第62卷第5期 数学学报中文版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0777-06 **文献标识码: A**

非时齐马氏过程的 Liggett–Stroock 不等式

宋 娟

湖北经济学院信息管理与统计学院
湖北金融发展与金融安全研究中心 武汉 430205
E-mail: juansong@mail.bnu.edu.cn

张 铭

中国政法大学科学技术教学部 北京 102249
E-mail: zhangming0408@mail.bnu.edu.cn

摘 要 本文将时齐马氏过程中重要的代数不等式 Liggett–Stroock 不等式推广到非时齐马氏过程中, 建立了非时齐马氏过程的转移半群与 Liggett–Stroock 不等式之间的关系.

关键词 非时齐马氏过程; 泛函不等式; Liggett–Stroock 不等式
MR(2010) 主题分类 60J99
中图分类 O211.62

Liggett–Stroock Inequalities for Time Inhomogeneous Markov Processes

Juan SONG

School of Information Management and Statistics, Hubei University of Economics, Hubei Financial Development and Financial Security Research Center, Wuhan 430205*, P. R. China*
E-mail: *juansong@mail.bnu.edu.cn*

Ming ZHANG

Department of Science and Technology, China University of Political Science and Law, Beijing 102249*, P. R. China*
E-mail: *zhangming0408@mail.bnu.edu.cn*

Abstract We generalize the Liggett–Stroock inequality of the time homogeneous Markov process to the inhomogeneous Markov process, and establish the relationship between the transition semigroup of inhomogeneous Markov process and the Liggett–Stroock inequality.

收稿日期: 2018-03-13; 接受日期: 2019-04-16
通讯作者: 张铭

Keywords inhomogeneous Markov processes; functional inequalities; Liggett–Stroock inequalities

MR(2010) Subject Classification 60J99

Chinese Library Classification O211.62

1 引言和主要结果

泛函不等式是研究随机过程的一个重要工具, 它与概率论中的各个领域息息相关, 特别是在收敛及遍历性的研究中起着举足轻重的作用, 这在时齐的马氏过程中已经有了很多重要的应用. 在进行非时齐马氏过程的研究时, 我们也引入与推广. 在之前的研究中, 我们已经成功地将 Nash 不等式推广到了非时齐的马氏过程中, 并得到了相应的结论 [6]. 因此, 本文在此基础上将时齐情况下的另一重要不等式: Liggett–Stroock 不等式也推广到非时齐的马氏过程中来, 为后续的研究奠定理论基础.

在研究时齐马氏过程的收敛问题时, 曾遇到过很多不同的收敛方式, 其中代数式收敛就是一种非常重要的收敛方式, 它的收敛速度虽然不如经常研究的指数收敛快. 但作为一种典型的收敛形式, 在遍历理论中也有着举足轻重的作用 [5]. 虽然对于代数式收敛的研究仍然十分有限, 但已经发现有一种重要的不等式是与代数式收敛紧密相关的, 这就是 Liggett–Stroock 不等式 [2–4].

非时齐马氏过程与时齐马氏过程的最大区别在于其过程的复杂性, 不再是维持同一转移概率, 而是随着时间的变化不断发生改变, 这决定了非时齐马氏过程与时齐的马氏过程在过程发展上必然存在着很大的区别, 其中很关键的一点就是不变测度的问题. 在研究遍历的时齐马氏过程时, 不变测度是研究中的一个关键核心问题, 但在非时齐马氏过程中, 这个相对应的 “不变测度” 却往往并不存在, 或者说这时候的不变测度已经不再是 “不变” 的了, 而是根据时间的变化而变化的. 这意味着研究目标不再是稳定的而是随时变化的, 从而给研究工作带来了很大的困难.

为了陈述的方便, 先给出将要用到的非时齐时的一些符号及定义.

设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的非时齐连续时间 Markov 过程, 其 (非时齐) 转移概率为 $\{P_{s,t}(x,A),\, x\in E,\, A\in\mathcal{E},\, 0\leq s\leq t\}$. 令

$$P_{s,t}f(x)=\int_E f(y)P_{s,t}(x,dy),\quad f\in {}_b\mathscr{E}$$

为相应的非时齐转移半群 (${}_b\mathscr{E}$ 为有界可测函数集), 满足 $P_{s,r}P_{r,t}=P_{s,t}$, $0\leq s\leq r\leq t$, 且 $P_{t,t}=I$ (恒等算子), $P_{s,t}1=1$, $\forall\, 0<s\leq t$.

给定测度 μ_0, 记 $\mu_t=\mu_0P_{0,t}$. 显然, $\mu_t=\mu_sP_{s,t}$, $0\leq s\leq t$. 称 L_t 为转移半群 $P_{s,t}$ 的生成元, 如果它满足非时齐的 Kolmogorov 方程: $\forall\, 0\leq s<t$,

$$\frac{\partial P_{s,t}f}{\partial s}=-L_sP_{s,t}f,\quad \frac{\partial P_{s,t}f}{\partial t}=P_{s,t}L_tf,\quad f\in\mathscr{D}(L_t),$$

其中 $\mathscr{D}(L_t):=\{f\in L^2(\mu_t):L_tf<\infty\}$,

下面引入一个十分重要的概念, 它在非时齐过程的研究中起着举足轻重的作用 [1].

定义 1.1

$$\Gamma_t(f,g):=\frac{1}{2}[L_t(fg)-fL_tg-gL_tf],\quad f,g\in\mathscr{D}(L_t).\tag{1.1}$$

将 $\Gamma_t(f,f)$ 简记为 $\Gamma_t(f)$, 并且定义

$$\mathscr{D}(\Gamma_t) := \left\{ f \in \mathscr{D}(L_t) : \int \Gamma_t(f) d\mu_t < \infty \right\}.$$

事实上, 在后面的结论及证明中可以发现, 此处定义的 $\int \Gamma_t(f) d\mu_t$ 事实上就是时齐时的狄氏型 $D(f) = D(f,f)$ 在非时齐情形下的相应定义. 其在非时齐研究中的作用基本与狄氏型在时齐时的作用是类似的. 最后, 定义 $T = [a,b]$ 为一个连续时间区间, 其中 $0 \le a \le b \le \infty$.

在时齐的马氏过程中, 假设 $1 < p, q < \infty$ 是一对共轭数, 即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 另外有函数 $V : L^2(\pi) \to [0,\infty]$ 满足 $V(cf+d) = c^2 V(f)$, 其中 c, d 是任意的实常数 (如 Var 函数等). 那么称如下形式的不等式为 Liggett–Stroock 不等式:

$$\|f - \pi(f)\|^2_{L^2(\pi)} \le C D(f)^{\frac{1}{p}} V(f)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathscr{D}(D), \tag{1.2}$$

其中 $\mathscr{D}(D) := \{ f \in L^2(\pi) : \int D(f) d\pi < \infty \}$, π 为平稳分布.

由文 [3] 可知, 对于可逆的时齐马氏过程, Liggett–Stroock 不等式是与下述不等式等价的:

$$\|P_t f - \pi(f)\|^2_{L^2(\pi)} \le \frac{C' V(f)}{t^{q-1}}, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

其中常数 $C, C' > 0$, 并且函数 V 对于任意的 $t > 0$ 满足 $V(P_t f) \le V(f)$.

于是类似 Nash 不等式时的推广情形 [6], 我们也可将上述结论推广到非时齐马氏过程中.

定理 1.2　令 $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 对于非时齐马氏过程 $(P_{s,t})_{0 \le s \le t}$, 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有的 $t \in T$, 以下不等式

$$\mathrm{Var}_{\mu_t}(f) \le C \left(\int \Gamma_t(f) d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} V(f)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathscr{D}(\Gamma_t) \tag{1.4}$$

都成立, 其中 $\mathrm{Var}_{\mu_t}(f) = \|f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_t)}$, 则存在常数 $C' > 0$, 使得对于所有的 $s, t \in T$, $s \le t$, 都有

$$\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le C' \left(\frac{1}{\int_s^t V(P_{u,t} f)^{-\frac{p}{q}} du} \right)^{\frac{1}{p-1}} \le C' \frac{\sup_{u \in [s,t]} V(P_{u,t} f)}{(t-s)^{q-1}}.$$

特别地, 如果对于所有的 $s, t \in T$, $s \le t$, 还有 $V(P_{s,t} f) \le V(f)$ 成立, 那么上述结论可以简化为

$$\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le \frac{C' V(f)}{(t-s)^{q-1}}.$$

类似于时齐时的情形, 也可得到反向的结论.

定理 1.3　若存在常数 $C > 0$, 使得对所有的 $s, t \in T$, $s \le t$, 不等式

$$\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le \left[\frac{1}{\|f - \mu_t f\|^{-2(p-1)}_{L^2(\mu_t)} + C \int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad f \in \mathscr{D}(\Gamma_t) \tag{1.5}$$

都成立, 则存在常数 $C' > 0$, 使得下式成立:

$$\mathrm{Var}_{\mu_t}(f) \le C' \left(\int \Gamma_t(f) d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} V(f)^{\frac{1}{q}}, \quad t \in T. \tag{1.6}$$

以上是针对于类似时齐时常返情形下的结果, 对于非常返的情况, 也有类似的结论:

定理 1.4 对于非时齐马氏过程 $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ 来说, 如果存在一个正常数 $C>0$, 使得对于所有的 $t\in T$, 不等式

$$\|f\|^2_{L^2(\mu_t)} \le C\bigg(\int \Gamma_t(f)d\mu_t\bigg)^{\frac{1}{p}} V(f)^{\frac{1}{q}}, \quad f\in\mathscr{D}(\Gamma_t)$$

都成立, 则存在常数 $C'>0$, 使得对于所有的 $s,t\in T$, $s\le t$, 都有

$$\|P_{s,t}f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le C'\bigg(\frac{1}{\int_s^t V(P_{u,t}f)^{-\frac{p}{q}}du}\bigg)^{\frac{1}{p-1}} \le C'\frac{\sup_{u\in[s,t]}V(P_{u,t}f)}{(t-s)^{q-1}}.$$

相应地有:

定理 1.5 若存在常数 $C>0$, 使得对所有的 $s,t\in T$, $s\le t$, 不等式

$$\|P_{s,t}f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le \bigg[\frac{1}{\|f\|^{-2(p-1)}_{L^2(\mu_t)} + C\int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}}du}\bigg]^{\frac{1}{p-1}}, \quad f\in\mathscr{D}(\Gamma_t)$$

都成立, 则存在常数 $C'>0$, 使得下式成立:

$$\|f\|^2_{L^2(\mu_t)} \le C'\bigg(\int \Gamma_t(f)d\mu_t\bigg)^{\frac{1}{p}} V(f)^{\frac{1}{q}}, \quad t\in T.$$

2 主要结果的证明

定理 1.2 的证明 任取 $f\in\mathscr{D}(\Gamma_t)\subset L^2(\mu_t)$, 令 $f_s=P_{s,t}f$, 则有 $f_s\in L^2(\mu_s)$.

(a) 定义 $\varphi(s)=\mathrm{Var}_{\mu_s}(f_s)=\|f_s-\mu_sf_s\|^2_{L^2(\mu_s)}=\|f_s-\mu_tf\|^2_{L^2(\mu_s)}=\mu_s(f_s-\mu_tf)^2$. 对 $\varphi(s)$ 求导可得

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{d}{ds}\int (f_s-\mu_tf)^2\,d\mu_s = \frac{d}{ds}\int P_{0,s}(f_s-\mu_tf)^2\,d\mu_0\\ &= \int\bigg[P_{0,s}L_s(f_s-\mu_tf)^2 + P_{0,s}\bigg(2(f_s-\mu_tf)\frac{d}{ds}(f_s-\mu_tf)\bigg)\bigg]d\mu_0.\end{aligned}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f_s-\mu_tf)=\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}s}=\frac{dP_{s,t}f}{ds}=-L_sP_{s,t}f=-L_sf_s=-L_s(f_s-\mu_tf)$, 则有

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int P_{0,s}[L_s(f_s-\mu_tf)^2-2(f_s-\mu_tf)L_s(f_s-\mu_tf)]d\mu_0\\ &= \int [L_s(f_s-\mu_tf)^2-2(f_s-\mu_tf)L_s(f_s-\mu_tf)]d\mu_s.\end{aligned}$$

再由 (1.1) 式, 即得 $\varphi'(s)=2\int\Gamma_s(f_s-\mu_tf)d\mu_s=2\int\Gamma_s(f_s)d\mu_s$.

(b) 根据定理条件, 有

$$\varphi(s)=\mathrm{Var}_{\mu_s}(f_s)\le C\left(\int\Gamma_s(f_s)d\mu_s\right)^{\frac{1}{p}}V(f_s)^{\frac{1}{q}} = C\left(\frac{\varphi'(s)}{2}\right)^{\frac{1}{p}}V(f_s)^{\frac{1}{q}},$$

即 $\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^p}\ge\frac{2}{C^pV(f_s)^{\frac{p}{q}}}$. 事实上根据微分的定义, 可知

$$\frac{d\left(\varphi(s)^{-(p-1)}\right)}{ds} = -(p-1)\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^p}.$$

于是综上可得

$$\frac{d\left(\varphi(s)^{-(p-1)}\right)}{ds} \le \frac{-2(p-1)}{C^pV(f_s)^{\frac{p}{q}}}. \tag{2.1}$$

(c) 对上式从 s 到 t 积分, 得到

$$\varphi(t)^{-(p-1)} - \varphi(s)^{-(p-1)} \le \int_s^t \frac{-2(p-1)}{C^p V(f_u)^{\frac{p}{q}}} du = \frac{-2(p-1)}{C^p} \int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du,$$

即 $\varphi(s)^{-(p-1)} \ge \varphi(t)^{-(p-1)} + \frac{2(p-1)}{C^p} \int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du$. 经过简单的整理后就可以得出

$$\varphi(s) \le \left[\frac{1}{\varphi(t)^{-(p-1)} + \frac{2(p-1)}{C^p} \int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.2}$$

根据 $\varphi(s)$ 的定义有

$$\varphi(s) = \|f_s - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} = \|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)},$$

以及

$$\varphi(t) = \|P_{t,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_t)} = \|f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_t)} \ge 0,$$

于是就可得到

$$\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le C' \left(\frac{1}{\int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

其中 $C' = (\frac{C^p}{2(p-1)})^{\frac{1}{p-1}} = \frac{C^q}{[2(p-1)]^{\frac{1}{p-1}}}$.

进一步, 若再有 $V(P_{s,t} f) \le V(f)$ 对所有的 $s, t \in T$, $s \le t$ 都成立, 那么

$$\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le C' \left(\frac{1}{\int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du}\right)^{\frac{1}{p-1}} \le C' \left(\frac{1}{\int_s^t V(f)^{-\frac{p}{q}} du}\right)^{\frac{1}{p-1}} = C' \left(\frac{V(f)^{\frac{p}{q}}}{t-s}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

证毕.

推论 2.1 若此时有 $\mu_t = \mu_0 P_{0,t} = \mu_0$, $\forall\, t > 0$, 即回到时齐的情形, μ_0 为平稳分布, 定理 1.2 的结论即为时齐时的结果.

注 2.2 事实上, 若有 $\|P_{s,t} f - \mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)} \le \frac{C' V(f)}{(t-s)^{q-1}}$, 则对于任意的 $r > 0$, 都有

$$\begin{aligned}\|P_{s,t} - \mu_t\|_{L^r(\mu_t) \to L^2(\mu_s)} &= \sup_{\|f\|_{L^r(\mu_t)}=1} \|P_{s,t} f - \mu_t f\|_{L^2(\mu_s)} \le \sup_{\|f\|_{L^r(\mu_t)}=1} \left[\frac{C' V(f)}{(t-s)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{f \in L^2(\mu_t)} \left[\frac{C' V(\frac{f}{\|f\|_{L^r(\mu_t)}})}{(t-s)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sup_{f \in L^2(\mu_t)} \left\{\frac{1}{\|f\|_{L^r(\mu_t)}} \cdot \left[\frac{C' V(f)}{(t-s)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

注 2.3 定理 1.2 中 (1.4) 式的常数 C 其实可以推广为更广泛的形式 C_t, 即与时间有关的常数. 此时证明中 (2.1) 式改为如下即可:

$$\frac{d\left(\varphi(s)^{-(p-1)}\right)}{ds} \le \frac{-2(p-1)}{C_s^p V(f_s)^{\frac{p}{q}}}.$$

同样地, 对上式从 s 到 t 积分, 即可得到

$$\varphi(t)^{-(p-1)} - \varphi(s)^{-(p-1)} \le \int_s^t \frac{-2(p-1)}{C_u^p V(f_u)^{\frac{p}{q}}} du = -2(p-1) \int_s^t C_u^{-p} V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du.$$

根据定理 1.2 中的证明方法, (2.2) 式即可改为

$$\varphi(s) \le \left[\frac{1}{\varphi(t)^{-(p-1)} + 2(p-1) \int_s^t C_u^{-p} V(f_u)^{-\frac{p}{q}} du}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

于是

$$\|P_{s,t}f-\mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)}\le\left(\frac{1}{2(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{\int_s^t C_u^{-p}V(f_u)^{-\frac{p}{q}}du}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

此时, 若 C_t 有上界 C, 即可回到定理 1.2 的结论.

定理 1.3 的证明 与定理 1.2 证明中的定义相同, 任取 $f\in L^2(\mu_t)$, 令 $f_s=P_{s,t}f$, 则有 $f_s\in L^2(\mu_s)$. 定义 $\varphi(s)=\mathrm{Var}_{\mu_s}(f_s)=\|f_s-\mu_s f_s\|^2_{L^2(\mu_s)}=\|f_s-\mu_t f\|^2_{L^2(\mu_s)}=\mu_s(f_s-\mu_t f)^2$. 注意到, (1.5) 式其实即为

$$\varphi(s)\le\left[\frac{1}{\varphi(t)^{-(p-1)}+C\int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}}du}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.3}$$

经过整理后得到, 对于所有的 $s,t\in T$, $s\le t$, 有

$$\varphi(t)^{-(p-1)}-\varphi(s)^{-(p-1)}\le -C\int_s^t V(f_u)^{-\frac{p}{q}}du=\int_s^t -\frac{C}{V(f_u)^{\frac{p}{q}}}du,$$

于是

$$\frac{\varphi(t)^{-(p-1)}-\varphi(s)^{-(p-1)}}{t-s}\le\frac{1}{t-s}\int_s^t -\frac{C}{V(f_u)^{\frac{p}{q}}}du.$$

令 $s\uparrow t$, 则可得到

$$\frac{d\left(\varphi(t)^{-(p-1)}\right)}{dt}\le -\frac{C}{V(f_t)^{\frac{p}{q}}}.$$

注意到 $\frac{d(\varphi(t)^{-(p-1)})}{dt}=-(p-1)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^p}$, 于是又有

$$-(p-1)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^p}\le -\frac{C}{V(f_t)^{\frac{p}{q}}},$$

即 $\varphi'(t)\ge\frac{C}{p-1}(\frac{\varphi(t)}{V(f_t)^{\frac{1}{q}}})^p$. 再由定理 1.2 的证明过程可知 $\varphi'(t)=2\int\Gamma_t(f)d\mu_t$. 最后, 结合 $\varphi(s)$ 的定义整理后即可得到 (1.6) 式, 其中 $C'=(\frac{2(p-1)}{C})^{\frac{1}{p}}$. 证毕.

事实上, 定理 1.4 与 1.2, 以及定理 1.5 与 1.3 的证明都是类似的. 因此, 此处证明从略.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Bakry D., Émery M., Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér, I Math.*, 1984, **299**: 775–778.

[2] Chen M. F., From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, Second Edition, World Scientific, Beijing, 2004.

[3] Chen M. F., Wang Y. Z., Algebraic convergence of Markov chains, *Annals of Applied Probability*, 2003, **13**(2): 604–627.

[4] Liggett T. M., L^2 rates of convergence for attractiver reversible nearest particle systems: The critical case, *Ann. Probab.*, 1991, **19**: 935–959.

[5] Röckner M., Wang F. Y., Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups, *Journal of Functional Analysis*, 2001, **185**(2): 564–603.

[6] Zhang M., Nash inequalities for time inhomogeneous Markov processes (in Chinese), *Scientia Sinica Math.*, 2018, **48**(8): 1053–1060.