第62卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0795-14 **文献标识码: A**

多复变中正规权 Zygmund 空间上的几个性质

黎深莲 张学军

湖南师范大学数学与统计学院 长沙 410006
E-mail: 201710100077@smail.hunnu.edu.cn; xuejunttt@263.net

摘 要 本文讨论了多复变中单位球上正规权 Zygmund 空间 $Z_\mu(B)$ 的一些性质. 首先给出了 $Z_\mu(B)$ 函数的一种积分表示, 接着证明了 $Z_\mu(B)$ 是正规权 Bergman 空间 $A^1_\nu(B)$ 的对偶空间, 其对偶对按如下形式给出:

$$\langle f,g\rangle=\lim_{\rho\to1^-}\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\quad(f\in A^1_\nu(B),\,g\in Z_\mu(B)),$$

其中 $\nu(\rho)=(1-\rho^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(\rho)$ $(0\le\rho<1)$ 并且 $\beta>\max\{0,b-1\}$. 最后作为积分表示和对偶的一个应用, 作者给出了 $Z_\mu(B)$ 中每个函数的一个原子分解.

关键词 正规权 Zygmund 空间; 积分表示; 对偶; 原子分解; 单位球
MR(2010) 主题分类 32A37
中图分类 O174.56

Several Properties on the Normal Weight Zygmund Space in Several Complex Variables

Shen Lian LI Xue Jun ZHANG

College of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410006*, P. R. China*
E-mail: 201710100077*@smail.hunnu.edu.cn*; *xuejunttt@*263*.net*

Abstract In this paper, the authors investigate some properties of the normal weight Zygmund space $Z_\mu(B)$ in several complex variables. Firstly, the authors establish an integral representation of function in $Z_\mu(B)$. Secondly, the authors show that $Z_\mu(B)$ can be identified with the dual space of the normal weight Bergman space $A^1_\nu(B)$ under the integral pairing

$$\langle f,g\rangle=\lim_{\rho\to1^-}\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\quad(f\in A^1_\nu(B),\,g\in Z_\mu(B)),$$

收稿日期: 2018-05-29; 接受日期: 2019-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571104); 湖南省研究生科研创新资助项目 (CX2017B220)
通讯作者: 张学军

where $\nu(r) = (1-r^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(r)$ $(0 \le r < 1)$ and $\beta > \max\{0, b-1\}$. Finally, as an application of the integral representation and the dual, the authors give an atomic decomposition for every function in $Z_\mu(B)$.

Keywords normal weight Zygmund space; integral representation; duality; atomic decomposition; unit ball
MR(2010) Subject Classification 32A37
Chinese Library Classification O174.56

1 问题的引进和定义

设 $n \ge 2$, $\mathbf{C}^n$ 为 n 维复空间且 $B = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$. 用 $H(B)$ 表示 B 上全纯函数的全体. 设 dv 表示单位球 B 上的规范 Lebesgue 测度, 满足 $v(B) = 1$. 设 $\alpha > -1$, 定义 B 上的一个测度 $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha dv(z)$, 这里常数 c_α 满足 $v_\alpha(B) = 1$.

在本文中, 令 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ 和 $w = (w_1, \ldots, w_n)$, 记

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}.$$

$H(B)$ 中函数 f 的梯度 ∇f 和径向导数 Rf 分别定义为

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right), \quad Rf(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \langle \nabla f(z), \bar{z}\rangle.$$

本文将用记号 c、c'、c''、c''' 表示不依赖变量 z 和 w 的正的常数, 但可以和某些参数有关, 不同的地方可以代表不同的数. 记号 “$E \approx F$” 表示一种控制关系, 即存在常数 A_1 和 A_2, 使得 $A_1E \le F \le A_2E$. 令 $m = (m_1, \ldots, m_n)$ 表示多重指标, 其中 m_k $(k \in \{1, \ldots, n\})$ 是非负整数. 设实参数 α 和 γ, 满足 $n+\alpha$ 和 $n+\alpha+\gamma$ 都不是非负整数. $H(B)$ 中函数 f 其展开式设为

$$f(z) = \sum_{|m|\ge 0} a_m z^m \quad (z \in B),$$

这里 $|m| = m_1 + \cdots + m_n$ 以及 $z^m = z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$. 两个线性算子 $R^{\alpha,\gamma}$ 和 $R_{\alpha,\gamma}$ 分别定义如下:

$$R^{\alpha,\gamma} f(z) = \sum_{|m|\ge 0} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha)}\, a_m z^m,$$

$$R_{\alpha,\gamma} f(z) = \sum_{|m|\ge 0} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+\gamma)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\,\Gamma(n+1+|m|+\alpha+\gamma)}\, a_m z^m.$$

把 $[0,1)$ 上一个正的连续函数 μ 称为正规函数是指: 存在常数 $0 < a < b$ 和 $r_0 \in [0,1)$, 使得

(i) $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^a}$ 在 $[r_0, 1)$ 上递减;

(ii) $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^b}$ 在 $[r_0, 1)$ 上递增.

例如 $\mu(r) = (1-r)^\alpha \log^\beta \frac{\mathrm{e}}{1-r}$ $(\alpha > 0)$, $\mu(r) = \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{kr^{2k-2}}{\log^3(k+1)}\right)^{-1}$,

$$\mu(r) = \begin{cases} \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}(1-r)^{1/2}, & 1 - \dfrac{1}{n} \le r < 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right), \\ \dfrac{(2n)!!(n+1)}{(2n+1)!!}(1-r)^{3/2}, & 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) \le r < 1 - \dfrac{1}{n+1}, \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, 都是这类正规函数.

不失一般性, 本文设 $r_0=0$. 下文中的 a 和 b 总是表示由 μ 给出的两个参数.

设 D 是 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘. 如果 $f\in H(D)$ 且

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f''(z)|<\infty,$$

称函数 f 属于 Zygmund 空间. 实际上, $1-|z|^2$ 是一种权函数, 后来, 权函数被推广为 $(1-|z|^2)^\alpha$ $(\alpha>0)$. 本文将进一步推广权函数 $(1-|z|^2)^\alpha$ 到正规权 $\mu(|z|)$, 并且将单复变量推广到多复变量.

我们知道 Lipschitz 空间 Λ_α $(0<\alpha<1)$ 是按如下方式定义: $f\in H(B)$ 且

$$\sup\left\{\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\alpha}: z,w\in B \text{ 且 } z\neq w\right\}<\infty.$$

那么, 当 $\alpha\to1^-$ 时如何定义上述空间呢? 在文 [1] 中, 作者是利用 Zygmund 空间代替该极限空间. 本文中将 Zygmund 空间推广到了正规权 Zygmund 空间. 就正规权 Zygmund 空间而言, 在文 [2] 中, 当 $n>1$ 时, 给出了多种范数表示, 并且它们之间是等价的.

接下来具体给出正规权 Zygmund 空间及本文涉及的一些其他空间的定义.

定义 1.1 令 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数. 单位球 B 上的全纯函数 f 属于正规权 Zygmund 空间 $Z_\mu(B)$, 如果 f 满足

$$\|f\|_\mu=\sup_{z\in B}\mu(|z|)\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z_j\partial z_k}(z)\right|<\infty.$$

那么, $Z_\mu(B)$ 依范数

$$\|f\|_{Z_\mu(B)}=|f(0)|+\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial z_k}(0)\right|+\|f\|_\mu$$

构成一个 Banach 空间. 此外, 我们设

$$\|f\|_{Z_{\mu,1}}=|f(0)|+\sup_{z\in B}\mu(|z|)|R^{(2)}f(z)|,\quad \|f\|_{Z_{\mu,2}}=|f(0)|+\sup_{z\in B}\mu(|z|)|\nabla(Rf)(z)|.$$

以下将用这些范数. 文 [2, 定理 3.1] 表明 $\|f\|_{Z_\mu}\approx\|f\|_{Z_{\mu,1}}\approx\|f\|_{Z_{\mu,2}}$.

定义 1.2 设 $p>0$, μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数. 称 f 属于 $L^p_\mu(B)$ 空间, 如果 f 是 B 上的 Lebesgue 可测函数且

$$\|f\|_{L^p_\mu(B)}=\left(\int_B|f(z)|^p\ \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\right)^{\frac1p}<\infty.$$

$A^p_\mu(B)=L^p_\mu(B)\cap H(B)$ 称为 μ-Bergman 空间. 特别地, 当 $\mu(r)=(1-r^2)^{\frac1p}$ 时, $A^p_\mu(B)$ 就是 Bergman 空间 $A^p(B)$. 当 $\mu(r)=(1-r^2)^{\frac{\alpha+1}{p}}$ $(\alpha>-1)$ 时, $A^p_\mu(B)$ 就是加权 Bergman 空间 A^p_α; 当 $p\geq1$ 时, $A^p_\mu(B)$ 依范数 $\|\cdot\|_{L^p_\mu(B)}$ 构成一个 Banach 空间; 当 $0<p<1$ 时, $A^p_\mu(B)$ 按距离 $\|\cdot\|^p_{L^p_\mu(B)}$ 构成一个完备的距离空间.

定义 1.3 设 t 是实参数, 且 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数. 称 f 属于正规权 Bers 空间 X_t, 如果 $f\in H(B)$, 使得

$$\|f\|_{X_t}=\sup_{z\in B}\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}|f(z)|<\infty.$$

显然, X_t 依 $\|\cdot\|_{X_t}$ 构成一个 Banach 空间.

定义 1.4 序列空间 l^∞ 定义如下:

$$l^\infty = \Big\{\{c_k\} : \|\{c_k\}\|_\infty = \sup_{k\in\{1,2,\dots\}} |c_k| < \infty, \text{ 其中所有 } c_k \text{ 是复数}\Big\}.$$

设 α 为实参数, 称 f 属于 $L^\infty(B, dv_\alpha)$, 如果 f 是 B 上 Lebesgue 可测的函数且

$$\|f\|_\infty = \inf_{v_\alpha(E)=0} \sup_{z\in B-E} |f(z)| < \infty.$$

实际上, Lebesgue 可测的函数 $f \in L^\infty(B, dv_\alpha)$ 当且仅当存在 $E_f \subset B$, 使得 $v(E_f) = 0$ 且

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in B-E_f} |f(z)| < \infty.$$

本文记 $H^\infty(B) = L^\infty(B, dv_\alpha) \cap H(B)$.

Zygmund 空间是一类经典的函数空间, 一直被不少数学工作者所研究, 如文 [1–12]. 正规权 Zygmund 空间是 Zygmund 空间的推广, 本文研究正规权 Zygmund 空间 $Z_\mu(B)$ 的几个性质:

首先, 建立 $Z_\mu(B)$ 空间中函数的如下积分表示:

$$f(z) = \int_B \frac{h(w)dv_t(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t-1}} \quad (h \in L^\infty(B),\, z \in B).$$

其次, 证明 $Z_\mu(B)$ 空间等同于正规权 Bergman 空间 $A^1_\nu(B)$ 的对偶空间, 对偶关系如下:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{\rho\to 1^-} \int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z) \quad (f \in A^1_\nu(B),\, g \in Z_\mu(B)),$$

其中

$$\nu(r) = (1-r^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(r) \quad (0 \le r < 1), \text{ 且 } \beta > \max\{0, b-1\}.$$

最后, 作为积分表示和对偶的一个应用, 我们给出了 $Z_\mu(B)$ 空间中每个函数的原子分解. 而原子分解和对偶空间一直被不少数学工作者所研究, 如文 [13–23]. 在文 [13] 中, Coifman 和 Rochberg 在加权 Bergman 空间 A^p_α 上了讨论这些问题. 在文 [1] 中, Zhu 给出了如下定理:

定理 A 设 $\gamma > 0$, $t > \max\{n, n+\gamma-1\}$, 则存在序列 $\{a_k\} \subset B$, 使得 γ-Bloch 空间的函数恰好可以表示成

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k \frac{(1-|a_k|^2)^{t+1-\gamma}}{(1-\langle z,a_k\rangle)^t}, \quad \text{其中 } \{c_k\} \in l^\infty.$$

在文 [23] 中, 将定理 A 推广到了 μ-Bloch 空间. 在文 [1] 中, Zhu 也给出了 Zygmund 空间函数的原子分解:

定理 B 设 $t > 0$, 则存在序列 $\{a_k\} \subset B$, 使得 Zygmund 空间的函数恰好可以表示成

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k \frac{(1-|a_k|^2)^{t+n}}{(1-\langle z,a_k\rangle)^{t+n-1}}, \quad \text{其中 } \{c_k\} \in l^\infty.$$

从函数阶的增长角度看, 在实际应用中会遇到各种阶, 因此讨论抽象的权函数会有更普遍的意义. 如果我们将具体的权函数 $(1-|z|^2)^\alpha$ 推广到抽象的 $\mu(|z|)$, 那么在证明原子分解的过程中要使用的方法和手段都要重新进行考虑. 为了得到正规权 Zygmund 空间函数的原子分解, 我们首先要建立 $Z_\mu(B)$ 函数的积分表示. 接着, 给出正规权 Bergman 空间 $A^1_\nu(B)$ 在某个对偶对下的对偶空间恰好是正规权 Zygmund 空间 $Z_\mu(B)$, 这里

$$\nu(\rho) = (1-\rho^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(\rho) \quad (0 \le \rho < 1) \text{ 且 } \beta > \max\{0, b-1\}.$$

最后, 我们才给出 $Z_\mu(B)$ 函数的原子分解. 即使是单复变量, 这也是新的.

2 一些引理和证明

设 $z\in B$ 和 $\rho>0$, 令 $D(z,\rho)=\{w:w\in B$ 且 $\beta(w,z)<\rho\}$ 是以 z 为中心以 ρ 为半径的 Bergman 球, 这里 $\beta(\cdot,\cdot)$ 是 Bergman 度量 [1]. 对 $0<r\le 1$, 设 η 表示比 r 小得多的正半径. 固定 $D(0,r)$ 中的有限序列 $\{z_1,\dots,z_J\}$, 使得 $\{D(z_j,\eta)\}$ 覆盖 $D(0,r)$, 并且这些 $\{D(z_j,\frac{\eta}{4})\}$ 互不相交. 每个集合 $D(z_j,\frac{\eta}{4})\cap D(0,r)$ 扩充成一个 Borel 集 E_j, 使得

$$E_j\subset D(z_j,\eta)\ \text{ 且 }\ D(0,r)=\bigcup_{j=1}^{J}E_j$$

是互不相交的并. 对于 $j\in\{1,\dots,J\}$ 和 $k\in\{1,2,\dots\}$, 令 $a_{kj}=\varphi_{a_k}(z_j)$ 和 $D_{kj}=D_k\cap\varphi_{a_k}(E_j)$. 那么, 对所有的 $j\in\{1,\dots,J\}$ 和 $k\in\{1,2,\dots\}$, 有 $a_{kj}\in D(a_k,r)$. 由于对所有的 k, $D_k=\bigcup_{k=1}^{J}D_{kj}$ 是互不相交的并, 因而得到互不相交的分解

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{J}D_{kj}.$$

这些知识在最后讨论原子分解时要用到. 为了证明主要的结果, 先给出一些引理.

引理 2.1 [1] 对于任意的 $0<r\le 1$, 存在正整数 N 和序列 $\{a_k\}\subset B$ 以及对每个 $k\in\{1,2,\dots\}$ 存在 Lebesgue 可测集 D_k 满足下列条件:

(1) $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}D(a_k,r)=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k$.

(2) 当 $k\ne j$ 时, $D_k\bigcap D_j=\emptyset$ $(j,k\in\{1,2,\dots\})$.

(3) 对每个 $k\in\{1,2,\dots\}$ 都有 $D(a_k,\frac{r}{4})\subset D_k\subset D(a_k,r)$.

(4) B 中的每个点 z 至多属于 N 个 $D(a_k,4r)$.

证明 见文 [1, 定理 2.23 和引理 2.28].

引理 2.2 [17] 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, $0<r\le 1$ 且 $w\in B$, 则有如下结论:

(1) 当 $z\in D(w,r)$ 时, $D(z,r)\subset D(w,2r)$;

(2) 当 $z\in B$ 时, $\frac{\mu(|z|)}{\mu(|w|)}\le\big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\big)^a+\big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\big)^b$;

(3) 当 $z\in D(w,r)$ 时, 存在与 r 无关的常数 $c>0$, 使得

$$\frac{1}{c}\mu(|w|)\le\mu(|z|)\le c\mu(|w|)\ \text{ for any } z\in D(w,r).$$

证明 这些结果可由文 [17, 引理 2.2] 得到.

引理 2.3 设 $t>2-a$, μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数. 当 $\gamma>t+b-3$ 时, 如果 $f\in X_t$, 则存在与 r 和 η 无关的常数 $c>0$, 使得 $\|f-Sf\|_{X_t}\le c\sigma\|f\|_{X_t}$, 这里

$$\sigma=\eta+\frac{\tanh\eta}{\tanh r},\quad Sf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{J}\frac{v_\gamma(D_{kj})f(a_{kj})}{(1-\langle z,a_{kj}\rangle)^{n+\gamma+1}}\quad(z\in B).$$

证明 当 $\gamma>t+b-3$ 时, 在文 [1, 引理 2.29] 中取 $\alpha=0$ 和 $p=1$, 则存在与 r 和 η 无关的常数 $c'>0$, 使得

$$|f(z)-Sf(z)|\le c'\sigma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-|a_k|^2)^\gamma}{|1-\langle z,a_k\rangle|^{n+\gamma+1}}\int_{D(a_k,2r)}|f(w)|dv(w)\tag{2.1}$$

对一切的 $0<r\le 1$ 和 $z\in B$ 都成立. 由文 [24, (2.2) 式] 及文 [17, 引理 2.3] 知, 当 $w\in D(a_k,2r)$ 和 $z\in B$ 时,

$$\frac{1-\tanh 2}{1+\tanh 2}\le\frac{1-|w|^2}{1-|a_k|^2}\le\frac{1+\tanh 2}{1-\tanh 2}\quad \text{且}\quad A^{-1}\le\frac{|1-\langle z,a_k\rangle|}{|1-\langle z,w\rangle|}\le A. \tag{2.2}$$

再根据 (2.1), (2.2) 式和引理 2.1, 存在与 r 和 η 无关的常数 $c''>0$, 使得

$$\begin{aligned}|f(z)-Sf(z)|&\le c''\sigma\sum_{k=0}^{\infty}\int_{D(a_k,2r)}\frac{(1-|w|^2)^{\gamma}|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}dv(w)\\&\le c''\sigma N\int_B\frac{(1-|w|^2)^{\gamma}|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}dv(w)\end{aligned}\tag{2.3}$$

对一切 $z\in B$ 都成立. 结合 (2.3) 式和引理 2.2, 以及文 [22, 命题 1.4.10], 可得

$$\begin{aligned}&\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}|f(z)-Sf(z)|\\&\quad\le c''\sigma N\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}\int_B\frac{(1-|w|^2)^{\gamma}|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}dv(w)\\&\quad\le c''\sigma N\|f\|_{X_t}(1-|z|^2)^{t-2}\int_B\frac{\mu(|z|)(1-|w|^2)^{\gamma}dv(w)}{\mu(|w|)(1-|w|^2)^{t-2}|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}\\&\quad\le c''\sigma N\|f\|_{X_t}(1-|z|^2)^{t-2+a}\int_B\frac{(1-|w|^2)^{\gamma-t+2-a}dv(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}\\&\qquad+c''\sigma N\|f\|_{X_t}(1-|z|^2)^{t-2+b}\int_B\frac{(1-|w|^2)^{\gamma-t+2-b}dv(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\gamma+1}}\\&\quad\le c\sigma\|f\|_{X_t}\Rightarrow\|f-Sf\|_{X_t}\le c\sigma\|f\|_{X_t}.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.4 [1] 设 $r>0$, $p>0$ 和 $\alpha>-1$, 则存在常数 $c>0$, 使得

$$|f(z)|^p\le\frac{c}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p dv_{\alpha}(w)$$

对一切 $f\in H(B)$ 和一切 $z\in B$ 成立.

证明 见文 [1, 引理 2.24].

引理 2.5 设 $p>0$, μ 为 $[0,1)$ 上的正规函数, 则 $H^{\infty}(B)$ 在 $A^p_{\mu}(B)$ 中稠密.

证明 事实上, $A^p_{\mu}(B)$ 是特殊的混合模空间. 由文 [18, 命题 2.3] 知 $H^{\infty}(B)$ 在混合模空间中稠密. 于是引理得证.

3 主要结论及证明

首先, 我们给出正规权 Zygmund 空间函数的一种积分表示. 同时, 也给出空间 $Z_{\mu}(B)$ 一种新的等价刻画 (推论 3.3).

定理 3.1 设 μ 为 $[0,1)$ 上的正规函数, $t>\max\{b-1,0\}$, 则 $f\in Z_{\mu}(B)$ 当且仅当存在 $h\in L^{\infty}(B)$, 使得

$$f(z)=\int_B\frac{h(w)dv_t(w))}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t-1}}\quad(z\in B). \tag{3.1}$$

进一步, 可以得到 $\|f\|_{Z_{\mu}(B)}\approx\inf\{\|h\|_{\infty}:h\text{ 满足 }(3.1)\}$, 并且控制常数与 f 无关.

证明 对一切 $z\in B$, 由文 [2, 定理 3.1] 可知, 如果 $f\in Z_\mu(B)$, 则

$$\mu(|z|)|R^{(2)}f(z)|\le c\|f\|_{Z_\mu(B)}. \tag{3.2}$$

进一步, 我们有

$$\begin{aligned}\mu(|z|)|Rf(z)|&=\mu(|z|)\left|\int_0^1\frac{R^{(2)}f(\rho z)}{\rho}d\rho\right|=\mu(|z|)\left|\int_0^1\langle\nabla(Rf)(\rho z),\overline{z}\rangle d\rho\right|\\&\le c'|z|\left\{\int_0^1\frac{\mu(|z|)}{\mu(\rho|z|)}d\rho\right\}\|f\|_{Z_\mu(B)}\le c'|z|\cdot\|f\|_{Z_\mu(B)},\end{aligned} \tag{3.3}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mu(|z|)|f(z)|&=\mu(|z|)\left|f(0)+\int_0^1\frac{Rf(\rho z)}{\rho}d\rho\right|\\&\le\mu(0)\|f\|_{Z_\mu(B)}+c'|z|\cdot\|f\|_{Z_\mu(B)}\int_0^1\frac{\mu(|z|)}{\mu(\rho|z|)}d\rho\\&\le c''\|f\|_{Z_\mu(B)}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们取函数

$$h(z)=\mu(|z|)\left\{f(z)+\left(\frac{1}{n+t}+\frac{1}{n+t-1}\right)Rf(z)+\frac{R^{(2)}f(z)}{(n+t)(n+t-1)}\right\}.$$

由 (3.2)–(3.4) 式, 可得 $h\in L^\infty(B)$ 且 $\|h\|_\infty\le c\|f\|_{Z_\mu(B)}$.

如果 $t>\max\{b-1,0\}$ 时, 则 $h/\mu\in L^1(B,dv_t)$. 令

$$f(z)=\sum_{|m|\ge0}a_mz^m.$$

由文 [1, (1.21) 和 (1.23) 式], 可得

$$\begin{aligned}&\int_B\frac{h(w)dv_t(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t-1}}\\&\quad=\int_B\left\{\sum_{|l|\ge0}\frac{\Gamma(n+t-1+|l|)}{\Gamma(n+t-1)l!}z^l\overline{w}^l\right\}\\&\quad\quad\times\left\{\sum_{|m|\ge0}\left[1+\left(\frac{1}{n+t}+\frac{1}{n+t-1}\right)|m|+\frac{|m|^2}{(n+t)(n+t-1)}\right]a_mw^m\right\}dv_t(w)\\&\quad=\sum_{|m|\ge0}\left\{\frac{\Gamma(n+t+1+|m|)}{\Gamma(n+t+1)m!}\int_B|w^m|^2dv_t(w)\right\}a_mz^m\\&\quad=\sum_{|m|\ge0}a_mz^m=f(z).\end{aligned}$$

反过来, 如果存在 $h\in L^\infty(B)$, 使得

$$f(z)=\int_B\frac{h(w)dv_t(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t-1}}\quad(z\in B),$$

因而 $f\in H(B)$. 再通过 $h/\mu\in L^1(B,dv_t)$ 可得

$$Rf(z)=\int_B\frac{(n+t-1)\langle z,w\rangle h(w)dv_t(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}.$$

当 $t > b-1$ 时, 由文 [22, 命题 1.4.10 和引理 2.2], 有

$$\begin{aligned}\mu(|z|)|\nabla(Rf)(z)| &= \mu(|z|)\left|\int_B \frac{(n+t-1)h(w)\overline{w}}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t}}dv_t(w)+\int_B \frac{(n+t-1)(n+t)h(w)\overline{w}}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+1}}dv_t(w)\right| \\ &\le c\|h\|_\infty \int_B \frac{(1-|z|^2)^a(1-|w|^2)^{t-a}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1}}dv(w) \\ &\quad + c\|h\|_\infty \int_B \frac{(1-|z|^2)^b(1-|w|^2)^{t-b}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+t+1}}dv(w) \\ &\le c'\|h\|_\infty.\end{aligned}$$

另一方面,

$$|f(0)| = \left|\int_B \frac{h(w)dv_t(w)}{\mu(|w|)}\right| \le \frac{c_t\|h\|_\infty}{\mu(0)}\int_B (1-|w|^2)^{t-b}dv(w) \le c''\|h\|_\infty.$$

结合文 [2, 定理 3.1], 则 $f \in Z_\mu(B)$ 且 $\|f\|_{Z_\mu(B)} \le c'''\|h\|_\infty$.

本定理证毕.

推论 3.2 每个多项式都是 $Z_\mu(B)$ 的一个点乘子.

证明 不失一般性, 我们只需要证明 z^m 是 $Z_\mu(B)$ 的点乘子, 其中 $m = (m_1, \ldots, m_n)$. 对任意的 $f \in Z_\mu(B)$, 记 $G(z) = z^m f(z)$. 通过简单的计算, 我们得到

$$R^{(2)}G(z) = |m|^2 z^m f(z) + 2|m|z^m Rf(z) + z^m R^{(2)}f(z).$$

结合文 [2, 定理 3.1 和 (3.2)–(3.4) 式], 则 $G \in Z_\mu(B)$.

推论 3.3 设 $t > 2-a$. 如果实参数 s 满足 $n+s$ 和 $n+s+t$ 都不是负整数, 则 $f \in Z_\mu(B)$ 当且仅当 $\varphi(z) = \mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}R^{s,t}f(z)$ 在 B 上有界. 进一步还有 $\|f\|_{Z_\mu(B)} \approx \|\varphi\|_\infty$.

证明 如果 $f \in Z_\mu(B)$, 由定理 3.1 可知, 存在 $g \in L^\infty(B)$, 使得

$$f(z) = \int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta-1}}dv_\beta(w) \quad (z \in B),$$

这里 $\beta > \max\{0, b-1\}$.

取 N 为充分大的正整数, 且令 $\beta = s+N+2$. 结合文 [1, 引理 2.18], 则存在单变量多项式 h, 使得

$$R^{s,t}f(z) = \int_B \frac{g(w)h(\langle z,w\rangle)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta+t-1}}dv_\beta(w).$$

于是, 由引理 2.2 及文 [22, 命题 1.4.10 和定理 3.1], 我们有

$$\begin{aligned}&\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}|R^{s,t}f(z)| \\ &\quad\le c\|g\|_\infty(1-|z|^2)^{t-2}\int_B \frac{\mu(|z|)}{\mu(|w|)|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta+t-1}}dv_\beta(w) \\ &\quad\le cc_\beta\|g\|_\infty(1-|z|^2)^{t-2}\int_B \left\{\left(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\right)^a + \left(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\right)^b\right\}\frac{(1-|w|^2)^\beta dv(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta+t-1}} \\ &\quad\le c'\|g\|_\infty \le c''\|f\|_{Z_\mu(B)} \\ &\quad\Rightarrow \|\varphi\|_\infty \le c''\|f\|_{Z_\mu(B)}.\end{aligned}$$

另一方面, 如果 $\varphi(z) = \mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}R^{s,t}f(z)$ 在 B 上有界, 则不难验证 $R^{s,t}f \in A^1_{\beta+t-2}(B)$. 又由文 [1, 定理 2.2], 我们有

$$\begin{aligned}R^{s,t}f(z) &= \int_B \frac{R^{s,t}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta+t-1}}dv_{\beta+t-2}(w)\\ &= \frac{c_{\beta+t-2}}{c_\beta}\int_B \frac{\varphi(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta+t-1}}dv_\beta(w).\end{aligned}$$

由 $R^{s,t}$ 和 $R_{s,t}$ 的可逆性, 再结合文 [1, 引理 2.18], 得到

$$f(z) = \sum_m p_m(z)\int_B \frac{\varphi(w)\overline{w}^m}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta-1}}dv_\beta(w) \quad (z\in B),$$

这里是有限项求和且 $p_m(z)$ 是多项式. 由定理 3.1 和推论 3.2 知, 上述求和的每一项的积分表示都是 $Z_\mu(B)$ 中的函数. 于是 $\|f\|_{Z_\mu(B)} \le c\|\varphi\|_\infty$.

接下来, 讨论 $Z_\mu(B)$ 上的对偶问题. 众所周知, 对偶空间取决于所用的对偶对的选择.

定理 3.4 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, $\beta > \max\{b-1, 0\}$. 令 $\nu(\rho) = (1-\rho^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(\rho)$ $(0\le\rho<1)$, 则 $Z_\mu(B)$ 是 $A^1_\nu(B)$ 的对偶空间, 其对偶对按如下确定:

$$\langle f,g\rangle = \lim_{\rho\to 1^-}\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z) \quad (f\in A^1_\nu(B),\ g\in Z_\mu(B)).$$

证明 根据定理 3.1, 如果 $g\in Z_\mu(B)$, 则存在 $h\in L^\infty(B)$, 使得

$$g(z) = \int_B \frac{h(w)dv_\beta(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta-1}} \quad (z\in B). \tag{3.5}$$

对一切的 $f\in A^1_\nu(B)$ 和 $0\le\rho<1$, 由 (3.5) 式, Fubini 定理及文 [1, 命题 1.14 和定理 2.2], 我们能够得到

$$\begin{aligned}\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z) &= \int_B f(\rho z)\int_B \frac{\overline{h(w)}dv_\beta(w)dv_{\beta-1}(z)}{\mu(|w|)(1-\rho\langle w,z\rangle)^{n+\beta}}\\ &= \int_B \frac{\overline{h(w)}}{\mu(|w|)}\int_B \frac{f(\rho z)dv_{\beta-1}(z)}{(1-\rho\langle w,z\rangle)^{n+\beta}}dv_\beta(w)\\ &= \int_B \frac{\overline{h(w)}f(\rho^2 w)}{\mu(|w|)}dv_\beta(w).\end{aligned} \tag{3.6}$$

再根据全纯函数 f 的积分平均值的递增性和 (3.6) 式, 可得

$$\left|\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\right| \le \|h\|_\infty\|f\|_{L^1_\nu(B)}. \tag{3.7}$$

又由 (3.7) 式和定理 3.1, 我们有

$$\left|\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\right| \le c\|g\|_{Z_\mu(B)}\|f\|_{L^1_\nu(B)}.$$

于是, 根据 (3.6) 式和 Lebesgue 控制收敛原理, 可知极限

$$\lim_{\rho\to 1^-}\int_B f(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}g)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)$$

总是存在的, 这意味着 $|\langle f,g\rangle| \le c\|g\|_{Z_\mu(B)}\|f\|_{L^1_\nu(B)}$. 这表明每一个 $g\in Z_\mu(B)$ 诱导 $A^1_\nu(B)$ 上的一个有界线性泛函 F_g 且 $\|F_g\| \le c\|g\|_{Z_\mu(B)}$.

反之, 对任意 $f\in A^1_\nu(B)$ 和 $0\le\rho<1$, 记 $f_\rho(z)=f(\rho z)$, 那么 $f_\rho\in H^\infty(B)\subset A^1_{\beta-1}(B)$. 由文 [1, 定理 2.2], 我们有

$$f_\rho(z)=\int_B\frac{f_\rho(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta}}dv_{\beta-1}(w)\quad(z\in B).$$

对任意的 $w\in B$ 和任意的多重指标 m, 记

$$K_w(z)=\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta}}\quad 且\quad T_m(z)=z^m.$$

设 F 是 $A^1_\nu(B)$ 上的任一有界线性泛函. 利用展开式有

$$f_\rho(z)=\sum_{|m|\ge0}\left\{\frac{\Gamma(n+\beta+|m|)}{m!\Gamma(n+\beta)}\int_B f_\rho(w)\overline{w}^m dv_{\beta-1}(w)\right\}z^m,$$

则

$$\begin{aligned}F(f_\rho)&=\sum_{|m|\ge0}\left\{\frac{\Gamma(n+\beta+|m|)}{m!\,\Gamma(n+\beta)}\int_B f_\rho(w)\overline{w}^m dv_{\beta-1}(w)\right\}F(T_m)\\&=\int_B f_\rho(w)F(K_w)dv_{\beta-1}(w).\end{aligned}$$

令 $g_0(w)=\overline{F(K_w)}=\sum_{|m|\ge0}\frac{\Gamma(n+\beta+|m|)}{m!\Gamma(n+\beta)}\overline{F(T_m)}w^m$, 则 $g_0\in H(B)$.

记 $g=R_{\beta-2,1}g_0$, 则 $g\in H(B)$ 且

$$\begin{aligned}F(f_\rho)&=\lim_{r\to1^-}\int_B f_{r\rho}(w)\overline{g_0(rw)}dv_{\beta-1}(w)\\&=\lim_{r\to1^-}\int_B f_{r\rho}(w)\overline{(R_{\beta-2,1}g)(rw)}dv_{\beta-1}(w)=\langle f_\rho,g\rangle.\end{aligned}$$

于是 $F(f)=\lim_{\rho\to1^-}F(f_\rho)=\langle f,g\rangle$.

另一方面,

$$\begin{aligned}g(w)=R_{\beta-2,1}g_0(w)&=\sum_{|m|\ge0}\frac{\Gamma(n+\beta+|m|-1)}{m!\Gamma(n+\beta-1)}\overline{F(T_m)}w^m\\ \Rightarrow R^{(2)}g(w)&=\sum_{|m|\ge1}\frac{|m|^2\Gamma(n+\beta+|m|-1)}{m!\Gamma(n+\beta-1)}\overline{F(T_m)}w^m=\overline{F\left[R^{(2)}\left(\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta-1}}\right)\right]}.\end{aligned}$$

因 F 是 $A^1_\nu(B)$ 的有界线性泛函, 再由引理 2.2 及文 [22, 命题 1.4.10], 则

$$\begin{aligned}\mu(|w|)|R^{(2)}g(w)|&\le\mu(|w|)\|F\|\left\|R^{(2)}\left(\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\beta-1}}\right)\right\|_{L^1_\nu(B)}\\&\le c\|F\|\int_B\frac{\mu(|w|)\,(1-|z|^2)^\beta}{\mu(|z|)|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta+1}}dv(z)\\&\le c\|F\|\int_B\frac{(1-|w|^2)^a(1-|z|^2)^{\beta-a}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta+1}}dv(z)\\&\quad+c\|F\|\int_B\frac{(1-|w|^2)^b(1-|z|^2)^{\beta-b}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\beta+1}}dv(z)\\&\le c'\|F\|.\end{aligned}$$

另外, $|g(0)|=|F(1)|\le\|F\|\cdot\|1\|_{L^1_\nu(B)}\le c\|F\|$. 再根据文 [2, 定理 3.1], 可得 $\|g\|_{Z_\mu(B)}\le c''\|F\|$. 定理证毕.

最后, 我们给出 $Z_\mu(B)$ 函数的原子分解.

定理 3.5 设 μ 是 $[0,1)$ 上的正规函数, $\beta > \max\{b-1,0\}$, 则存在序列 $\{w_k\} \subset B$, 使得 $Z_\mu(B)$ 中的函数恰好表示成

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(1-|w_k|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|w_k|)(1-\langle z,w_k\rangle)^{n+\beta-1}} \quad (z \in B),$$

这里 $\{d_k\} \in l^\infty$, 且当 $Z_\mu(B)$ 看成 $A_\nu^1(B)$ 的对偶空间时, 级数依 $Z_\mu(B)$ 拓扑 $*$ 弱收敛, 其中 $\nu(\rho) = (1-\rho^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(\rho)$.

证明 我们取引理 2.3 中的序列 $\{a_{kj}\}$, $f(z)$ 可以改写成如下形式

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J} \frac{c_{kj}(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1-\langle z,a_{kj}\rangle)^{n+\beta-1}}, \tag{3.8}$$

这里 J 是一个固定的整数, $\{c_{kj}\} \in l^\infty$. 实际上, 记

$$w_1 = a_{11},\dots,w_J = a_{1J},\quad w_{J+1} = a_{21},\dots,w_{J+J} = a_{2J},\quad w_{2J+1} = a_{31},\dots;$$

$$d_1 = c_{11},\dots,d_J = c_{1J},\quad d_{J+1} = c_{21},\dots,d_{J+J} = c_{2J},\quad d_{2J+1} = c_{31},\dots$$

即可.

首先, 若 f 有表达式 (3.8), 先证明右边级数在 B 的任意紧子集上一致收敛.

实际上, 对一切的 $k \in \{1,2,\dots\}$ 和 $j \in \{1,2,\dots,J\}$, 根据文 [24, (2.2) 式] 以及 $a_{kj} \in D(a_k,r)$, 所以当 $z \in D(a_k,r)$ 时,

$$1-|z|^2 \approx 1-|a_k|^2 \approx 1-|a_{kj}|^2,\quad \mu(|z|) \approx \mu(|a_k|) \approx \mu(|a_{kj}|).$$

再结合引理 2.1 以及 $\{c_{kj}\} \in l^\infty$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J} \frac{|c_{kj}|(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)} &\le cJ\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D(a_k,r)} \frac{(1-|z|^2)^\beta}{\mu(|z|)}dv(z)\\ &\le cJ\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D(a_k,4r)} \frac{\nu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z)\\ &\le cJN\int_B \frac{\nu(|z|)}{1-|z|^2}dv(z) \le c'.\end{aligned} \tag{3.9}$$

这就意味着 (3.8) 式中的函数项级数在 B 中任意紧子集上一致收敛, 从而 $f \in H(B)$. 根据文 [1, 命题 1.14] 以及 (3.8), (3.9) 式, 可得

$$R^{\beta-2,1}f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J} \frac{c_{kj}(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1-\langle z,a_{kj}\rangle)^{n+\beta}} \quad (z \in B).$$

根据引理 2.5 知 $H^\infty(B)$ 在 $A_\nu^1(B)$ 中稠密. 对任意 $P \in H^\infty(B)$, 根据引理 2.1 和 $\{c_{k,j}\} \in l^\infty$, (2.2) 式及文 [22, 命题 1.4.10], 就有

$$\begin{aligned}\int_B |P(z)\overline{R^{\beta-2,1}f(z)}|dv_{\beta-1}(z) &\le c\int_B |R^{\beta-2,1}f(z)|dv_{\beta-1}(z)\\ &\le c'\int_B \frac{\nu(|w|)}{1-|w|^2}\left\{\int_B \frac{dv_{\beta-1}(z)}{|1-\langle w,z\rangle|^{n+\beta}}\right\}dv(w)\\ &\le c''\int_B \frac{\nu(|w|)}{1-|w|^2}\log\frac{2}{1-|w|^2}dv(w) \le c'''.\end{aligned}$$

根据 Lebesgue 控制收敛原理就有

$$\langle P,f\rangle=\lim_{\rho\to1^-}\int_B P(\rho z)\overline{R^{\beta-2,1}f(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)$$

总存在. 我们记

$$f_M(z)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}\frac{c_{kj}(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1-\langle z,a_{kj}\rangle)^{n+\beta-1}}.$$

根据文 [22, 命题 1.4.10] 以及全纯函数的积分平均值的单调性知

$$\begin{aligned}|\langle P,f_M-f\rangle|&=\lim_{\rho\to1^-}\left|\int_B P(\rho z)\overline{[R^{\beta-2,1}(f_M-f)](\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\right|\\&=\lim_{\rho\to1^-}\left|\sum_{k=M+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J}\frac{c_{kj}(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)}\int_B\frac{P(\rho z)}{(1-\langle\rho z,a_{kj}\rangle)^{n+\beta}}dv_{\beta-1}(z)\right|\\&\le c\sum_{k=M+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J}\frac{(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)}\log\frac{2}{1-|a_{kj}|^2}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

另外, 明显有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J}\frac{(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)}\log\frac{2}{1-|a_{kj}|^2}\le c'N\int_B\frac{\nu(|z|)}{1-|z|^2}\log\frac{2}{1-|z|^2}dv(z)<\infty.\tag{3.11}$$

通过 (3.10) 和 (3.11) 式, 可得

$$\lim_{M\to\infty}\langle P,f_M\rangle=\langle P,f\rangle.\tag{3.12}$$

对任意 $g\in A^1_\nu(B)$ 和 $0\le\rho<1$, 根据文 [1, 命题 1.14 和定理 2.2], 可得

$$\begin{aligned}&\int_B g(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}f_M)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\\&\quad=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}\frac{c_{kj}\ (1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)}\int_B\frac{g(\rho z)}{(1-\langle\rho a_{kj},z\rangle)^{n+\beta}}dv_{\beta-1}(z)\\&\quad=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}\frac{c_{kj}\ (1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)}\ g(\rho^2a_{kj}).\end{aligned}\tag{3.13}$$

对一切的 $k\in\{1,2,\ldots\}$ 和 $j\in\{1,2,\ldots,J\}$, 根据引理 2.2 可知, 当 $w\in D(a_{kj},r)$ 时, $\nu(|w|)\approx\nu(|a_{kj}|)$ 以及 $1-|w|^2\approx1-|a_{kj}|^2$. 再结合引理 2.4 就有

$$|g(\rho^2a_{kj})|\le\frac{c}{(1-|a_{kj}|^2)^n\nu(|a_{kj}|)}\int_{D(a_{kj},r)}\frac{|g(\rho^2w)|\nu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w).$$

因 $a_{kj}\in D(a_k,r)$, 当 $w\in D(a_{kj},r)$ 时,

$$\beta(w,a_k)\le\beta(a_{kj},w)+\beta(a_k,a_{kj})<2r.$$

故 $D(a_{kj},r)\subset D(a_k,2r)\subset D(a_k,4r)$. 结合 $\nu(|a_{kj}|)=(1-|a_{kj}|^2)^{\beta+1}\mu^{-1}(|a_{kj}|)$, 有

$$|g(\rho^2a_{kj})|\le\frac{c\mu(|a_{kj}|)}{(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}\int_{D(a_k,4r)}\frac{|g(\rho^2w)|\nu(|w|)}{1-|w|^2}dv(w).\tag{3.14}$$

再由 (3.13), (3.14) 式, 引理 2.1 以及全纯函数 g 的积分平均值递增性, 可得

$$\left|\int_B g(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}f_M)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\right| \le JNc'\|g\|_{L^1_\nu(B)},$$

这就意味着

$$\begin{aligned}|\langle g, f_M\rangle| &= \lim_{\rho\to 1^-}\left|\int_B g(\rho z)\overline{(R^{\beta-2,1}f_M)(\rho z)}dv_{\beta-1}(z)\right|\\ &\le Jc'N\|g\|_{L^1_\nu(B)} \Rightarrow \|f_M\| \le Jc'N.\end{aligned} \tag{3.15}$$

由泛函分析理论结合 (3.12), (3.15) 式可知 $\{f_M\}$ 依 $Z_\mu(B)$ 拓扑 $*$ 弱收敛到 f. 由定理 3.4 可得: f 诱导了 $A^1_\nu(B)$ 上的一个有界线性泛函 F 且 $\|F\| \le Jc'N$. 再结合定理 3.4, 于是有

$$f \in Z_\mu(B) \ \text{且}\ \|f\|_{Z_\mu(B)} \le c\|F\|.$$

反之, 对一切 $f \in Z_\mu(B)$, 我们要证明 f 恰好可以表示成 (3.8).

设 $t > 2-a$, 则 $\beta+t > t+b-1$. 在引理 2.3 和推论 3.3 中分别取 $\gamma = \beta+t-2$, $s = \beta-2$. 于是由推论 3.3 和引理 2.3 可得 $\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}R^{\beta-2,t}f(z)$ 在 B 上有界, 且

$$\|R^{\beta-2,t}f\|_{X_t} \le c\|f\|_{Z_\mu(B)}.$$

记 $h = R^{\beta-2,t}f$, 则 $f = R_{\beta-2,t}h$. 再由引理 2.3 得到 $\|I-S\| \le c\sigma$. 只要 σ 足够小就有 $\|I-S\| < 1$. 再根据泛函分析的知识可知, 算子 S 在 X_t 上可逆. 也就是存在 $h_1 \in X_t$, 使得 $h_1 = S^{-1}h$. 因此

$$\begin{aligned}h(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{J}\frac{v_\gamma(D_{kj})h_1(a_{kj})}{(1-\langle z, a_{kj}\rangle)^{n+\gamma+1}}\\ \Rightarrow f(z) &= R_{\beta-2,t}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{J}\frac{v_{\beta+t-2}(D_{kj})h_1(a_{kj})}{(1-\langle z, a_{kj}\rangle)^{n+\beta+t-1}}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{J}\frac{d_{kj}(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1-\langle z, a_{kj}\rangle)^{n+\beta-1}},\end{aligned}$$

这里

$$d_{kj} = \frac{\mu(|a_{kj}|)v_{\beta+t-2}(D_{kj})h_1(a_{kj})}{(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+1}}.$$

根据文 [1, 引理 1.24] 以及 $D_{kj} \subset D(a_{kj}, \eta)$, 我们有

$$v_{\beta+t-2}(D_{kj}) \le c(1-|a_{kj}|^2)^{n+\beta+t-1}.$$

又因为 S 是 X_t 上的有界可逆线性算子, 显然有

$$\begin{aligned}|d_{kj}| &\le c\mu(|a_{kj}|)(1-|a_{kj}|^2)^{t-2}|h_1(a_{kj})| \le c\|h_1\|_{X_t}\\ &\le c\|S^{-1}\|\cdot\|h\|_{X_t} = c\|S^{-1}\|\sup_{z\in B}\{\mu(|z|)(1-|z|^2)^{t-2}R^{\beta-2,t}f(z)\}\\ &\le c'\|f\|_{Z_\mu(B)}.\end{aligned}$$

于是 $\{d_{kj}\} \in l^\infty$.

定理证毕.

参 考 文 献

[1] Aleksandrov A., Function Theory in the Ball, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[2] Coifman R., Rochberg R., Representation theorems for holomorphic and harmonic function in L^p, *Asterisque*, 1980, **77**: 11–66.
[3] Duren P., Romberg B., Shields A., Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, *J. Reine Angew. Math.*, 1969, **238**: 32–60.
[4] Fang Z. S., Zhou Z. H., Extended Cesáro operators from generally weighted Bloch spaces to Zygmund space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **359**: 499–507.
[5] Han X., Xu H. M., Composition operators between Besov spaces and Zygmund spaces, *J. of Math. Study*, 2009, **42**: 310–319 (in Chinese).
[6] Li S. X., Stević S., Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **338**: 1282–1295.
[7] Li S. X., Stević S., Products of Volterra type operator and composition operator from H^∞ and Bloch spaces to Zygmund spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **345**: 40–52.
[8] Li S. X., Stević S., On an integral-type operator from ω-Bloch spaces to μ-Zygmund spaces, *Applied Math. & Comput.*, 2010, **215**: 4385–4391.
[9] Li S. X., Stević S., Products of composition and differentiation operators from Zygmund spaces to Bloch spaces and Bers spaces, *Appl. Math. & Comput.*, 2010, **217**: 3144–3154.
[10] Liu Y. M., Yu Y. Y., Weighted differentiation composition operators from mixed-norm to Zygmund spaces, *Numer. Funct. Anal. & Opt.*, 2010, **31**: 936–954.
[11] Luecking D., Representation and duality in weighted spaces of analytic functions, *Indiana Univ. Math. J.*, 1985, **34**: 319–336.
[12] Rochberg R., Semmes S., A decomposition theorem for BMO and applications, *J. Funct. Anal.*, 1986, **67**: 228–263.
[13] Rudin W., Function Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.
[14] Shi J. H., Duality and multipliers for mixed norm spaces in the ball (I), *Complex Variables*, 1994, **25**: 119–130.
[15] Stević S., On an integral operator from the Zygmund space to the Bloch type space on the unit ball, *Glasgow Math. J.*, 2009, **51**: 275–287.
[16] Wingren P., Characterization of the Zygmund space by shifted B-Sslines, *J. of Approx. Theory*, 2001, **111**: 256–266.
[17] Zhang X. J., Li M., Guan Y., The equivalent norms and the Gleason's problem on μ-Zygmund spaces in $\mathbf{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **419**: 185–199.
[18] Zhang X. J., Li M., Guan Y., et al., Atomic decomposition for μ-Bloch space in $\mathbf{C}^n$, *Sci. Sin. Math.*, 2015, **45**: 1677–1688 (in Chinese).
[19] Zhang X. J., Xiao J. B., Hu Z. J., The multipliers between the mixed norm space in $\mathbf{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **311**: 664–674.
[20] Zhang X. J., Xi L. H., Fan H. X., et al., Atomic decomposition of μ-Bergman space in $\mathbf{C}^n$, *Acta Math. Sci.*, 2014, **34B**: 779–789.
[21] Zhu K. H., Bergman and Hardy spaces with small exponents, *Pacific J. Math.*, 1994, **162**: 189–199.
[23] Zhu K. H., Duaility of Bloch spaces and norm convergence of Taylor series, *Michigan Math. J.*, 1991, **38**: 89–101.
[23] Zhu K. H., Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Springer-Verlag (GTM 226), New York, 2005.
[24] Zhu X., A new characterization of the generalized weighted composition operator from H^∞ into the Zygmund space, *Math. Ineq. & Appl.*, 2015, **18**: 1135–1142.