第62卷第6期 数学学报中文版 Vol.62, No.6
2019年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)06-0833-20 **文献标识码:** A

线性矩阵方程组 $AX = B, YA = D$ 的最小二乘 (R, S_σ)-交换解

文娅琼

桂林电子科技大学数学与计算科学学院 桂林 541004

李姣芬

桂林电子科技大学数学与计算科学学院
广西高校数据分析与计算重点实验室 桂林 541004
E-mail: lixiaogui1290@163.com

黎 稳

华南师范大学数学科学学院 广州 510631
E-mail: liwen@scnu.edu.cn

摘 要 Trench 在 [Characterization and properties of (R, S_σ)-commutative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2012, **436**: 4261–4278] 中给出了 (R, S_σ)- 交换矩阵的定义. 本文在此基础上讨论 (R, S_σ)- 交换矩阵的一般性结构, 对给定的矩阵 X, Y, B, D, 以及线性方程组 $AX = B$, $YA = D$ 在 (R, S_σ)- 交换矩阵集合中的最小二乘问题及最佳逼近问题. 细致分析最小二乘 (R, S_σ)- 交换解和最佳逼近解的具体解析表达式. 同时在方程组相容情况下分析 (R, S_σ)- 交换解存在的充要条件及其具体解析表达式.

关键词 (R, S_σ)- 交换矩阵; 最小二乘解; 最佳逼近解
MR(2010) 主题分类 15A24, 15A29, 15A57
中图分类 O177.2

The Least-square Solutions to the Linear Matrix Equations $AX = B$, $YA = D$ with (R, S_σ)-commutative Matrices

Ya Qiong WEN

School of Mathematics and Computational Science,
Guilin University of Electronic Technology,
Guilin 541004, P. R. China

收稿日期: 2018-11-19; 接受日期: 2019-05-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761024, 11561015, 11671158, U1811464);
广西自然科学基金资助项目 (2016GXNSFAA380074, 2016GXNSFFA380009, 2017GXNSFBA198082);
桂林电子科技大学研究生优秀学位论文培育项目 (17YJPYSS24)
通讯作者: 李姣芬

Jiao Fen LI

School of Mathematics and Computational Science, Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, P. R. China
E-mail: lixiaogui1290@163.com

Wen LI

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, China 510631, P. R. China
E-mail: liwen@scnu.edu.cn

Abstract Trench gave the definition of the (R, S_σ)-commutative matrix in [Characterization and properties of (R, S_σ)-commutative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2012, **436**: 4261–4278]. This paper discusses the general structure of (R, S_σ)-commutative matrix, and the least squares problem and the best approximation problem of linear equations $AX = B, YA = D$ in the set of (R, S_σ)-commutative matrices for given matrix X, Y, B, D. Then we analysis the expressions of the least-square commutative solution and the best approximate solution of (R, S_σ)-commutative matrix in detail. At the same time, the necessary and sufficient conditions for the existence of the (R, S_σ)-commutative solution are analyzed when the linear matrix equations is consistent.

Keywords (R, S_σ)-commutative matrices; least squares solution; optimal approximate

MR(2010) Subject Classification 15A24, 15A29, 15A57

Chinese Library Classification O177.2

1 引言

给定可逆阵 $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 定义矩阵

$$R = P\,\mathrm{diag}(\gamma_0 I_{m_0}, \gamma_1 I_{m_1}, \dots, \gamma_{k-1} I_{m_{k-1}})\,P^{-1} \in \mathbb{C}^{m\times m} \tag{1.1}$$

和

$$S_\sigma = Q\,\mathrm{diag}(\gamma_{\sigma(0)} I_{n_0}, \gamma_{\sigma(1)} I_{n_1}, \dots, \gamma_{\sigma(k-1)} I_{n_{k-1}})Q^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{1.2}$$

其中 I_t表示 t 阶单位阵, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ 为 k个互不相同的复数, σ是指标集 $\mathbb{Z}_k := \{0, 1, \dots, k-1\}$ 到 $\mathbb{Z}_k$ 的映射, 即 $\sigma : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k$, 且 $\sum_{\ell=0}^{k-1} m_\ell = m$, $\sum_{\ell=0}^{k-1} n_\ell = n$. 若 σ 为 $\mathbb{Z}_k$ 到 $\mathbb{Z}_k$ 的恒等映射, 则 S_σ 退化为

$$S = Q\,\mathrm{diag}(\gamma_0 I_{n_0}, \gamma_1 I_{n_1}, \dots, \gamma_{k-1} I_{n_{k-1}})Q^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{1.3}$$

若进一步, $R^H = R$ 和 $S^H = S$, 则 (1.1) 和 (1.2) 中的 P 和 Q 均为酉矩阵. 本文用到的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 均指矩阵 Frobenius 范数, 对 $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, M^* 表示 M 的共轭转置. 在文 [7] 中, Trench 给出了如下 (R, S_σ)- 交换矩阵的定义:

定义 1.1[7] 给定矩阵 $R \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $S_\sigma \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 如果 $RA = AS_\sigma$, 则称 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R, S_σ)- 交换矩阵.

由 R, S_σ 的分块结构可知, (R, S_σ)- 交换矩阵具有很强的一般性, 即若 R, S_σ 取不同类型的矩阵时, 由 (R, S_σ)- 交换矩阵可得到一系列特殊矩阵. 如

(1) 取 $m=n$, $R=J_n$, $S_\sigma=S=J_n$ 时, 其中 J_n 是反序单位矩阵, (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 n 阶中心对称矩阵 [1]; 若 $m\neq n$ 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 $m\times n$ 阶长方形中心对称矩阵 [1]; 取 $m=n$, $\sigma:\mathbb{Z}_1\to\mathbb{Z}_1:=\{0,1\}$ 且 $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ 时, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 n 阶中心反对称矩阵 [1].

(2) 取 $R=R^{-1}\neq\pm I_m$, $S_\sigma=S=S^{-1}\neq\pm I_n$, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 $m\times n$ 阶 (R,S)- 对称矩阵 [8]; 若 $\sigma:\mathbb{Z}_1\to\mathbb{Z}_1$ 且 $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ 时, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 $m\times n$ 阶 (R,S)- 反对称矩阵 [8]; 若 $S_\sigma=R=R^{-1}\neq\pm I_m$ 时, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 m 阶 R- 对称矩阵 [8].

(3) 取 $R=S_\sigma=S$ 均为 n 阶广义反射矩阵, 即 $R^H=R$, $R^2=I_n$, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为自反矩阵 [2]. 若 $\sigma:\mathbb{Z}_1\to\mathbb{Z}_1$ 且 $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ 时, (R,S_σ)-交换矩阵退化为反自反矩阵 [2].

(4) 取 $R^{k-1}=R^{-1}\neq\pm I_m$, $S^{k-1}=S^{-1}\neq\pm I_n$, 且 $\sigma(\ell)=\ell+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)\ (0\le\ell\le k-1)$, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 (R,S,μ)- 对称矩阵 [9]; 若 $S_\sigma=R^{-1}=R^{k-1}\neq\pm I_m$ 时, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 (R,μ)- 对称矩阵 [9].

(5) 取 $R^{k-1}=R^{-1}\neq\pm I_m$, $S^{k-1}=S^{-1}\neq\pm I_n$, 且 $\sigma(\ell)=\alpha\ell+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)\ (0\le\ell\le k-1)$, $\alpha,\mu\in\mathbb{Z}_k$, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 (R,S,α,μ)- 对称矩阵 [10]; 若 $S_\sigma=R^{-1}=R^{k-1}\neq\pm I_m$ 时, 则 (R,S_σ)- 交换矩阵退化为 (R,α,μ)- 对称矩阵 [10].

对 (R,S_σ)- 交换矩阵的一般性, 我们将在讨论其分块结构时作进一步说明. 令 φ 表示所有 $m\times n$ 阶 (R,S_σ)- 交换矩阵构成的集合. 正因为 (R,S_σ)- 交换矩阵的一般性, 我们从一般性角度讨论线性方程组 $AX=B$, $YA=D$ 在 φ 中的最小二乘问题及其最佳逼近问题.

问题 1.2 给定矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $Y\in\mathbb{C}^{w\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$, $D\in\mathbb{C}^{w\times n}$, 求 $\rho(X,Y,B,D)$ 使得

$$\rho(X,Y,B,D)=\min_{A\in\varphi}(\|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2),$$

并求使上式成立的解集合, 记为 $\varphi(X,Y,B,D)$, 即求

$$\varphi(X,Y,B,D)=\{A\in\varphi\mid\ \|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2=\rho(X,Y,B,D)\}.$$

问题 1.3 给定矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $Y\in\mathbb{C}^{w\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$, $D\in\mathbb{C}^{w\times n}$ 和 $G\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 求

$$\rho(X,Y,B,D,G)=\min_{A\in\varphi(X,Y,B,D)}\|A-G\|,$$

并求唯一的 $\hat{A}\in\varphi(X,Y,B,D)$, 使得 $\|\hat{A}-G\|=\rho(X,Y,B,D,G)$.

事实上, 对于前述各类特殊矩阵的逆特征值问题, 逆问题或最小二乘问题及其最佳逼近问题, 已有非常丰富的研究成果. 如文 [18] 研究了中心对称矩阵 (中心反对称矩阵) 的逆特征值问题. 文 [19] 和 [6] 分别研究了自反矩阵 (反自反矩阵) 的逆特征值问题和矩阵方程 $AX=B$ 在自反矩阵 (反自反矩阵) 集合中的最小二乘问题及其最佳逼近问题. 文 [11] 研究了 $AX=B$ 在 (R,S)- 对称 ((R,S)- 反对称) 矩阵集合中的最小二乘问题及最佳逼近问题. 文 [4] 和 [16] 分别研究了矩阵方程 $AX=B$ 和矩阵方程组 $AX=B$, $YA=D$ 在 (R,S,μ)- 对称和 (R,S,α,μ)- 对称矩阵集合中的最小二乘问题及其最佳逼近问题; 文 [5] 进一步讨论了 (R,S,μ)- 对称矩阵逆问题, 最佳逼近问题及其对最佳逼近问题的扰动分析. 更多的成果见 [12–14, 17, 20] 及其参考文献.

因为 (R,S_σ)- 交换矩阵是上述特殊矩阵的一般形式, 而问题 1.2 中的目标方程组 $AX=B$, $YA=D$ 在一定意义下也可视为逆特征值问题, 逆问题研究中目标方程的推广形式, 因此如何从一般性角度讨论 (R,S_σ)- 交换矩阵的分块结构特征, 并讨论线性方程组在 (R,S_σ)- 交换矩阵集

合中的最小二乘问题及最佳逼近问题, 使前述已有研究成果都能在一定意义下归于本文结论的特殊情形, 是值得研究的课题. 另一方面, (R,S_σ)- 交换矩阵定义中的映射 σ 泛指 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的映射, 当映射并非一一对应时, 对应问题研究应如何处理. 综上两方面正是本文的研究意义所在及本文的研究初衷.

本文第 2 节基于文 [7] 中对 (R,S_σ)- 交换阵的分块结构, 进一步在映射 σ 为 $\sigma:\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一一对应映射 (置换) 和非一一对应映射两方面分别给出 (R,S_σ)- 交换阵直和形式的分块结构, 并细致分析 (R,S_σ)- 交换阵的一般性结构, 即当 R,S_σ 取不同特殊矩阵及不同映射 σ 下, 由 (R,S_σ)- 交换阵可以得到不同类型的特殊矩阵. 第 3 节从映射 σ 为 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一一对应映射 (置换) 和非一一对应映射两方面细致分析问题 1.2 和 1.3, 给出其具体解析表达式, 且在相容条件下给出相容解存在的充要条件及其相容解的具体解析表达式. 第 4 节给出结论并说明下一步的工作.

2 (R,S_σ)- 交换矩阵的分块结构及一般性

对可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 作如下分块

$$P=(P_0\ \ P_1\ \ \cdots\ \ P_{k-1}),\quad Q=(Q_0\ \ Q_1\ \ \cdots\ \ Q_{k-1});\tag{2.1}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\hat P_0\\ \hat P_1\\ \vdots\\ \hat P_{k-1}\end{pmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}\hat Q_0\\ \hat Q_1\\ \vdots\\ \hat Q_{k-1}\end{pmatrix},\tag{2.2}$$

其中

$$P_r\in\mathbb{C}^{m\times m_r},\quad \hat P_r\in\mathbb{C}^{m_r\times m},\quad \hat P_rP_s=\delta_{rs}I_{m_r},\quad 0\le r,\ s\le k-1.$$
$$Q_r\in\mathbb{C}^{n\times n_r},\quad \hat Q_r\in\mathbb{C}^{n_r\times n},\quad \hat Q_rQ_s=\delta_{rs}I_{n_r},\quad 0\le r,\ s\le k-1.$$

我们可以得到

$$R=\sum_{\ell=0}^{k-1}\gamma_\ell P_\ell\hat P_\ell,\quad S_\sigma=\sum_{\ell=0}^{k-1}\gamma_{\sigma(\ell)}Q_\ell\hat Q_\ell.$$

若 P 和 Q 是酉矩阵, 则有

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}P_0^*\\ P_1^*\\ \vdots\\ P_{k-1}^*\end{pmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}Q_0^*\\ Q_1^*\\ \vdots\\ Q_{k-1}^*\end{pmatrix}.\tag{2.3}$$

那么

$$R=\sum_{\ell=0}^{k-1}\gamma_\ell P_\ell P_\ell^*,\quad S_\sigma=\sum_{\ell=0}^{k-1}\gamma_{\sigma(\ell)}Q_\ell Q_\ell^*.$$

下面引理给出了 (R,S_σ)- 交换矩阵的分块结构.

引理 2.1[7] $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R,S_σ)- 交换矩阵当且仅当

$$A=P([C_{rs}]_{r,s=0}^{k-1})Q^{-1},\quad C_{rs}\in\mathbb{C}^{m_r\times n_s}.\tag{2.4}$$

当 $r\neq\sigma(s)$ 时, $C_{rs}=0\in\mathbb{C}^{m_r\times n_s}$; 当 $r=\sigma(s)$ 时, C_{rs} 为 $m_r\times n_s$ 阶任意矩阵.

事实上, 对任意的 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A 可表示成 $A=PP^{-1}AQQ^{-1}$. 由 P 和 Q^{-1} 的分块结构 (2.1) 和 (2.2) 对 $C=P^{-1}AQ$ 作相应分块 $C=([C_{rs}]_{r,s=0}^{k-1})$, 根据 (R,S_σ)- 交换矩阵的定义 $RA=AS_\sigma$ 及 R 和 S_σ 的分块结构 (1.1) 和 (1.2) 可得引理 2.1 中的分块结构. 由引理 2.1 进一步可得如下结论.

引理 2.2 [7] $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R,S_σ)- 交换矩阵当且仅当

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell,\quad F_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell},\quad 0\leq\ell\leq k-1, \tag{2.5}$$

且 $F_\ell=\hat{P}_{\sigma(\ell)}F_\ell Q_\ell$, $0\leq\ell\leq k-1$ 和对任意 $\gamma_0,\gamma_\ell,\ldots,\gamma_{k-1}$,

$$RA=AS_\sigma=\sum_{\ell=0}^{k-1}\gamma_{\sigma(\ell)}P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell.$$

由引理 2.2 进一步可得 (R,S_σ)- 交换矩阵直和形式的分块结构. 下面以映射 σ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的置换 (一一对应映射) 及非一一对应映射两种情形来说明.

推论 2.3 若映射 σ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个置换 (一一对应). 记 $P_\sigma=(P_{\sigma(0)}P_{\sigma(1)}\cdots P_{\sigma(k-1)})$, 则由引理 2.2, 可得

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell=P_\sigma\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\right)Q^{-1},\quad F_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell},\quad 0\leq\ell\leq k-1. \tag{2.6}$$

若 σ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个非一一对应映射. 假设 $\sigma(s)$ $(0\leq s\leq k-1)$ 有 q 个互不相同的映射值, 记为 $u_0,u_1,\ldots,u_{q-1}$, 其中 $u_\ell\in\mathbb{Z}_k$ $(0\leq\ell\leq q-1)$. 对 $\mathbb{Z}_k$ 做划分

$$\mathbb{Z}_k=T_0\cup T_1\cup\cdots\cup T_{q-1},$$

其中 T_ℓ 中的元素个数为 $t_\ell(\sum_{\ell=0}^{q-1}t_\ell=k)$, 且满足

$$\begin{aligned}&T_0=\{s_0\quad s_1\cdots s_{t_0-1}\},\quad \text{且}\quad \sigma(T_0)=u_0,\\&T_1=\{s_{t_0}\quad s_{t_0+1}\cdots s_{t_0+t_1-1}\},\quad \text{且}\quad \sigma(T_1)=u_1,\\&\quad\vdots\\&T_{q-1}=\{s_{k-t_{q-1}}\quad s_{k-t_{q-1}+1}\cdots s_{k-1}\},\quad \text{且}\quad \sigma(T_{q-1})=u_{q-1},\end{aligned}$$

其中 $\sigma(T_\ell)=u_\ell$ 表示对 T_ℓ 中 t_ℓ 个元素其映射值均为 u_ℓ $(0\leq\ell\leq q-1)$. 令

$$\mathbb{P}=(P_{u_0},P_{u_1},\ldots,P_{u_{q-1}}),\quad \hat{\mathbb{P}}=\begin{pmatrix}\hat{P}_{u_0}\\\hat{P}_{u_1}\\\vdots\\\hat{P}_{u_{q-1}}\end{pmatrix}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_0=(F_{\sigma(s_0)}\quad F_{\sigma(s_1)}\cdots F_{\sigma(s_{t_0-1})}),\\&\mathbb{F}_1=(F_{\sigma(s_{t_0})}\quad F_{\sigma(s_{t_0+1})}\cdots F_{\sigma(s_{t_0+t_1-1})}),\\&\quad\vdots\\&\mathbb{F}_{q-1}=(F_{\sigma(s_{k-t_{q-1}})}\quad F_{\sigma(s_{k-t_{q-1}+1})}\cdots F_{\sigma(s_{k-1})}).\end{aligned}$$

同时, 令

$$\mathbb{Q}=(\mathbb{Q}_0\quad \mathbb{Q}_1\cdots\mathbb{Q}_{q-1}),\quad \hat{\mathbb{Q}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbb{Q}}_0\\ \hat{\mathbb{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\mathbb{Q}}_{q-1}\end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbb{Q}_0=(Q_{\sigma(s_0)}Q_{\sigma(s_1)}\cdots Q_{\sigma(s_{t_0-1})}),\quad \hat{\mathbb{Q}}_0=\begin{pmatrix}\hat{Q}_{\sigma(s_0)}\\ \hat{Q}_{\sigma(s_1)}\\ \vdots\\ \hat{Q}_{\sigma(s_{t_0-1})}\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{Q}_1=(Q_{\sigma(s_{t_0})}Q_{\sigma(s_{t_0+1})}\cdots Q_{\sigma(s_{t_0+t_1-1})}),\quad \hat{\mathbb{Q}}_1=\begin{pmatrix}\hat{Q}_{\sigma(s_{t_0})}\\ \hat{Q}_{\sigma(s_{t_0+1})}\\ \vdots\\ \hat{Q}_{\sigma(s_{t_0+t_1-1})}\end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{Q}_{q-1}=(Q_{\sigma(s_{k-t_{q-1}})}Q_{\sigma(s_{k-t_{q-1}+1})}\cdots Q_{\sigma(s_{k-1})}),\quad \hat{\mathbb{Q}}_{q-1}=\begin{pmatrix}\hat{Q}_{\sigma(s_{k-t_{q-1}})}\\ \hat{Q}_{\sigma(s_{k-t_{q-1}+1})}\\ \vdots\\ \hat{Q}_{\sigma(s_{k-1})}\end{pmatrix},$$

则由引理 2.2 可得

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell=P_{u_0}\mathbb{F}_0\hat{\mathbb{Q}}_0+\cdots+P_{u_{q-1}}\mathbb{F}_{q-1}\hat{\mathbb{Q}}_{q-1}=\mathbb{P}\Big(\bigoplus_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{F}_\ell\Big)\hat{\mathbb{Q}}. \tag{2.7}$$

例 2.4 令 $k=8$, σ 为 $\mathbb{Z}_8\to\mathbb{Z}_8$ 的一个置换, 且

s	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(s)$	5	4	1	0	2	6	3	7

由引理 2.1 和 2.2, (R,S_σ)- 交换矩阵 A 可以表示为

$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0&C_{03}&0&0&0&0\\ 0&0&C_{12}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&C_{24}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&C_{36}&0\\ 0&C_{41}&0&0&0&0&0&0\\ C_{50}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&C_{65}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&C_{77}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P_5F_0\hat{Q}_0+P_4F_1\hat{Q}_1+P_1F_2\hat{Q}_2+P_0F_3\hat{Q}_3+P_2F_4\hat{Q}_4+P_6F_5\hat{Q}_5+P_3F_6\hat{Q}_6+P_7F_7\hat{Q}_7$$

$$
\begin{aligned}
&= (P_5\ \ P_4\ \ P_1\ \ P_0\ \ P_2\ \ P_6\ \ P_3\ \ P_7)\begin{pmatrix} C_{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \\ \hat{Q}_4 \\ \hat{Q}_5 \\ \hat{Q}_6 \\ \hat{Q}_7 \end{pmatrix} \\
&= P_\sigma\Big(\bigoplus_{\ell=0}^{7} F_\ell\Big)\hat{Q},
\end{aligned}
$$

其中 $F_\ell = C_{\sigma(\ell)\ell} \in \mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell}$, $\ell=0,1,\dots,7$, 且易知对任意 $\gamma_0,\gamma_\ell,\dots,\gamma_{k-1}$,

$$RA = AS_\sigma = \sum_{\ell=0}^{7}\gamma_\ell P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell.$$

例 2.5 令 $k=8$, σ 为 $\mathbb{Z}_8\to\mathbb{Z}_8$ 的一个非一一对应的映射, 且

s	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(s)$	2	3	5	4	3	2	5	2

由引理 2.1 和 2.2, (R,S_σ)- 交换矩阵 A 可以表示为

$$
\begin{aligned}
A &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} & 0 & C_{27} \\ 0 & C_{31} & 0 & 0 & C_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{52} & 0 & 0 & 0 & C_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \\
&= P_2F_0\hat{Q}_0 + P_2F_5\hat{Q}_5 + P_2F_7\hat{Q}_7 + P_3F_1\hat{Q}_1 + P_3F_4\hat{Q}_4 + P_4F_3\hat{Q}_3 + P_5F_2\hat{Q}_2 + P_5F_6\hat{Q}_6 \\
&= (P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5)\begin{pmatrix} [C_{20}\quad C_{25}\quad C_{27}] & & & \\ & [C_{31}\quad C_{34}] & & \\ & & [C_{43}] & \\ & & & [C_{52}\quad C_{56}] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{Q}_5 \\ \hat{Q}_7 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_4 \\ \hat{Q}_3 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_6 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{\ell=0}^{3}\mathbb{F}_\ell\Big)\hat{\mathbb{Q}},
\end{aligned}
$$

其中 $F_\ell = C_{\sigma(\ell)\ell} \in \mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell}$, $\ell=0,1,\dots,7$, $\mathbb{F}_0 = [C_{20}\ \ C_{25}\ \ C_{27}]$, $\mathbb{F}_1 = [C_{31}\ \ C_{34}]$, $\mathbb{F}_2 = C_{43}$,

$\mathbb{F}_3 = [C_{52}\ \ C_{56}]$, 且易知对任意 $\gamma_0, \gamma_\ell, \ldots, \gamma_{k-1}$,

$$RA = AS_\sigma = \sum_{\ell=0}^{7} \gamma_\ell P_{\sigma(\ell)} F_\ell \hat{Q}_\ell.$$

下面举例说明: 若 R, S 取不同类型的矩阵, σ 取 $\mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k$ 的不同映射时, 由 (R, S_σ)- 交换矩阵可得到一系列特殊矩阵. 并进一步由引理 2.1, 2.2 和推论 2.3 给出这些特殊矩阵分块结构的等价形式.

例 2.6 若 $R = J_n$, $S = J_n$, 其中 J_n 是 n 阶反序单位矩阵. 由 $J_n^2 = I_n$ 知 J_n 的特征值只有 1 和 -1. 当 $n = 2r$ 时, J_n 的分块结构如下 (类似于 (1.1) 中对 R 的分块结构)

$$J_n = (P_0\ \ P_1) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0{}^\top \\ P_1{}^\top \end{pmatrix}, \quad \text{其中} \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r \\ J_r \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r \\ -J_r \end{pmatrix}.$$

当 $n = 2r+1$ 时, J_n 的分块结构如下

$$J_n = (P_0\ \ P_1) \begin{pmatrix} I_{r+1} & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0{}^\top \\ P_1{}^\top \end{pmatrix}, \quad \text{其中} \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0^\top & \sqrt{2} \\ J_r & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r \\ 0^\top \\ -J_r \end{pmatrix}.$$

由中心对称矩阵和中心反对称矩阵的定义 [1], 即对 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 $J_n A J_n = A$ 则称 A 为中心对称矩阵; 若 $J_n A J_n = -A$ 则称 A 为中心反对称矩阵. 可知中心对称矩阵即为 (J_n, J_n) 交换矩阵, 而中心反对称矩阵即为 (J_n, S_σ) 交换矩阵, 其中 σ 是 $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ 的置换, 且 $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 0$ 和 $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1$. 进一步, 由引理 2.1 和 2.2 可知 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为中心对称矩阵当且仅当

$$A = (P_0\ \ P_1) \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0{}^\top \\ P_1{}^\top \end{pmatrix} = P_0 C_0 P_0^\top + P_1 C_1 P_1^\top, \quad \forall\, C_0 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}, \quad C_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}.$$

而 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为中心反对称矩阵当且仅当

$$A = (P_0\ \ P_1) \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0{}^\top \\ P_1{}^\top \end{pmatrix} = P_1 D_0 P_0^\top + P_0 D_1 P_1^\top, \quad \forall\, D_0 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}, \quad D_1 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}.$$

例 2.7 若 R 和 S 分别为 m 阶和 n 阶非平凡对合矩阵, 即满足 $R = R^{-1} \neq \pm I_m$ 和 $S = S^{-1} \neq \pm I_n$. 由 $R^2 = I_m$, $S^2 = I_n$ 知 R 和 S 的特征值均为 1 和 -1. 对矩阵 R, 若定义 $m_0 = \dim\{z \,|\, Rz = z\}$, $m_1 = \dim\{z \,|\, Rz = -z\}$, 则有 $m_0 + m_1 = m$ 且存在矩阵 $P_0 \in \mathbb{C}^{m\times m_0}$, $P_1 \in \mathbb{C}^{m\times m_1}$, 使得 $RP_0 = P_0$, $RP_1 = P_1$ 且 $P_0^* P_0 = I_{m_0}$ 和 $P_1^* P_1 = I_{m_1}$. 对矩阵 S, 若定义 $n_0 = \dim\{z \,|\, Sz = z\}$, $n_1 = \dim\{z \,|\, Sz = -z\}$, 则有 $n_0 + n_1 = n$ 且存在矩阵 $Q_0 \in \mathbb{C}^{n\times n_0}$, $Q_1 \in \mathbb{C}^{n\times n_1}$, 使得 $SQ_0 = Q_0$, $SQ_1 = Q_1$ 且 $Q_0^* Q_0 = I_{n_0}$ 和 $Q_1^* Q_1 = I_{n_1}$. 定义

$$\hat{P}_0 = \frac{P_0^*(I_m + R)}{2}, \quad \hat{P}_1 = \frac{P_1^*(I_m - R)}{2}, \quad \hat{Q}_0 = \frac{U^*(I_n + S)}{2} \quad \text{和} \quad \hat{Q}_2 = \frac{V^*(I_n - S)}{2}.$$

易验证

$$\hat{P}_0 P_0 = I_{m_0}, \quad \hat{P}_0 P_1 = 0, \quad \hat{P}_1 P_1 = I_{m_1} \quad \text{和} \quad \hat{P}_1 P_0 = 0,$$
$$\hat{Q}_0 Q_0 = I_{n_0}, \quad \hat{Q}_0 Q_1 = 0, \quad \hat{Q}_1 Q_1 = I_{n_1} \quad \text{和} \quad \hat{Q}_1 Q_0 = 0.$$

因此可得

$$(P_0 \quad P_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 \\ \hat{P}_1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad (Q_0 \quad Q_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{Q}_1 \end{pmatrix},$$

且矩阵 R 和 S 分别具有如下分块结构

$$R=(P_0\quad P_1)\begin{pmatrix}I_{m_0} & 0\\ 0 & -I_{m_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{P}_0\\ \hat{P}_1\end{pmatrix}\quad 和\quad S=(Q_0\quad Q_1)\begin{pmatrix}I_{n_0} & 0\\ 0 & -I_{n_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{Q}_0\\ \hat{Q}_1\end{pmatrix}.$$

由 (R,S)- 对称矩阵和 (R,S)- 反对称矩阵的定义 [8], 即对 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $RAS=A$ 则称 A 为 (R,S)- 对称矩阵; 若 $RAS=-A$ 则称 A 为 (R,S)- 反对称矩阵, 可知 (R,S)- 对称矩阵即为 (R,S)- 交换矩阵, 而 (R,S)- 反对称矩阵即为 (R,S_σ)- 交换矩阵, 其中 σ 是 $\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ 的置换, 且 $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ 和 $\gamma_0=1$, $\gamma_1=-1$. 进一步, 由引理 2.1 和 2.2 可得, $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R,S)- 对称矩阵当且仅当

$$A=(P_0\quad P_1)\begin{pmatrix}C_0 & 0\\ 0 & C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{Q}_0\\ \hat{Q}_1\end{pmatrix}=P_0C_0\hat{Q}_0+P_1C_1\hat{Q}_1,\quad \forall\, C_0\in\mathbb{C}^{m_0\times m_0},\ \ C_1\in\mathbb{C}^{m_1\times m_1}.$$

而 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R,S) 反对称矩阵当且仅当

$$A=(P_0\quad P_1)\begin{pmatrix}0 & D_1\\ D_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{Q}_0\\ \hat{Q}_1\end{pmatrix}=P_1D_0\hat{Q}_0+P_0D_1\hat{Q}_1,\quad \forall\, D_0\in\mathbb{C}^{m_1\times m_0},\ \ D_1\in\mathbb{C}^{m_0\times m_1}.$$

例 2.8　令 $R=[\delta_{r,s-1\ (\mathrm{mod}\ k)}]_{r,s=0}^{k-1}$ 为 k 阶 1- 循环矩阵, 即

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{k\times k}.$$

由文 [3, 15], $C=[c_{s-\alpha r\ (\mathrm{mod}\ k)}]_{r,s=0}^{k-1}\in\mathbb{C}^{k\times k}$ 是 α- 循环矩阵当且仅当 $RC=CR^\alpha$. 如

$$\begin{pmatrix}c_0&c_1&c_2&c_3&c_4&c_5\\ c_5&c_0&c_1&c_2&c_3&c_4\\ c_4&c_5&c_0&c_1&c_2&c_3\\ c_3&c_4&c_5&c_0&c_1&c_2\\ c_2&c_3&c_4&c_5&c_0&c_1\\ c_1&c_2&c_3&c_4&c_5&c_0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}c_0&c_1&c_2&c_3&c_4&c_5\\ c_3&c_4&c_5&c_0&c_1&c_2\\ c_0&c_1&c_2&c_3&c_4&c_5\\ c_3&c_4&c_5&c_0&c_1&c_2\\ c_0&c_1&c_2&c_3&c_4&c_5\\ c_3&c_4&c_5&c_0&c_1&c_2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}c_0&c_1&c_2&c_3&c_4&c_5\\ c_1&c_2&c_3&c_4&c_5&c_0\\ c_2&c_3&c_4&c_5&c_0&c_1\\ c_3&c_4&c_5&c_0&c_1&c_2\\ c_4&c_5&c_0&c_1&c_2&c_3\\ c_5&c_0&c_1&c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}$$

6 阶 1- 循环矩阵　　6 阶 3- 循环矩阵　　6 阶 5- 循环矩阵

即 6 阶 Toeplitz 矩阵　　即 6 阶 Hankel 矩阵

易知 $R^k=I_k$, 故 R 的特征值为 $1,\xi,\xi^2,\ldots,\xi^{k-1}$, 其中 $\xi=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, 且 R 具有如下分块结构

$$R=P\,\mathrm{diag}(1,\xi,\xi^2,\ldots,\xi^{k-1})P^*,$$

其中

$$P=[p_0\quad p_1\quad \ldots\quad p_{k-1}],\quad p_\ell=\frac{1}{\sqrt{k}}\begin{pmatrix}1\\ \xi^\ell\\ \xi^{2\ell}\\ \vdots\\ \xi^{(k-1)\ell}\end{pmatrix},\quad 0\le\ell\le k-1.$$

由 $R^\alpha=P\mathrm{diag}(1,\xi^\alpha,\xi^{2\alpha},\ldots,\xi^{(k-1)\alpha})P^*$, 若定义 $\sigma(\ell)=\alpha\ell\ (\mathrm{mod}\ k)$ $(0\le\ell\le k-1)$, 则 $\sigma(\ell)$ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个置换, 且有 $R_\sigma=R^\alpha$. 由此可以说明 k 阶 α- 循环矩阵即为 k 阶 (R,R_σ)- 交换

阵. 进一步, 由引理 2.1 和 2.2 可知, k 阶 α- 循环矩阵 C 具有如下分块结构

$$C=P([c_{rs}]_{r,s=0}^{k-1})P^*=\sum_{\ell=0}^{k-1}p_{\sigma(\ell)}c_{\sigma(\ell)\ell}p_\ell^*=p_\sigma\Big(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}c_{\sigma(\ell)\ell}\Big)p^*.$$

其中当 $r\neq\sigma(s)=\alpha s\ (\mathrm{mod}\ k)$ 时, $c_{rs}=0$; 当 $r=\sigma(s)$ 时, c_{rs} 为任意标量.

例 2.9 若矩阵 $R\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $S\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 均为 k 阶非平凡轮换矩阵, 即满足 $R^{-1}=R^{k-1}\neq\pm I_m$, $S^{-1}=S^{k-1}\neq\pm I_n$. 令 $\xi=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, 则 R 和 S 的特征值均为 $\xi^0,\xi^1,\dots,\xi^{k-1}$. 定义

$$m_s=\dim\{z\,|\,Rz=\xi^sz\}\quad 和\quad n_s=\dim\{z\,|\,Sz=\xi^sz\},\qquad 0\le s\le k-1.$$

存在矩阵 $P_s\in\mathbb{C}^{m\times m_s}$ 和 $Q_s\in\mathbb{C}^{n\times n_s}$, $0\le s\le k-1$, 使得

$$RP_s=\xi^sP_s,\quad SQ_s=\xi^sQ_s\quad P_s^*P_s=I_{m_s}\quad 和\quad Q_s^*Q_s=I_{n_s},\quad 0\le s\le k-1.$$

令

$$\begin{aligned}&P=(P_0\ \ P_1\ \ \cdots\ \ P_{k-1}),\quad Q=(Q_0\ \ Q_1\ \ \cdots\ \ Q_{k-1}),\\&P^{-1}=(\widehat{P}_0^*\ \ \widehat{P}_1^*\ \ \dots\ \ \widehat{P}_{k-1}^*)^*\quad 和\quad Q^{-1}=(\widehat{Q}_0^*\ \ \widehat{Q}_1^*\ \ \dots\ \ \widehat{Q}_{k-1}^*)^*,\end{aligned}$$

其中 $\widehat{P}_s\in\mathbb{C}^{m_s\times m}$ 和 $\widehat{Q}_s\in\mathbb{C}^{n_s\times n}$, $0\le s\le k-1$. $P_0,P_1,\dots,P_{k-1}$; $\widehat{P}_0,\widehat{P}_1,\dots,\widehat{P}_{k-1}$; $Q_0,Q_1,\dots$, Q_{k-1} 和 $\widehat{Q}_0,\widehat{Q}_1,\dots,\widehat{Q}_{k-1}$ 的具体表达式及计算方法见文 [9]. 简单计算有

$$\widehat{P}_rP_s=\begin{cases}I_{m_s}, & r=s,\\ 0, & r\neq s\end{cases}\quad 和\quad \widehat{Q}_rQ_s=\begin{cases}I_{n_s}, & r=s,\\ 0, & r\neq s,\end{cases}\qquad 0\le r,\ s\le k-1.$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned}R&=P\,\mathrm{diag}(\xi^0I_{m_0},\xi^1I_{m_1},\dots,\xi^{k-1}I_{m_{k-1}})\,P^{-1},\\S&=Q\,\mathrm{diag}(\xi^0I_{m_0},\xi^1I_{m_1},\dots,\xi^{k-1}I_{m_{k-1}})\,Q^{-1}.\end{aligned}$$

令 $\alpha,\mu\in\mathbb{Z}_k=\{0,1,\dots,k-1\}$. Trench 在文 [9] 和 [10] 中分别定义了 (R,S,μ)- 对称矩阵, (R,μ)- 对称矩阵和 (R,S,α,μ)- 对称矩阵, (R,α,μ)- 对称矩阵. 即若 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 满足 $RAS^{-1}=\xi^\mu A$ $(RAR^{-1}=\xi^\mu A)$, 则称 A 为 (R,S,μ)- 对称矩阵 ((R,μ)- 对称矩阵)[9]. 若 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 满足 $RAS^{-\alpha}=\xi^\mu A(RAR^{-\alpha}=\xi^\mu A)$, 则称 A 为 (R,S,α,μ)- 对称矩阵 ((R,α,μ)- 对称矩阵)[10]. 若定义 $\sigma(\ell)$ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个置换, 且 $\sigma(\ell)=\ell+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)(0\le\ell\le k-1)$, 则 (R,S,μ)- 对称矩阵即为 (R,S_σ) 交换矩阵, (R,μ)- 对称矩阵即为 (R,R_σ)- 交换矩阵. 若定义置换 $\sigma(\ell)=\alpha\ell+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$ $(0\le\ell\le k-1)$, 则 (R,S,α,μ)- 对称矩阵即为 (R,S_σ)- 交换矩阵, (R,α,μ)- 对称矩阵即为 (R,R_σ)- 交换矩阵. 进一步, 由引理 2.1 和 2.2 可知, (R,S,μ)- 对称矩阵 A 具有如下分块结构

$$A=P([C_{rs}]_{r,s=0}^{k-1})Q^*=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\ell+\mu}C_{\ell+\mu,\ell}Q_\ell^*=P_\sigma\Big(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}C_{\ell+\mu,\ell}\Big)Q^*,$$

当 $r\neq\sigma(s)=s+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$ 时, $C_{rs}=0\in\mathbb{C}^{m_r\times n_s}$; 当 $r=\sigma(s)$ 时, C_{rs} 为任意 $m_r\times n_s$ 阶矩阵. (R,S,α,μ)- 对称矩阵 A 具有如下分块结构

$$A=P([C_{rs}]_{r,s=0}^{k-1})Q^*=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\alpha\ell+\mu}C_{\alpha\ell+\mu,\ell}Q_\ell^*.$$

当 $r\neq\sigma(s)=\alpha s+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$ 时, $C_{rs}=0\in\mathbb{C}^{m_r\times n_s}$; 当 $r=\sigma(s)$ 时, C_{rs} 为任意 $m_r\times n_s$ 阶矩阵. 由文 [10] 可知, 当 $(\gcd(\alpha,k)=1$ 时, $\sigma(s)=\alpha s+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个置换, 这时 (R,S,α,μ)- 对称矩阵 A 可进一步表示为

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\alpha\ell+\mu}C_{\alpha\ell+\mu,\ell}Q_\ell^*=V_{\mu,\alpha}\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}C_{\alpha\ell+\mu,\ell}\right)Q^{-1},$$

其中 $V_{\mu,\alpha}=(P_\mu\ P_{\alpha+\mu}\ \cdots\ P_{(k-1)\alpha+\mu})$. 当 $\gcd(\alpha,k)=q>1$, $\sigma(s)=\alpha s+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的一个非一一映射. 令 $p=k/q$, 这时 (R,S,α,μ)- 对称矩阵 A 可进一步表示为

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\alpha\ell+\mu}C_{\alpha\ell+\mu,\ell}Q_\ell^*=\mathscr{V}_{\mu,\alpha}\left(\bigoplus_{\ell=0}^{p-1}\mathscr{F}_\ell\right)\mathscr{Q}^{-1},$$

其中 $\mathscr{V}_{\mu,\alpha}$, $\mathscr{Q}^{-1}$ 的具体定义见文 [10]. 如取 $k=8$, $\alpha=2$ 和 $\mu=0$, 则有 $p=2$, $q=4$, 这时

s	0	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha s+\mu\ (\mathrm{mod}\ k)$	3	2	4	6	3	2	4	6

.

由引理 2.1 和 2.2, (R,S,α,μ)- 对称矩阵 A 可以表示为

$$\begin{aligned}
A&=P\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&C_{21}&0&0&0&C_{25}&0&0\\
C_{30}&0&0&0&C_{34}&0&0&0\\
0&0&C_{42}&0&0&0&C_{46}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&C_{63}&0&0&0&C_{67}\\
0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}Q^{-1}\\
&=P_3F_0\hat{Q}_0+P_2F_1\hat{Q}_1+P_4F_2\hat{Q}_2+P_6F_3\hat{Q}_3+P_3F_4\hat{Q}_4+P_2F_5\hat{Q}_5+P_4F_6\hat{Q}_6+P_6F_7\hat{Q}_7\\
&=(P_3\ \ P_2\ \ P_4\ \ P_6)\begin{pmatrix}
[C_{30}\quad C_{34}] & & & \\
 & [C_{21}\quad C_{25}] & & \\
 & & [C_{42}\quad C_{46}] & \\
 & & & [C_{63}\quad C_{67}]
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{Q}_0\\ \hat{Q}_3\\ \hat{Q}_1\\ \hat{Q}_5\\ \hat{Q}_2\\ \hat{Q}_6\\ \hat{Q}_3\\ \hat{Q}_7\end{pmatrix}\\
&=\mathscr{V}_{\mu,\alpha}\left(\bigoplus_{\ell=0}^{3}\mathscr{F}_\ell\right)\mathscr{Q}^{-1}.
\end{aligned}$$

3 问题 1.2 的最小二乘 (R,S_σ) 交换解及问题 1.3 的最佳逼近 (R,S_σ) 交换解

上一节讨论了 (R,S_σ) 交换阵的一般性, 本节分析线性方程组 $AX=B$, $YA=D$ 的最小二乘 (R,S_σ) 交换解及其最佳逼近 (R,S_σ) 交换解. 若 R,S_σ 取上节中对应的不同类型的特殊矩阵及映射 σ, 则可退化为线性方程组 $AX=B$, $YA=D$ 对应特殊结构矩阵的最小二乘问题及最佳逼近问题. 为证明本节中的主要定理, 首先介绍如下重要引理.

引理 3.1[16] 给定矩阵 $M,N\in\mathbb{C}^{f\times g}$, $\varSigma=\mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_g)>0$,

$$\rho(\varSigma,\varGamma,M,N)=\min_{L\in\mathbb{C}^{f\times g}}(\|L\varSigma-M\|^2+\|\varGamma L-N\|^2),$$

则

$$\rho(\varSigma,\varGamma,M,N)=\|\varTheta*(\varGamma M-N\varSigma)\|^2,$$

并且最小值是

$$L=\Omega*(M\varSigma+\varGamma N),$$

其中

$$\varTheta=\left(\frac{1}{\sqrt{\eta_i^2+\xi_j^2}}\right)_{f\times g}\in\mathbb{R}^{f\times g},\quad \Omega=\left(\frac{1}{\eta_i^2+\xi_j^2}\right)_{f\times g}\in\mathbb{R}^{f\times g}.$$

引理 3.2[11] 给定矩阵 $F\in\mathbb{C}^{q\times m}$, $G\in\mathbb{C}^{p\times m}$, 则

$$\min_{C\in\mathbb{C}^{p\times q}}\|CF-G\|=\|G(I-F^{\dagger}F)\|,$$

并且最小值能取到当且仅当

$$C=GF^{\dagger}+K(I-FF^{\dagger}),\quad \forall K\in\mathbb{C}^{p\times q}.$$

3.1 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}\to\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}$ 的置换 (一一对应映射)

事实上, 由引理 2.1, 若 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 (R,S_σ)- 交换矩阵, 则分块矩阵 C 的每列块有且仅有一个非零子块, 且该非零子块的行列标必须满足 $r=\sigma(s)$. 对于给定的 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $Y\in\mathbb{C}^{w\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$, $D\in\mathbb{C}^{w\times n}$, 它们可以唯一的表示为

$$X=\sum_{\ell=0}^{k-1}Q_\ell X_\ell,\quad Y=\sum_{\ell=0}^{k-1}Y_{\sigma(\ell)}\hat{P}_{\sigma(\ell)},\quad B=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\sigma(\ell)}B_{\sigma(\ell)},\quad D=\sum_{\ell=0}^{k-1}D_\ell\hat{Q}_\ell,$$

其中对于 $0\le\ell\le k-1$,

$$\begin{aligned}&X_\ell=\hat{Q}_\ell X\in\mathbb{C}^{n_\ell\times v},\quad Y_{\sigma(\ell)}=YP_{\sigma(\ell)}\in\mathbb{C}^{w\times m_{\sigma(\ell)}},\\&B_{\sigma(\ell)}=\hat{P}_{\sigma(\ell)}B\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times v},\quad D_\ell=DQ_\ell\in\mathbb{C}^{w\times n_\ell}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

如果 P 和 Q 均为酉矩阵, 则 $X_\ell=Q_\ell^*X$ 和 $B_{\sigma(\ell)}=P_{\sigma(\ell)}^*B$, $0\le\ell\le k-1$.

假设 $\mathrm{rank}(X_\ell)=\zeta_\ell$ 和 $\mathrm{rank}(Y_{\sigma(\ell)})=\eta_\ell$, $0\le\ell\le k-1$. 令 X_ℓ 和 $Y_{\sigma(\ell)}$ $(0\le\ell\le k-1)$ 的奇异值分解分别为

$$X_\ell=\Phi_{X_\ell}D_{X_\ell}\varPsi_{X_\ell}^*,\quad Y_{\sigma(\ell)}=\Phi_{Y_{\sigma(\ell)}}D_{Y_{\sigma(\ell)}}\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)}}^*,\tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Phi_{X_\ell}=(\Phi_{X_\ell,1}\quad\Phi_{X_\ell,2}),\quad \varPsi_{X_\ell}=(\varPsi_{X_\ell,1}\quad\varPsi_{X_\ell,2}),\\&\Phi_{Y_{\sigma(\ell)}}=(\Phi_{Y_{\sigma(\ell)},1}\quad\Phi_{Y_{\sigma(\ell)},2}),\quad \varPsi_{Y_{\sigma(\ell)}}=(\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},1}\quad\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},2}),\\&\Phi_{X_\ell,1}\in\mathbb{C}^{n_\ell\times\zeta_\ell},\quad \varPsi_{X_\ell,1}\in\mathbb{C}^{v\times\zeta_\ell},\quad \Phi_{Y_{\sigma(\ell)},1}\in\mathbb{C}^{w\times\eta_\ell},\quad \varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},1}\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times\eta_\ell},\\&D_{X_\ell}=\begin{pmatrix}\varSigma_{X_\ell}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \varSigma_{X_\ell}=\mathrm{diag}(\sigma_1(X_\ell),\sigma_2(X_\ell),\ldots,\sigma_{\zeta_\ell}(X_\ell)),\\&D_{Y_{\sigma(\ell)}}=\begin{pmatrix}\varSigma_{Y_{\sigma(\ell)}}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \varSigma_{Y_{\sigma(\ell)}}=\mathrm{diag}(\sigma_\ell(Y_{\sigma(\ell)}),\sigma_2(Y_{\sigma(\ell)}),\ldots,\sigma_{\eta_\ell}(Y_{\sigma(\ell)})).\end{aligned}$$

定理 3.3 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}, Y\in\mathbb{C}^{w\times m}, B\in\mathbb{C}^{m\times v}, D\in\mathbb{C}^{w\times n}$. 假设 $X_\ell, Y_{\sigma(\ell)}, B_{\sigma(\ell)}, D_\ell\ (0\le \ell\le k-1)$ 如 (3.1) 所示, $X_\ell, Y_{\sigma(\ell)}$ 的奇异值分解如 (3.2) 所示. 如果 P 和 Q 是酉矩阵, 则 $\varphi(X,Y,B,D)\in\varphi$ 非空并且 A 能表示为

$$A=P_\sigma\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\bigg)Q^*,$$

其中

$$F_\ell=\varGamma_\ell+\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},2}F_{22}^\ell\Phi_{X_\ell,2}^*,\quad \forall F_{22}^\ell\in\mathbb{C}^{(m_{\sigma(\ell)}-\eta_\ell)\times(n_\ell-\zeta_\ell)},\tag{3.3}$$

其中

$$\varGamma_\ell=\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},1}F_{11}^\ell\Phi_{X_\ell,1}^*+(I_{m_{\sigma(\ell)}}-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger Y_{\sigma(\ell)})B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger+Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)$$

和

$$\begin{aligned}&F_{11}^\ell=\Omega_\ell*(\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},1}^*B_{\sigma(\ell)}\varPsi_{X_\ell,1}\varSigma_{X_\ell}+\varSigma_{Y_{\sigma(\ell)}}\Phi_{Y_{\sigma(\ell)},1}^*D_\ell\Phi_{X_\ell,1}),\\&\Omega_\ell=\left(\frac{1}{\sigma_i^2(Y_{\sigma(\ell)})+\sigma_j^2(X_\ell)}\right)_{\eta_\ell\times\zeta_\ell}.\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}\rho(X,Y,B,D)=\sum_{\ell=0}^{k-1}&(\|\varTheta_\ell*(\varSigma_{Y_{\sigma(\ell)}}\varPsi_{Y_{\sigma(\ell)},1}^*B_{\sigma(\ell)}\varPsi_{X_\ell,1}-\Phi_{Y_{\sigma(\ell)},1}^*D_\ell\Phi_{X_\ell,1}\varSigma_{X_\ell})\|^2\\&+\|B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2+\|(I_w-Y_{\sigma(\ell)}Y_{\sigma(\ell)}^\dagger)D_\ell\|^2),\end{aligned}$$

其中

$$\varTheta_\ell=\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2(Y_{\sigma(\ell)})+\sigma_j^2(X_\ell)}}\right)_{\eta_\ell\times\zeta_\ell}.\tag{3.4}$$

证明 因为 P 和 Q 是酉矩阵, $P_{\sigma(\ell)}$ 和 Q 也是酉矩阵, 则 $\hat{P}_{\sigma(\ell)}=P_{\sigma(\ell)}^*$ 和 $\hat{Q}=Q^{-1}=Q^*$, 由引理 2.2, (3.2) 和 F- 范数的酉不变性, 可得

$$\begin{aligned}&\|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2\\&=\bigg\|P_\sigma\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\bigg)Q^{-1}X-B\bigg\|^2+\bigg\|YP_\sigma\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\bigg)Q^{-1}-D\bigg\|^2\\&=\bigg\|\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\bigg)Q^{-1}X-P_\sigma^*B\bigg\|^2+\bigg\|YP_\sigma\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\bigg)-DQ\bigg\|^2\\&=\sum_{\ell=0}^{k-1}(\|F_\ell X_\ell-B_{\sigma(\ell)}\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}F_\ell-D_\ell\|^2)\\&=\sum_{\ell=0}^{k-1}(\|(F_\ell-B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger)X_\ell-B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}(F_\ell-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell)-(I_w-Y_{\sigma(\ell)}Y_{\sigma(\ell)}^\dagger)D_\ell\|^2)\\&=\sum_{\ell=0}^{k-1}(\|(F_\ell-B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger)X_\ell\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}(F_\ell-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell)\|^2)\\&\quad+\sum_{\ell=0}^{k-1}(\|B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2+\|(I_w-Y_{\sigma(\ell)}Y_{\sigma(\ell)}^\dagger)D_\ell\|^2).\end{aligned}\tag{3.5}$$

由此可知, 问题 $\min_{A\in\varphi}(\|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2)$ 等价于

$$\min_{F_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell}}(\|(F_\ell-B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger)X_\ell\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}(F_\ell-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell)\|^2),\quad 0\le\ell\le k-1.$$

将 $\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}$ 和 Φ_{X_ℓ} 合理地分块

$$\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}F_\ell\Phi_{X_\ell}=\begin{pmatrix}F_{11}^\ell & F_{12}^\ell\\ F_{21}^\ell & F_{22}^\ell\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

利用 (3.2), (3.6) 和 F- 范数的酉不变性, 有

$$\begin{aligned}&\|(F_\ell-B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger)X_\ell\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}(F_\ell-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell)\|^2\\ &=\|\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}F_\ell\Phi_{X_\ell}D_{X_\ell}-\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell}D_{X_\ell}^\dagger D_{X_\ell}\|^2+\|D_{Y_{\sigma(\ell)}}\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}F_\ell\Phi_{X_\ell}-D_{Y_{\sigma(\ell)}}D^\dagger_{Y_{\sigma(\ell)}}\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)}}D_\ell\Phi_{X_\ell}\|^2\\ &=\|F_{11}^\ell\Sigma_{X_\ell}-\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}\|^2+\|\Sigma_{Y_{\sigma(\ell)}}F_{11}^\ell-\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,1}\|^2\\ &\quad+\|F_{21}^\ell\Sigma_{X_\ell}-\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},2}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}\|^2+\|\Sigma_{Y_{\sigma(\ell)}}F_{12}^\ell-\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,2}\|^2.\end{aligned}$$

因此, 利用引理 3.1,

$$\begin{aligned}&\min_{F_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell}}(\|(F_\ell-B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger)X_\ell\|^2+\|Y_{\sigma(\ell)}(F_\ell-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell)\|^2)\\ &\quad=\min_{F_{11}^\ell\in\mathbb{C}^{\eta_\ell\times\zeta_\ell}}(\|F_{11}^\ell\Sigma_{X_\ell}-\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}\|^2+\|\Sigma_{Y_{\sigma(\ell)}}F_{11}^\ell-\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,1}\|^2)\\ &\quad=\|\Theta_\ell*(\Sigma_{Y_{\sigma(\ell)}}\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}-\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,1}\Sigma_{X_\ell})\|^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 Θ_ℓ 如 (3.4) 所示. 此时, F_{11}^ℓ 的表达式如 (3.3) 所时, 且

$$F_{12}^\ell=\Sigma^{-1}_{Y_{\sigma(\ell)}}\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,2},\quad F_{21}^\ell=\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},2}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}\Sigma^{-1}_{X_\ell}.$$

由 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}\rho(X,Y,B,D)&=\min_{A\in\varphi}(\|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2)\\ &=\sum_{\ell=0}^{k-1}(\|\Theta_\ell*(\Sigma_{Y_{\sigma(\ell)}}\Psi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}B_{\sigma(\ell)}\Psi_{X_\ell,1}-\Phi^*_{Y_{\sigma(\ell)},1}D_\ell\Phi_{X_\ell,1}\Sigma_{X_\ell})\|^2.\\ &\quad+\|B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2+\|(I_w-Y_{\sigma(\ell)}Y_{\sigma(\ell)}^\dagger)D_\ell\|^2).\end{aligned}$$

证毕.

定理 3.4 给定 $G\in\mathbb{C}^{m\times n}$. 假设 P 和 Q 是酉矩阵, 则 $A\in\varphi(X,Y,B,D)$ 非空. 作如下分块

$$P_\sigma^*GQ=\begin{pmatrix}G_{00} & G_{01} & \cdots & G_{0,k-1}\\ G_{10} & G_{11} & \cdots & G_{1,k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ G_{k-1,0} & G_{k-1,1} & \ldots & G_{k-1,k-1}\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中 $G_{t\ell}=P^*_{\sigma(\ell)}GQ_\ell$, $0\le t,\ \ell\le k-1$. 则问题 1.3 存在唯一解, 且该唯一解可以表示为

$$\hat{A}=P_{\sigma(\ell)}\left(\sum_{\ell=0}^{k-1}[T_\ell+(I_{m_{\sigma(\ell)}}-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger Y_{\sigma(\ell)})(G_{\ell\ell}-T_\ell)(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)]\right)Q^*, \tag{3.9}$$

并且

$$\rho(X,Y,B,D,G)^2=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|G_{\ell\ell}-T_\ell-(I_{m_{\sigma(\ell)}}-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger Y_{\sigma(\ell)})(G_{\ell\ell}-T_\ell)(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)\|^2+\sum_{t,\ell=0,\,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2,$$

其中 T_ℓ 由定理 3.3 所给.

证明 由定理 3.3 可知, 问题 1.2 的解集合 $\varphi(X,Y,B,D)$ 为非空线性子空间. 故对给定 $G\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 其对应于集合 $\varphi(X,Y,B,D)$ 的最佳逼近矩阵存在且唯一. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则有

$$\begin{aligned}
\|A-G\|^2 &= \left\|\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\right)-P_\sigma^*GQ\right\|^2\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|F_\ell-G_{\ell\ell}\|^2+\sum_{t,\ell=0,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}F_{22}^\ell\Phi_{X_\ell,2}^*-(G_{\ell\ell}-T_\ell)\|^2+\sum_{t,\ell=0,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|F_{22}^\ell-\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}^*(G_{\ell\ell}-T_\ell)\Phi_{X_\ell,2}^*\|^2\\
&\quad+\sum_{\ell=0}^{k-1}\|(G_{\ell\ell}-T_\ell)-\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}^*(G_{\ell\ell}-T_\ell)\Phi_{X_\ell,2}\Phi_{X_\ell,2}^*\|^2+\sum_{t,\ell=0,\,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

则 $\|A-G\|^2=\min$, $\forall\, A\in\varphi(X,Y,B,D)$ 当且仅当

$$F_{22}^\ell=\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}^*(G_{\ell\ell}-T_\ell)\Phi_{X_\ell,2},\quad 0\le\ell\le k-1. \qquad (3.11)$$

因此

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y,B,D,G)^2 &= \min_{A\in\varphi(X,Y,B,D)}\|A-G\|^2\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|(G_{\ell\ell}-T_\ell)-\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}^*(G_{\ell\ell}-T_\ell)\Phi_{X_\ell,2}\Phi_{X_\ell,2}^*\|^2+\sum_{t,\ell=0,\,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\|G_{\ell\ell}-T_\ell-(I_{m_{\sigma(\ell)}}-Y_{\sigma(\ell)}^\dagger Y_{\sigma(\ell)})(G_{\ell\ell}-T_\ell)(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)\|^2\\
&\quad+\sum_{t,\ell=0,\,t\neq\ell}^{k-1}\|G_{t\ell}\|^2. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

证毕.

推论 3.5 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则存在 (R,S_σ)- 交换矩阵, 使得矩阵方程组 $AX=B$, $YA=D$ 成立当且仅当

$$Y_{\sigma(\ell)}B_{\sigma(\ell)}=D_\ell X_\ell,\quad B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)=\mathbf{0},\quad (I_w-Y_{\sigma(\ell)}Y_{\sigma(\ell)}^\dagger)D_\ell=\mathbf{0},\quad 0\le\ell\le k-1,$$

且其一般解可表示为

$$A=P_\sigma\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\right)Q^*,$$

其中

$$F_\ell=B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger+Y_{\sigma(\ell)}^\dagger D_\ell(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)+\Psi_{Y_{\sigma(\ell)},2}F_{22}^\ell\Phi_{X_\ell,2}^*,\quad \forall\, F_{22}^\ell\in\mathbb{C}^{(m_{\sigma(\ell)}-\eta_\ell)\times(n_\ell-\zeta_\ell)}.$$

当 $Y=\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{w\times m}$ 且 $D=\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{w\times n}$ 时, 则线性矩阵方程组 $AX=B, YA=D$ 退化为线性矩阵方程 $AX=B$. 由定理 3.3 和 3.4, 可得线性矩阵方程 $AX=B$ 的最小二乘 (R,S_σ)- 交换解及其对应的最佳逼近 (R,S_σ)- 交换解. 同时在方程相容情况下, 可得到 (R,S_σ)- 交换解存在的充要条件及其一般解表达式.

推论 3.6 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$. 假设 $X_\ell, B_{\sigma(\ell)}$ $(0\le\ell\le k-1)$ 如 (3.3) 所示, X_ℓ 的奇异值分解如 (3.4) 所示. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则 $\varphi(X,B)\in\varphi$ 非空并且 A 能表示为

$$A=\sum_{\ell=0}^{k-1}P_{\sigma(\ell)}F_\ell\hat{Q}_\ell=P_\sigma\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}F_\ell\right)Q^*,$$

其中对 $0\le\ell\le k-1$,

$$F_\ell=B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger+K_\ell(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger),\quad K_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell},\tag{3.13}$$

并且

$$\rho(X,B)^2=\sum_{\ell=0}^{k-1}t\|B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2.\tag{3.14}$$

推论 3.7 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则存在 (R,S_σ)- 交换矩阵使得 $AX=B$ 成立当且仅当

$$\sum_{\ell=0}^{k-1}\|B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)\|^2=0,$$

也就是说 $B_{\sigma(\ell)}(I_v-X_\ell^\dagger X_\ell)=\mathbf{0}$. 此时, A 的表达式为

$$A=P_\sigma\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k-1}B_{\sigma(\ell)}X_\ell^\dagger+K_\ell(I_{n_\ell}-X_\ell X_\ell^\dagger)\right)Q^*,\quad\forall K_\ell\in\mathbb{C}^{m_{\sigma(\ell)}\times n_\ell}\ \ (0\le\ell\le k-1).$$

3.2 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}\to\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}$ 的非一一映射

若 σ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的非一一映射, 由推论 2.3, 记 $\mathbb{P}=(P_{u_0}\quad P_{u_1}\cdots P_{u_{q-1}})$. 为讨论方便, 令 $U=\{u_0,u_1,\ldots,u_{q-1}\}$, 记 $\bar{U}$ 是 U 在集合 $\mathbb{Z}_k$ 中的补集, 即 $\bar{U}\cup U=\mathbb{Z}_k$ 且 $\bar{U}\cap U=\emptyset$. 进一步记 $\bar{U}=\{u_q,u_{q+1},\ldots,u_{k-1}\}$ 和 $\mathbb{P}_1=(P_{u_q}\quad P_{u_{q+1}}\ \cdots P_{u_{k-1}})$, 则 $(\mathbb{P}\quad\mathbb{P}_1)$ 是 P 的列块的一个重排. 令

$$\hat{\mathbb{P}}=\begin{pmatrix}\hat{P}_{u_0}\\\hat{P}_{u_1}\\\vdots\\\hat{P}_{u_{q-1}}\end{pmatrix},\quad\hat{\mathbb{P}}_1=\begin{pmatrix}\hat{P}_{u_q}\\\hat{P}_{u_{q+1}}\\\vdots\\\hat{P}_{u_{k-1}}\end{pmatrix},$$

则 $(\mathbb{P}\ \mathbb{P}_1)^{-1}=\binom{\hat{\mathbb{P}}}{\hat{\mathbb{P}}_1}$. 若 P,Q 均为酉矩阵, 则进一步有 $(\mathbb{P}\quad\mathbb{P}_1)^{-1}=\binom{\mathbb{P}^*}{\mathbb{P}_1^*}$.

因为 $(\mathbb{P}\quad\mathbb{P}_1)$ 的列块是 $\mathbb{C}^m$ 中的基向量, 则任意 $Y\in\mathbb{C}^{w\times m}$ 和 $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$ 可唯一表示为

$$Y=S_1\hat{\mathbb{P}}+S_2\hat{\mathbb{P}}_1\quad 和\quad B=\mathbb{P}Z_1+\mathbb{P}_1Z_2,\tag{3.15}$$

其中 $S_1=Y\mathbb{P}\in\mathbb{C}^{w\times(\sum_{\ell=0}^{q-1}m_{u_\ell})}$, $S_2=Y\mathbb{P}_1\in\mathbb{C}^{w\times(m-\sum_{\ell=0}^{q-1}m_{u_\ell})}$, $Z_1=\hat{\mathbb{P}}B\in\mathbb{C}^{(\sum_{\ell=0}^{q-1}m_{u_\ell})\times v}$,

$Z_2=\hat{\mathbb{P}}_1B\in\mathbb{C}^{(m-\sum_{\ell=0}^{q-1}m_{u_\ell})\times v}$. 作如下分块

$$S_1=(\mathscr{Y}_{u_0}\quad \mathscr{Y}_{u_1}\cdots\mathscr{Y}_{u_{q-1}})\quad 和\quad Z_1=\begin{pmatrix}\hat{\mathscr{B}}_{u_0}\\ \hat{\mathscr{B}}_{u_1}\\ \vdots\\ \hat{\mathscr{B}}_{u_{q-1}}\end{pmatrix},$$

其中

$$\mathscr{Y}_{u_\ell}=YP_{u_\ell}\in\mathbb{C}^{w\times m_{u_\ell}},\quad \mathscr{B}_{u_\ell}=\hat{P}_{u_\ell}B\in\mathbb{C}^{m_{u_\ell}\times v},\quad 0\le\ell\le q-1,\tag{3.16}$$

则 (3.15) 的 $Y\in\mathbb{C}^{w\times m}$ 和 $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$ 可以进一步写成

$$Y=\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathscr{Y}_{u_\ell}\hat{P}_{u_\ell}+S_2\hat{\mathbb{P}}_1\quad 和\quad B=\sum_{\ell=0}^{q-1}P_{u_\ell}\mathscr{B}_{u_\ell}+\mathbb{P}_1Z_2.$$

同理, 因为 $\mathbb{Q}$ 的列块是 $\mathbb{C}^n$ 中的基向量, 任意 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$ 和 $D\in\mathbb{C}^{w\times n}$ 可唯一表示为

$$X=\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{Q}_\ell\mathscr{X}_\ell\quad 和\quad D=\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathscr{D}_\ell\hat{\mathbb{Q}}_\ell,$$

其中

$$\mathscr{X}_\ell=\hat{\mathbb{Q}}_\ell X\in\mathbb{C}^{t_\ell n_{u_\ell}\times v},\quad \mathscr{D}_\ell=D\mathbb{Q}_\ell\in\mathbb{C}^{w\times t_\ell n_{u_\ell}},\quad 0\le\ell\le q-1.\tag{3.17}$$

假设 $\mathrm{rank}(\mathscr{X}_\ell)=\alpha_\ell$ 和 $\mathrm{rank}(\mathscr{Y}_{u_\ell})=\beta_\ell$, $0\le\ell\le q-1$. 令 $\mathscr{X}_\ell$ 和 $\mathscr{Y}_{u_\ell}$ 的奇异值分解分别为

$$\mathscr{X}_\ell=\Phi_{\mathscr{X}_\ell}D_{\mathscr{X}_\ell}\Psi^*_{\mathscr{X}_\ell},\quad \mathscr{Y}_{u_\ell}=\Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}D_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}\Psi^*_{\mathscr{Y}_{u_\ell}},\tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathscr{X}_\ell}=(\Phi_{\mathscr{X}_\ell,1}\quad \Phi_{\mathscr{X}_\ell,2}),\quad \Psi_{\mathscr{X}_\ell}=(\Psi_{\mathscr{X}_\ell,1}\quad \Psi_{\mathscr{X}_\ell,2}),\\
&\Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}=(\Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}\quad \Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},2}),\quad \Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}=(\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}\quad \Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},2}),\\
&\Phi_{\mathscr{X}_\ell,1}\in\mathbb{C}^{t_\ell n_{u_\ell}\times\alpha_\ell},\quad \Psi_{\mathscr{X}_\ell,1}\in\mathbb{C}^{v\times\alpha_\ell},\quad \Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}\in\mathbb{C}^{w\times\beta_\ell},\quad \Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}\in\mathbb{C}^{m_{u_\ell}\times\beta_\ell},\\
&D_{\mathscr{X}_\ell}=\begin{pmatrix}\Sigma_{\mathscr{X}_\ell}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \Sigma_{\mathscr{X}_\ell}=\mathrm{diag}(\sigma_1(\mathscr{X}_\ell),\sigma_2(\mathscr{X}_\ell),\ldots,\sigma_{\alpha_\ell}(\mathscr{X}_\ell)),\\
&D_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}=\begin{pmatrix}\Sigma_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \Sigma_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}=\mathrm{diag}(\sigma_1(\mathscr{Y}_{u_\ell}),\sigma_2(\mathscr{Y}_{u_\ell}),\ldots,\sigma_{\beta_\ell}(\mathscr{Y}_{u_\ell})).
\end{aligned}$$

定理 3.8 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}, Y\in\mathbb{C}^{w\times m}, B\in\mathbb{C}^{m\times v}$ 和 $D\in\mathbb{C}^{w\times n}$. 假设 $\mathscr{X}_\ell,\mathscr{D}_\ell,\mathscr{Y}_{u_\ell},\mathscr{B}_{u_\ell}$ $(0\le\ell\le q-1)$ 如 (3.16) 和 (3.17) 所示, $\mathscr{X}_\ell,\mathscr{Y}_{u_\ell}$ 的奇异值分解如 (3.18) 所示. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则 $\varphi(X,Y,B,D)\in\varphi$ 非空并且 A 可表示为

$$A=\mathbb{P}\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{F}_\ell\bigg)\mathbb{Q}^*,$$

其中

$$\mathbb{F}_\ell=\mathscr{T}_\ell+\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},2}\mathbb{F}^\ell_{22}\Phi^*_{\mathscr{X}_\ell,2},\quad \forall\mathbb{F}^\ell_{22}\in\mathbb{C}^{(m_{u_\ell}-\beta_\ell)\times(t_\ell n_{u_\ell}-\alpha_\ell)},\tag{3.19}$$

其中

$$\mathscr{T}_\ell=\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}\mathbb{F}^\ell_{11}\Phi^*_{\mathscr{X}_\ell,1}+(I_{m_{u_\ell}}-\mathscr{Y}^\dagger_{u_\ell}\mathscr{Y}_{u_\ell})\mathscr{B}_{u_\ell}\mathscr{X}^\dagger_\ell+\mathscr{Y}^\dagger_{u_\ell}\mathscr{D}_\ell(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}^\dagger_\ell),$$

且

$$\mathbb{F}_{11}^{\ell}=\boldsymbol{\Omega}_{\ell}*(\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}^{*}\mathscr{B}_{u_\ell}\Psi_{\mathscr{X}_\ell,1}\Sigma_{\mathscr{X}_\ell}+\Sigma_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}\Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}^{*}\mathscr{D}_\ell\Phi_{\mathscr{X}_\ell,1}),\quad \boldsymbol{\Omega}_\ell=\left(\frac{1}{\sigma_i^2(\mathscr{Y}_{u_\ell})+\sigma_j^2(\mathscr{X}_\ell)}\right)_{\beta_\ell\times\alpha_\ell}.$$

此时

$$\begin{aligned}\rho(X,Y,B,D)=\sum_{\ell=0}^{q-1}&(\|\Theta_\ell*(\Sigma_{\mathscr{Y}_{u_\ell}}\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}^{*}\mathscr{B}_{u_\ell}\Psi_{\mathscr{X}_\ell,1}-\Phi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},1}^{*}\mathscr{D}_\ell\Phi_{\mathscr{X}_\ell,1}\Sigma_{\mathscr{X}_\ell})\|^2+\|\mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^{\dagger}\mathscr{X}_\ell)\|^2\\&+\|(I_w-\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathscr{Y}_{u_\ell}^{\dagger})\mathscr{D}_\ell\|^2)+\|B-\mathbb{P}\mathbb{P}^*B\|^2,\end{aligned}\tag{3.20}$$

其中

$$\Theta_\ell=\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2(\mathscr{Y}_{u_\ell})+\sigma_j^2(\mathscr{X}_\ell)}}\right)_{\beta_\ell\times\alpha_\ell}.$$

证明 若 P 和 Q 均为酉矩阵, $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 也均为酉矩阵, 则有 $\hat{\mathbb{P}}=\mathbb{P}^*$, $\hat{\mathbb{P}}_1=\mathbb{P}_1^*$, $\mathbb{P}^*\mathbb{P}_1=0$, $\mathbb{Q}^{-1}=\mathbb{Q}^*$, $\mathscr{X}_\ell=\mathbb{Q}_\ell^*X$, $\mathscr{B}_{u_\ell}=P_{u_\ell}^*B$. 由推论 2.3, (3.16), (3.17) 和 F- 范数的酉不变性, 可得

$$\begin{aligned}\|AX-B\|^2+\|YA-D\|^2&=\left\|\left(\sum_{\ell=0}^{q-1}P_{u_\ell}\mathbb{F}_\ell\mathbb{Q}_\ell^*\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{Q}_\ell\mathscr{X}_\ell\right)-\sum_{\ell=0}^{q-1}P_{u_\ell}\mathscr{B}_{u_\ell}-\mathbb{P}_1Z_2\right\|^2\\&\quad+\left\|\left(\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathscr{Y}_{u_\ell}P_{u_\ell}^*+S_2\mathbb{P}_1^*\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q-1}P_{u_\ell}\mathbb{F}_\ell\mathbb{Q}_\ell^*\right)-\sum_{\ell=0}^{q-1}\mathscr{D}_\ell\mathbb{Q}_\ell^*\right\|^2\\&=\left\|\sum_{\ell=0}^{q-1}P_{u_\ell}(\mathbb{F}_\ell\mathscr{X}_\ell-\mathscr{B}_{u_\ell})-\mathbb{P}_1Z_2\right\|^2+\left\|\sum_{\ell=0}^{q-1}(\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathbb{F}_\ell-\mathscr{D}_\ell)\mathbb{Q}_\ell^*\right\|^2\\&=\sum_{\ell=0}^{q-1}(\|\mathbb{F}_\ell\mathscr{X}_\ell-\mathscr{B}_{u_\ell}\|^2+\|\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathbb{F}_\ell-\mathscr{D}_\ell\|^2)+\|\mathbb{P}_1Z_2\|^2\\&=\sum_{\ell=0}^{q-1}(\|(\mathbb{F}_\ell-\mathscr{B}_{u_\ell}\mathscr{X}_\ell^{\dagger})\mathscr{X}_\ell\|^2+\|\mathscr{Y}_{u_\ell}(\mathbb{F}_\ell-\mathscr{Y}_{u_\ell}^{\dagger}\mathscr{D}_\ell)\|^2)\\&\quad+\sum_{\ell=0}^{q-1}(\|\mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^{\dagger}\mathscr{X}_\ell)\|^2+\|(I_w-\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathscr{Y}_{u_\ell}^{\dagger})\mathscr{D}_\ell\|^2)+\|B-\mathbb{P}\mathbb{P}^*B\|^2.\end{aligned}$$

后续证明类同定理 3.3 的证明.

由定理 3.8 可知, 当 σ 是 $\mathbb{Z}_k\to\mathbb{Z}_k$ 的非一一映射时, 问题 1.2 的解集合 $\varphi(X,Y,B,D)$ 同样为非空线性子空间. 故对给定 $G\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 对应于集合 $\varphi(X,Y,B,D)$ 的最佳逼近矩阵同样存在且唯一. 该唯一最佳逼近矩阵的具体表达式如下述定理所示, 其证明类同定理 3.4 的证明, 故略.

定理 3.9 给定 $G\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 作如下分块

$$\mathbb{P}^*G\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}G_{00}&G_{01}&\cdots&G_{0,q-1}\\G_{10}&G_{11}&\cdots&G_{1,q-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\G_{q-1,0}&G_{q-1,1}&\cdots&G_{q-1,q-1}\end{pmatrix},\tag{3.21}$$

其中 $\tilde{G}_{t\ell}=P_{u_\ell}^*G\mathbb{Q}_\ell$, $0\le t,\ \ell\le q-1$. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则问题 1.3 的唯一解可表示为

$$\hat{A}=\mathbb{P}\left(\sum_{\ell=0}^{q-1}[\mathscr{T}_\ell+(I_{m_{u_\ell}}-\mathscr{Y}_{u_\ell}^{\dagger}\mathscr{Y}_{u_\ell})(\tilde{G}_{\ell\ell}-\mathscr{T}_\ell)(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}_\ell^{\dagger})]\right)\mathbb{Q}^*,\tag{3.22}$$

并且

$$\begin{aligned}\rho(X,Y,B,D,G)^2 = &\sum_{\ell=0}^{q-1}\|\tilde{G}_{\ell\ell}-\mathscr{T}_\ell-(I_{m_{u_\ell}}-\mathscr{Y}_{u_\ell}^\dagger\mathscr{Y}_{u_\ell})(\tilde{G}_{\ell\ell}-\mathscr{T}_\ell)(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}_\ell^\dagger)\|^2\\ &+\sum_{t,\ell=0,t\neq\ell}^{q-1}\|\tilde{G}_{t\ell}\|^2+\|G-\mathbb{P}\mathbb{P}^*G\|^2,\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{T}_\ell$ 由定理 3.8 所给.

推论 3.10 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则存在 (R,S_σ)- 交换矩阵使得矩阵方程组 $AX=B$, $YA=D$ 成立当且仅当

$$\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathscr{B}_{u_\ell}=\mathscr{D}_\ell\mathscr{X}_\ell,\quad \mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^\dagger\mathscr{X}_\ell)=\mathbf{0},\quad (I_w-\mathscr{Y}_{u_\ell}\mathscr{Y}_{u_\ell}^\dagger)\mathscr{D}_\ell=\mathbf{0},\quad 0\le\ell\le q-1$$

和 $B=\mathbb{P}\mathbb{P}^*B$. 此时一般解可表示为

$$A=\mathbb{P}\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{F}_\ell\bigg)\mathbb{Q}^*,$$

其中 $\mathbb{F}_\ell=\mathscr{B}_{u_\ell}\mathscr{X}_\ell^\dagger+\mathscr{Y}_{u_\ell}^\dagger\mathscr{D}_\ell(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}_\ell^\dagger)+\Psi_{\mathscr{Y}_{u_\ell},2}\mathbb{F}_{22}^\ell\Phi_{\mathscr{X}_\ell,2}^*$, $\mathbb{F}_{22}^\ell\in\mathbb{C}^{(m_{u_\ell}-\beta_\ell)\times(t_\ell n_{u_\ell}-\alpha_\ell)}$.

类似于推论 3.6 和 3.7, 可得如下结论.

推论 3.11 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$. 假设 $\mathscr{X}_\ell,\mathscr{B}_{u_\ell}$ $(0\le\ell\le q-1)$ 如 (3.3) 式所示, $\mathscr{X}_\ell$ 的奇异值分解如 (3.4) 式所示. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则 $\varphi(X,B)\in\varphi$ 非空, 并且 A 能表示为

$$A=\mathbb{P}\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{q-1}\mathbb{F}_\ell\bigg)\mathbb{Q}^*,$$

其中

$$F_\ell=\mathscr{B}_{u_\ell}\mathscr{X}_\ell^\dagger+K_\ell(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}_\ell^\dagger),\quad \forall K_\ell\in\mathbb{C}^{m_{u_\ell}\times t_\ell n_{u_\ell}}\quad (0\le\ell\le q-1), \tag{3.23}$$

且有

$$\rho(X,B)^2=\sum_{\ell=0}^{q-1}\|\mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^\dagger\mathscr{X}_\ell)\|^2. \tag{3.24}$$

推论 3.12 给定 $X\in\mathbb{C}^{n\times v}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times v}$. 若 P 和 Q 均为酉矩阵, 则存在 (R,S_σ)- 交换矩阵使得 $AX=B$ 成立当且仅当

$$\sum_{\ell=0}^{q-1}\|\mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^\dagger\mathscr{X}_\ell)\|^2=0,$$

也就是说 $\mathscr{B}_{u_\ell}(I_v-\mathscr{X}_\ell^\dagger\mathscr{X}_\ell)=\mathbf{0}$. 此时, A 的表达式为

$$A=\mathbb{P}\bigg(\bigoplus_{\ell=0}^{q-1}\mathscr{B}_{u_\ell}\mathscr{X}_\ell^\dagger+K_\ell(I_{t_\ell n_{u_\ell}}-\mathscr{X}_\ell\mathscr{X}_\ell^\dagger)\bigg)\mathbb{Q}^*,\quad \forall K_\ell\in\mathbb{C}^{m_{u_\ell}\times t_\ell n_{u_\ell}}\quad (0\le\ell\le q-1).$$

4 结论

基于 (R,S_σ)- 交换矩阵的定义及其分块结构, 本文首先讨论了 (R,S_σ)- 交换阵的一般性, 说明众多特殊结构矩阵均可视为 (R,S_σ)- 交换阵的特例. 进而从一般性角度给出了线性矩阵方程

组 $AX=B, YA=D$ 的最小二乘 (R,S_σ)- 交换解和最佳逼近解的具体解析表达式. 并在方程组相容情况下, 给出了相容解存在的充要条件及其解表达式.

值得注意的是, 对于一些复杂的线性矩阵方程, 如广义 Sylvester 方程 $\sum_{i=1}^{N} A_iXB_i=C$ 或方程组, (R,S_σ)- 交换阵最小二乘解或相容情形下的相容 (R,S_σ)- 交换解, 其解析表达式是无法给出的. 这时如何从迭代层面给出有效求解算法, 值得进一步探讨, 这也是下一步的研究工作, 我们将另文给出.

致谢 由衷感谢评审专家对本文提出的非常宝贵的评审意见. 本文修稿工作是通讯作者在 Southern Illinois University Carbondale 访学期间完成.

参 考 文 献

[1] Andrew A. L., Centrosymmetric matrices, *SIAM Rev.*, 1998, **40**: 697–698.

[2] Chen H. C., Generalized reflexive matrices: special properties and applications, *SIAM J. Matrix Anal. A*, 1998, **19**: 140–153.

[3] Fasino D., Circulative properties revisited: algebraic properties of a generalization of cyclicmatrices, *Italian J. Pure Appl. Math.*, 1998, **4**: 33–43.

[4] Li J. F., Hu X. Y., Procrustes problems and associated approximation problems for matrices with k-involutory symmetries, *Linear Algebra Appl.*, 2011, **434**: 820–829.

[5] Li J. F., Hu X. Y., Zhang L., Inverse and optimal approximation problems and perturbation analysis for (R,S,μ)-symmetric (in Chinese), *Math. Numer. Sin.*, 2012, **34**: 25–36.

[6] Peng Z. Y., Hu X. Y., The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX=B$, *Linear Algebra Appl.*, 2003, **375**: 147–155.

[7] Trench W. F., Characterization and properties of (R,S_σ)-commutative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2012, **436**: 4261–4278.

[8] Trench W. F., Characterization and properties of (R,S)-symmetric, (R,S)-skewsymmetric, and (R,S)-conjugatematrices, *SIAM J. Matrix Anal. A*, 2005, **26**: 748–757.

[9] Trench W. F., Characterization and properties of matrices with k-involutory symmetries, *Linear Algebra Appl.*, 2008, **429**: 2278–2290.

[10] Trench W. F., Characterization and properties of matrices with k-involutory symmetries II, *Linear Algebra Appl.*, 2010, **432**: 2782–2797.

[11] Trench W. F., Minimization problems for (R,S)-symmetric and (R,S)-skew symmetric matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2004, **389**: 23–31.

[12] Trench W. F., Characterization and properties of matrices with generalized symmetry or skew symmetry, *Linear Algebra Appl.*, 2004, **377**: 207–218.

[13] Trench W. F., Inverse eigenproblems and associated approximation problems formatrices with generalized symmetry or skew symmetry, *Linear Algebra Appl.*, 2004, **380**: 199–211.

[14] Trench W. F., Inverse problems for unilevel block α-circulants, *Numer. Linear. Algebr.*, 2011, **20**: 349–356.

[15] Trench W. F., Properties of unilevel block circulants, *Linear Algebra Appl.*, 2009, **430**: 2012–2025.

[16] Xu W. R., Chen G. L., The solutions to linear matrix equations $AX=B$, $YA=D$ with k-involutory symmetries, *Comput. Math. Appl.*, 2017, **73**: 1741–1759.

[17] Xu W. R., Chen G. L., Gong Y., Procrustes problems and inverse eigenproblems for multilevel block α-circulants, *Numer. Linear. Algebr.*, 2016, **23**: 906–930.

[18] Zhou F. Z., Hu X. Y., Zhang L., The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of centro-symmetric matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2003, **364**: 147–160.

[19] Zhou F. Z., The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of reflexive matrices, *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, **188**: 180–189.

[20] Zhang J. C., Zhou S. Z., Hu X. Y., The (P,Q) generalized reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX=B$, *Appl. Math. Comput.*, 2009, **209**: 254–258.