1 及 $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$ 为张量范畴知

$$GFX \otimes GFY \in \mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi).$$

进而可得

$$\begin{tikzcd}
F(GFX \otimes GFY) \arrow[r, "F\tau"] \arrow[d, "\theta_{GFX,GFY}"'] & F(GFY \otimes GFX) \arrow[d, "\theta_{GFY,GFX}"] \\
GFX \otimes GFY \arrow[r, "\tau"] & GFY \otimes GFX
\end{tikzcd}$$

为可换图. 此时, 一方面有

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "F(e\eta_X \otimes e\eta_Y)"] \arrow[dr, "F\sigma"] & F(GFX \otimes GFY) \arrow[r, "F\sigma"] & F(GFGFY \otimes GFGFX) \arrow[d, "F(G\varphi F_Y \otimes G\varphi F_X)"] \\
GFY \otimes GFX & F(GFY \otimes GFX) \arrow[ur, "F(GFe\eta_Y \otimes GFe\eta_X)"] \arrow[r, "F(GeF\eta_Y \otimes GeF\eta_X)"'] \arrow[d, "F_2"] & F(GGFFY \otimes GGFFX) \arrow[d, "F(\mu m_Y \otimes \mu m_X)"] \\
GFFY \otimes GFFX \arrow[u, "Gm_Y \otimes Gm_X"] & FGFY \otimes FGFX \arrow[l, "\varphi F_Y \otimes \varphi F_X"'] & F(GFY \otimes GFX); \arrow[l, "F_2"']
\end{tikzcd}$$

另一方面, 还有

$$
\begin{tikzcd}
F(X\otimes Y) \arrow[r, "F(e\eta_X\otimes e\eta_Y)"] \arrow[d, "F_2"'] & F(GFX\otimes GFY) \arrow[r, "F_2"] & FGFX\otimes FGFY \arrow[r, "\varphi_{FX}\otimes\varphi_{FY}"] & GFFX\otimes GFFY \arrow[d, "Gm_X\otimes Gm_Y"] \\
FX\otimes FY \arrow[urr, "Fe\eta_X\otimes Fe\eta_Y"] \arrow[rrr, "eF_X\otimes eF_Y"] \arrow[d, "\sigma"] & & & GFX\otimes GFY \arrow[d, "\sigma"] \\
GFFY\otimes GFFX \arrow[r, "Gm_Y\otimes Gm_X"'] \arrow[rrr, bend left, "GFeF_Y\otimes GFeF_X"] & GFY\otimes GFX & GGFFY\otimes GGFFX \arrow[l, "\mu m_Y\otimes\mu m_X"'] & GFGFY\otimes GFGFX. \arrow[l, "G\varphi F_Y\otimes G\varphi F_X"']
\end{tikzcd}
$$

由以上两交换图形可知, 条件 (4.1) 成立.

$\Leftarrow$ 反之, 若图形 (4.1) 可换, 则对 $V,W\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$, 我们有如下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
F(V\otimes W) \arrow[r, "F\sigma"] \arrow[d, "F_2"'] & F(GFW\otimes GFV) \arrow[rr, "F(G\theta_W\otimes G\theta_V)"] \arrow[d, "F_2"'] & & F(GW\otimes GV) \arrow[dl, "F_2"] \arrow[d, "F(\rho_W\otimes\rho_V)"] \\
FV\otimes FW \arrow[d, "\theta_V\otimes\theta_W"'] \arrow[dr, "\sigma"] & FGFW\otimes FGFV \arrow[r, "FG\theta_W\otimes FG\theta_V"] \arrow[d, "\varphi F_W\otimes\varphi F_V"] & FGW\otimes FGV \arrow[dr, "F\rho_W\otimes F\rho_V"] \arrow[ddll, bend left, "\varphi_W\otimes\varphi_V"] & F(W\otimes V) \arrow[d, "F_2"] \\
V\otimes W \arrow[d, "\sigma"'] & GFFW\otimes GFFV \arrow[dl, "Gm_W\otimes Gm_V"] & & FW\otimes FV \arrow[d, "\theta_W\otimes\theta_V"] \\
GFW\otimes GFV \arrow[rr, "G\theta_W\otimes G\theta_V"'] & & GW\otimes GV \arrow[r, "\rho_W\otimes\rho_V"'] & W\otimes V,
\end{tikzcd}
$$

即可知命题得证.

命题 4.4 τ 是 G- 模同态当且仅当对任意的 $X,Y\in\mathscr{C}$, σ 满足如下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
G(X\otimes Y) \arrow[rr, "G\sigma_{X,Y}"] \arrow[d, "F_2"'] & & G(GFY\otimes GFX) \arrow[d, "F_2"] & \\
GX\otimes GY \arrow[r, "\sigma"'] & GFGY\otimes GFGX \arrow[r, "G\varphi_Y\otimes G\varphi_X"'] & GGFY\otimes GGFX \arrow[r, "\mu F_Y\otimes\mu F_X"'] & GFY\otimes GFX.
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

证明 类似于命题 4.3 可证, 不再赘述. 证毕.

命题 4.5 τ 满足可换图 (B1) 当且仅当对任意的 $X,Y,Z\in\mathscr{C}$, σ 满足如下可换图:

$$
\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\sigma\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "a"] & (GFY\otimes GFX)\otimes Z \arrow[r, "a"] & GFY\otimes(GFX\otimes Z) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\sigma"] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "\sigma"] & & GFY\otimes(GFZ\otimes GFGFX) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes G\varphi F_X"] \\
GF(Y\otimes Z)\otimes GFX \arrow[d, "GF_2\otimes\mathrm{id}"] & & GFY\otimes(GFZ\otimes GGFFX) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mu m_X"] \\
G(FY\otimes FZ)\otimes GFX \arrow[r, "G_2\otimes\mathrm{id}"] & (GFY\otimes GFZ)\otimes GFX \arrow[r, "a"] & GFY\otimes(GFZ\otimes GFX).
\end{tikzcd}
\tag{4.3}
$$

证明 $\Rightarrow$ 易知 $(GFX\otimes GFY)\otimes GFZ\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$. 进而, 一方面有

$$\begin{aligned}
&a_{GFY,GFZ,GFX}\circ(\mu m_Y\otimes\mu m_Z\otimes\mu m_X)\circ(G\varphi F_Y\otimes G\varphi F_Z\otimes G\varphi F_X)\\
&\quad\circ(G_2(FGFY,FGFZ)\otimes\mathrm{id})\circ(GF_2(GFY,GFZ)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{GFX,GFY\otimes GFZ}\\
&\quad\circ a_{GFZ,GFY,GFZ}\circ(e\eta_X\otimes e\eta_Y\otimes e\eta_Z)\\
&=a_{GFY,GFZ,GFX}\circ(\mu m_Y\otimes\mu m_Z\otimes\mu m_X)\circ(G\varphi F_Y\otimes G\varphi F_Z\otimes G\varphi F_X)\\
&\quad\circ(GFe\eta_Y\otimes GFe\eta_Z\otimes GFe\eta_X)\circ(G_2(FY,FZ)\otimes\mathrm{id})\circ(GF_2(Y,Z)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{X,Y\otimes Z}\\
&\quad\circ a_{X,Y,Z}\\
&=a_{GFY,GFZ,GFX}\circ(G_2(FY,FZ)\otimes\mathrm{id})\circ(GF_2(Y,Z)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{X,Y\otimes Z}\circ a_{X,Y,Z};
\end{aligned}$$

另一方面, 亦有

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes\mu m_Z\otimes\mu m_X)\circ(\mathrm{id}\otimes G\varphi F_Z\otimes G\varphi F_X)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFX,GFZ})\circ a_{GFY,GFX,GFZ}\\
&\quad\circ(\mu m_Y\otimes\mu m_X\otimes\mathrm{id})\circ(G\varphi F_Y\otimes G\varphi F_X\otimes\mathrm{id})\circ(\sigma_{GFX,GFY}\otimes\mathrm{id})\circ(e\eta_X\otimes e\eta_Y\otimes e\eta_Z)\\
&=(\mathrm{id}\otimes\mu m_Z\otimes\mu m_X)\circ(\mathrm{id}\otimes G\varphi F_Z\otimes G\varphi F_X)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFX,GFZ})\circ a_{GFY,GFX,GFZ}\\
&\quad\circ(\mu m_Y\otimes\mu m_X\otimes\mathrm{id})\circ(GeF\eta_Y\otimes GeF\eta_X\otimes e\eta_Z)\circ(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\mu m_Z\otimes\mu m_X)\circ(\mathrm{id}\otimes G\varphi F_Z\otimes G\varphi F_X)\circ(\mathrm{id}\otimes GFe\eta_Z\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFX,Z})\\
&\quad\circ a_{GFY,GFX,Z}\circ(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mu m_X)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes G\varphi F_X)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFX,Z})\circ a_{GFY,GFX,Z}\circ(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id}),
\end{aligned}$$

于是, 由 $\tau_{GFX,\,GFY,\,GFZ}$ 满足图形 (B1), 即可得图 (4.3) 成立.

$\Leftarrow$ 反之, 若图形 (4.3) 可换, 则对任意的 $U,V,W\in\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$, 可知有

$$\begin{aligned}
&a_{V,W,U}\circ\tau_{U,V\otimes W}\circ a_{U,V,W}\\
&=a_{V,W,U}\circ(\rho_V\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W\otimes G\theta_U)\circ(G_2(FV,FW)\otimes\mathrm{id})\\
&\quad\circ(GF_2(V,W)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{V\otimes W,U}\circ a_{U,V,W}\\
&=(\rho_V\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W\otimes G\theta_U)\circ a_{GFV,GFW,GFU}\circ(G_2(FV,FW)\otimes\mathrm{id})\\
&\quad\circ(GF_2(V,W)\otimes\mathrm{id})\circ\sigma_{V\otimes W,U}\circ a_{U,V,W}\\
&=(\rho_V\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(G\theta_V\otimes G\theta_W\otimes G\theta_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mu m_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes G\varphi F_U)\\
&\quad\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFU,W})\circ a_{GFV,GFU,W}\circ(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes G\theta_U)\circ(\mathrm{id}\otimes G\theta_W\otimes\mu F_U)\circ(\rho_V\otimes\mathrm{id}\otimes G\varphi_U)\\
&\quad\circ(G\theta_V\otimes\mathrm{id}\otimes GFG\theta_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{GFU,W})\circ a_{GFV,GFU,W}\circ(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(\mathrm{id}\otimes G\theta_W\otimes G\theta_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{U,W})\circ(\rho_V\otimes\rho_U\otimes\mathrm{id})\\
&\quad\circ(G\theta_V\otimes G\theta_U\otimes\mathrm{id})\circ a_{GFV,GFU,W}\circ(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\rho_W\otimes\rho_U)\circ(\mathrm{id}\otimes G\theta_W\otimes G\theta_U)\circ(\mathrm{id}\otimes\sigma_{U,W})\circ a_{V,U,W}\circ(\rho_V\otimes\rho_U\otimes\mathrm{id})\\
&\quad\circ(G\theta_V\otimes G\theta_U\otimes\mathrm{id})\circ(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id})\\
&=(\mathrm{id}\otimes\tau_{U,W})\circ a_{V,U,W}\circ(\tau_{U,V}\otimes\mathrm{id}),
\end{aligned}$$

这就证明了图 (B1) 可换. 证毕.

命题 4.6　τ 满足可换图 (B2) 当且仅当对任意的 $X,Y,Z\in\mathscr{C}$, σ 满足如下可换图:

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\sigma"] \arrow[d, "a^{-1}"'] & X\otimes(GFZ\otimes GFY) \arrow[r, "a^{-1}"] & (X\otimes GFZ)\otimes GFY \arrow[d, "\sigma\otimes\mathrm{id}"] \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\sigma"'] & & (GFGFZ\otimes GFX)\otimes GFY \arrow[d, "G\varphi F_Z\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \\
GFZ\otimes GF(X\otimes Y) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes GF_2"'] & & (GGFFZ\otimes GFX)\otimes GFY \arrow[d, "\mu m_Z\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \\
GFZ\otimes G(FX\otimes FY) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes G_2"] & GFZ\otimes(GFX\otimes GFY) \arrow[r, "a^{-1}"] & (GFZ\otimes GFX)\otimes GFY.
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

证明　类似于命题 4.5 可证, 不再赘述. 证毕.

定义 4.7　设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 和 (G,μ,e) 为 $\mathscr{C}$ 中的两个双单子, $\varphi: FG\to GF$ 是一个双单子分配律. 若存在卷积可逆的自然变换

$$\sigma\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF),$$

满足对任意的 $X,Y,Z\in\mathscr{C}$, 图形 (4.1)–(4.4) 均可换, 则称 σ 为双单子分配律 φ 上的 R- 矩阵, 称 (F,G,φ,σ) 为 $\mathscr{C}$ 上的一个分配律辫子数据.

此时, 我们可得如下主要定理.

定理 4.8　设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 和 (G,μ,e) 为 $\mathscr{C}$ 中的两个双单子, $\varphi: FG\to GF$ 是一个双单子分配律. 则 $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$ 为辫子张量范畴当且仅当存在自然变换

$$\sigma\in\mathrm{Nat}_{\mathscr{C}}(\otimes, GF\otimes^{\mathrm{op}}GF),$$

使得 σ 为 φ 上的 R- 矩阵. 此时, $\mathscr{C}_{(F,G)}(\varphi)$ 中的辫子为 $\tau=Q(\sigma)$.

证明　由引理 3.5, 及命题 4.3–4.6 直接可证.

推论 4.9　设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,G,φ,σ) 为 $\mathscr{C}$ 上的分配律辫子数据, 则 (GF,σ) 为 $\mathscr{C}$ 上的拟三角双单子.

例 4.10　设 $(\mathscr{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 为 $\mathscr{C}$ 上的一个双单子. 若 R 为 F 的泛 R- 矩阵, 使得 F 为一个拟三角双单子, 则此时考虑到 $G=(ID,\mathrm{id},\mathrm{id})$ 亦为 $\mathscr{C}$ 上的双单子, 令

$$\varphi=\mathrm{id}_F: FG\to GF,$$

于是易证 φ 为双单子分配律, 且显然有

$$\sigma=R:\otimes\to GF\otimes^{\mathrm{op}}GF$$

为 φ 上的 R- 矩阵.

例 4.11　设 H 为数域 k 上的有限维 Hopf 代数, S 为其对极, 易知 $H^{*\mathrm{op}}$ 亦为 Hopf 代数. 首先定义 k- 线性映射 $\psi: H\otimes H^{*\mathrm{op}}\to H^{*\mathrm{op}}\otimes H$ 如下: 对任意的 $a\in H$, $q\in H^{*\mathrm{op}}$,

$$\psi(a\otimes q)=\sum q(S(a_1)?a_3)\otimes a_2.$$

进一步地, 令

$$F=\_\otimes H^{*\mathrm{op}},\quad G=\_\otimes H,\quad \varphi=\_\otimes\psi: FG\to GF,$$

则由例 2.11 知 F, G 均为双单子, 且易求得 φ 为双单子分配律. 此时, 若定义如下自然变换:

$$\begin{aligned}\sigma_{X,Y}: X \otimes Y &\to GFY \otimes GFX, \\ x \otimes y &\mapsto \sum y \otimes \varepsilon \otimes e_i \otimes x \otimes e^i \otimes 1_H,\end{aligned}$$

其中 e^i 与 e_i 为 H^* 与 H 上的一对对偶基, 则易求得 σ 为 φ 上的 R- 矩阵, 从而 (F, G, φ, σ) 为 k 空间范畴上的一个分配律辫子数据.

注 4.12 由引理 2.14 和推论 4.9, 易证得例 4.11 中的 (GF, σ) 为拟三角双单子. 事实上, 上述双单子 GF 实质是由 H 的量子偶 $D(H) = H^{*\mathrm{op}} \otimes H$ 所诱导的, 即

$$GF = \_ \otimes D(H).$$

此时, 由 $D(H)$ 为拟三角 Hopf 代数, 亦可证得 (GF, σ) 为拟三角双单子.

致谢 本文作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Beck J., Distributive Laws, Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, Springer, Berlin, 1969: 119–140.
[2] Benton N., Walder P., Linear Logic, Monads and Lambda Calculus, In: Proceedings of the 11th IEEE Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Computer Society Press, 1996.
[3] Blackwell R., Kelly M., Power J., Two-dimensional monad theory, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1989, **59**(1): 1–41.
[4] Böhm G, Brzeziński T., Wisbauer R., Monads and comands on module categories, *Journal of Algebra*, 2009, **322**: 1719–1747.
[5] Bruguières A., Lack S., Virelizier A., Hopf monads on monoidal categories, *Advances in Mathematics*, 2011, **227**(2): 745–800.
[6] Bruguières A., Virelizier A., Categorical centers and Reshetikhin–Turaev invariants, *Acta Mathematica Vietnamica*, 2008, **33**(3): 255–277.
[7] Bruguières A., Virelizier A., Hopf monads, *Advances in Mathematics*, 2007, **215**(2): 679–733.
[8] Bruguières A., Virelizier A., On the center of fusion categories, *Pacific Journal of Mathematics*, 2013, **264**(1): 1–30.
[9] Bruguières A., Virelizier A., Quantum double of Hopf monads and categorical centers, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2012, **364**(3): 1225–1279.
[10] Guo S. J., Zhang X. H., Guo S. J., et al., Smash product of bimonads (in Chinese), *J. Jilin Univ. Sci.*, 2015, **53**(5): 1–7.
[11] Mac Lane S., Homologie des Anneaux et des Modules, Colloque de Topologie Algebrique, Louvain, 1956.
[12] Mesablishvili B., Wisbauer R., The Fundamental Theorem for weak braided bimonads, *Journal of Algebra*, 2017, **490**: 55–103.
[13] Moerdijk I., Monads on tensor categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2002, **168**(2–3): 189–208.
[14] Sabry A., Wadler P., A reflection on call-by-value, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 1997, **19**(6): 916–941.
[15] Street R., The formal theory of monads, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1972, **2**(2): 149–168.
[16] Wisbauer R., Algebras versus coalgebras, *Applied Categorical Structures*, 2008, **16**(1–2): 255–295.