**文章编号:** 0583-1431(2019)05-0765-12 **文献标识码: A**

# Hilbert 空间上新的变分不等式问题和不动点问题的粘性迭代算法

蔡 钢

重庆师范大学数学科学学院 重庆 401331
E-mail: caigang-aaaa@163.com

**摘 要** 本文在 Hilbert 空间上引入了一个新的粘性迭代算法, 找到了关于两个逆强单调算子的变分不等式问题的解集与非扩张映射的不动点集的公共元. 通过修改的超梯度算法, 得到了强收敛定理, 也给出了一个数值例子. 所得结果改进了许多最新结果.

**关键词** 变分不等式; 不动点; 非扩张映射; 强收敛; Hilbert 空间
**MR(2010) 主题分类** 47H09, 47H10
**中图分类** O177.91

## Viscosity Iterative Algorithms for a New Variational Inequality Problem and Fixed Point Problem in Hilbert Spaces

Gang CAI

*School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,*
*Chongqing* 401331*, P. R. China*
*E-mail*: *caigang-aaaa@163.com*

**Abstract** The aim of this paper is to introduce a new viscosity iterative algorithm for finding a common element of the set of solutions of a new variational inequality problems for two inverse-strongly monotone operators and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in Hilbert spaces. We give several strong convergence theorems under some suitable assumptions imposed on the parameters by using modified extragradient method. A numerical example is also given to support our main results. The results obtained in this paper extend and improve many recent ones.

**Keywords** variational inequality; fixed point; nonexpansive mapping; strong convergence; Hilbert spaces
**MR(2010) Subject Classification** 47H09, 47H10
**Chinese Library Classification** O177.91

---

收稿日期: 2019-02-10; 接受日期: 2019-03-29
基金项目: 国家自然科学基金 (11401063, 11771063); 重庆市自然科学基金 (cstc2017jcyjAX0006); 重庆市教委项目 (KJ1703041); 重庆市高等学校青年骨干教师资助计划 (020603011714); 重庆师范大学青年拔尖人才计划 (02030307-00024)

## 1 引言

设 $H$ 为实 Hilbert 空间且具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $C$ 为 $H$ 中非空闭凸子集. 设 $T$ 为 $C$ 上非线性自映射. 记 $F(T)$ 为 $T$ 的不动点集.

映射 $T:C\to C$ 称为非扩张的, 若

$$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|,\quad\forall x,y\in C. \tag{1.1}$$

映射 $A:C\to H$ 称为单调的, 若

$$\langle Ax-Ay,\,x-y\rangle\geq 0,\quad\forall x,y\in C. \tag{1.2}$$

映射 $A:C\to H$ 称为 $\alpha$- 逆强单调的, 若存在正实数 $\alpha$ 满足

$$\langle Ax-Ay,\,x-y\rangle\geq\alpha\,\|Ax-Ay\|^2,\quad\forall x,y\in C. \tag{1.3}$$

映射 $f:C\to C$ 称为严格压缩的, 若存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 满足

$$\|f(x)-f(y)\|\leq\alpha\,\|x-y\|,\quad\forall x,y\in C. \tag{1.4}$$

映射 $A$ 称为 $H$ 上的强正线性有界算子, 若存在常数 $\bar{\gamma}>0$ 满足

$$\langle Ax,x\rangle\geq\bar{\gamma}\,\|x\|^2,\quad\forall x\in H. \tag{1.5}$$

变分不等式理论已经成为解决基础科学与应用科学中许多问题的一种重要工具, 例如经济学, 数学物理和算子研究. 许多作者给出了解决变分不等式问题的一些可行的数值方法, 见文献 [2, 4, 6, 11, 12, 16–18, 20, 21, 23].

设 $A:C\to H$ 为非线性算子. 经典的变分不等式就是找 $x^*$ 满足

$$\langle Ax^*,\,x-x^*\rangle\geq 0,\quad\forall x\in C. \tag{1.6}$$

(1.6) 的解集记为 $VI(C,A)$. Iiduka 等人 [6] 引入一个迭代方法并证明了一个弱收敛定理.

设 $A_1,A_2:C\to H$ 为两个非线性算子. 我们考虑下述一般的变分不等式问题: 找 $(x^*,y^*)\in C\times C$ 满足

$$\begin{cases}\langle x^*-(I-\lambda_1A_1)(ax^*+(1-a)y^*),\,x-x^*\rangle\geq 0,\quad\forall x\in C,\\ \langle y^*-(I-\lambda_2A_2)x^*,\,x-y^*\rangle\geq 0,\quad\forall x\in C.\end{cases} \tag{1.7}$$

若 $a=0$, (1.7) 变为

$$\begin{cases}\langle x^*-(I-\lambda_1A_1)y^*,\,x-x^*\rangle\geq 0,\quad\forall x\in C,\\ \langle y^*-(I-\lambda_2A_2)x^*,\,x-y^*\rangle\geq 0,\quad\forall x\in C.\end{cases} \tag{1.8}$$

Ceng 等人 [2] 研究了变分不等式问题 (1.8), 引入一个迭代算法, 找到了变分不等式问题 (1.8) 的解集和一个非扩张映射的不动点集的公共元. 易知问题 (1.7) 包含 (1.8) 作为特殊情形.

另一方面, 关于不动点的粘性逼近方法也受到了极大关注, 见文 [11–18].

本文用修改的超梯度方法, 研究了一个新的粘性迭代算法并找到了关于两个逆强单调算子的变分不等式问题的解集和一个非扩张映射的不动点集的公共元. 同时, 也证明了一些强收敛定理.

## 2 预备知识

任给 $x\in H$, 则存在 $C$ 中唯一的最近点 $P_Cx$ 满足

$$\|x-P_Cx\|\leq\|x-y\|,\quad\forall y\in C. \tag{2.1}$$

$P$ 叫做 $H$ 到 $C$ 上的距离投影. 易知 $P_C$ 为 $H$ 到 $C$ 上的非扩张映射且满足

$$\langle x-y, P_Cx-P_Cy\rangle \geq \|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y\in H. \tag{2.2}$$

进一步, $P_Cx\in C$ 且

$$\langle x-P_Cx, y-P_Cx\rangle \leq 0, \tag{2.3}$$

$$\|x-y\|^2 \geq \|x-P_Cx\|^2+\|y-P_Cx\|^2, \quad \forall x\in H, \quad y\in C. \tag{2.4}$$

众所周知

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2-\|y\|^2-2\langle x-y,y\rangle, \quad \forall x,y\in H. \tag{2.5}$$

**引理 2.1**[19] 设 $\{a_n\}$ 为非负实数列满足 $a_{n+1}\leq(1-\alpha_n)a_n+\delta_n,\ n\geq 0$, 这里 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1)$ 中序列且 $\{\delta_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中序列满足:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{\alpha_n}\leq 0$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<\infty$,

则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**引理 2.2**[7] 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $S$ 为 $C$ 上非扩张自映射且 $F(T)\neq\emptyset$, 则 $I-S$ 是半闭的, 即任给 $C$ 序列 $\{x_n\}$, 假设它弱收敛到 $x\in C$, 设序列 $\{(I-S)x_n\}$ 强收敛到 $y$, 则 $(I-S)x=y$, 这里 $I$ 为 $H$ 上恒等算子.

**引理 2.3**[8] 设 $B$ 为 Hilbert 空间 $H$ 上强正线性算子且具有系数 $\bar{\gamma}>0$, $0<\rho\leq\|B\|^{-1}$, 则 $\|I-\rho B\|\leq 1-\rho\bar{\gamma}$.

下面结果容易由文 [2] 中方法得到, 我们略去证明.

**引理 2.4** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集, $A_1,A_2:C\to H$ 为两个非线性算子. 任给 $\lambda_1,\lambda_2>0$, $a\in[0,1]$, 则下述论述等价:

(i) $(x^*,y^*)\in C\times C$ 为问题 (1.7) 的解;

(ii) $x^*$ 为映射 $G$ 的不动点, 即 $x^*\in F(G)$, 这里 $G:C\to C$ 定义为

$$G(x)=P_C(I-\lambda_1A_1)(aI+(1-a)P_C(I-\lambda_2A_2))(x), \quad \forall x\in C,$$

这里 $y^*=P_C(I-\lambda_2A_2)x^*$.

**引理 2.5**[3] 设 $H$ 为实 Hilbert 空间, 则 $\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\langle y,x+y\rangle$, $\forall x,y\in H$.

## 3 主要结果

**定理 3.1** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $A_i:C\to H$ 为 $d_i$- 逆强单调的, 这里 $i=1,2$. $T:C\to C$ 为非扩张映射满足 $\Omega=F(T)\cap F(G)\neq\emptyset$, 这里 $G$ 的定义见引理 2.4. 设 $f$ 为 $H$ 上严格压缩自映射, 其系数 $\delta\in(0,1)$, $A$ 为 $H$ 上强正线性算子, 其系数 $\overline{\gamma}$, 满足 $0<\gamma<\frac{\overline{\gamma}\theta}{\delta}$, $0<\theta\leq\|A\|^{-1}$. 任给 $x_1\in C$. 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} z_n=P_C(I-\lambda_2A_2)x_n, \\ u_n=P_C(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n), \\ x_{n+1}=P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n], \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $\lambda_i\in(0,2d_i)$, $0\leq a<1$. 假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1]$ 中序列满足:

(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $q\in\Omega$, 这里 $q=P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))(q)$ 解决了如下变分不等式

$$\langle(\gamma f-\theta A)q,p-q\rangle\leq 0,\quad \forall p\in\Omega.$$

**证明** 首先证明 $\{x_n\}$ 有界. 根据条件 (i) 不失一般性, 假设 $\alpha_n\theta\leq\|A\|^{-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 根据引理 2.3 得

$$\|I-\alpha_n\theta A\|\leq 1-\alpha_n\theta\bar{\gamma}.$$

任给 $x,y\in C$, $i=1,2$, 观察

$$\begin{aligned}\|(I-\lambda_iA_i)x-(I-\lambda_iA_i)y\|^2&=\|x-y\|^2-2\lambda_i\langle A_ix-A_iy,x-y\rangle+\lambda_i^2\|A_ix-A_iy\|^2\\&\leq\|x-y\|^2-2\lambda_id_i\|A_ix-A_iy\|^2+\lambda_i^2\|A_ix-A_iy\|^2\\&=\|x-y\|^2+\lambda_i(\lambda_i-2d_i)\|A_ix-A_iy\|^2\\&\leq\|x-y\|^2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

于是 $I-\lambda_iA_i$ 是非扩张的. 进一步可证明 $G$ 也是非扩张的. 设 $x^*\in\Omega$, $y^*=P_C(I-\lambda_2A_2)x^*$, 则

$$\|u_n-x^*\|=\|Gx_n-Gx^*\|\leq\|x_n-x^*\|.\tag{3.3}$$

由 (3.1) 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|&=\|P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n]-x^*\|\\&\leq\|\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n-x^*\|\\&=\|\alpha_n(\gamma f(x_n)-\gamma f(x^*))+\alpha_n(\gamma f(x^*)-\theta Ax^*)+(I-\alpha_n\theta A)(Tu_n-x^*)\|\\&\leq\alpha_n\gamma\delta\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|\gamma f(x^*)-\theta Ax^*\|+(1-\alpha_n\theta\bar{\gamma})\|x_n-x^*\|\\&=[1-\alpha_n(\theta\bar{\gamma}-\gamma\delta)]\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|\gamma f(x^*)-\theta Ax^*\|\\&\leq\max\left\{\|x_1-x^*\|,\frac{\|\gamma f(x^*)-\theta Ax^*\|}{\theta\bar{\gamma}-\gamma\delta}\right\}.\end{aligned}$$

于是序列 $\{x_n\}$ 有界.

下面证明当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$. 因为 $G$ 是非扩张的, 则

$$\|u_{n+1}-u_n\|=\|Gx_{n+1}-Gx_n\|\leq\|x_{n+1}-x_n\|.\tag{3.4}$$

于是

$$\begin{aligned}&\|x_{n+2}-x_{n+1}\|\\&=\|P_C[\alpha_{n+1}\gamma f(x_{n+1})+(I-\alpha_{n+1}\theta A)Tu_{n+1}]-P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n]\|\\&\leq\|\alpha_{n+1}\gamma f(x_{n+1})+(I-\alpha_{n+1}\theta A)Tu_{n+1}-[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n]\|\\&=\|\alpha_{n+1}\gamma(f(x_{n+1})-f(x_n))+(I-\alpha_{n+1}\theta A)(Tu_{n+1}-Tu_n)+(\alpha_{n+1}-\alpha_n)(\gamma f(x_n)-\theta ATu_n)\|\\&\leq\alpha_{n+1}\gamma\delta\|x_{n+1}-x_n\|+(1-\alpha_n\theta\bar{\gamma})\|x_{n+1}-x_n\|+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|\\&\leq[1-\alpha_n(\theta\bar{\gamma}-\gamma\delta)]\|x_{n+1}-x_n\|+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|M_1,\end{aligned}\tag{3.5}$$

这里 $M_1=\sup_{n\geq 1}\{\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|\}$. 根据引理 2.1 得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0.\tag{3.6}$$

下面证明当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|x_n-Gx_n\|\to 0$, $\|x_n-Tx_n\|\to 0$.

由 (3.1) 知

$$\begin{aligned}\|z_n-y^*\|^2&=\|P_C(I-\lambda_2A_2)x_n-P_C(I-\lambda_2A_2)x^*\|^2\\&\le\|(I-\lambda_2A_2)x_n-(I-\lambda_2A_2)x^*\|^2\\&\le\|x_n-x^*\|^2-\lambda_2(2d_2-\lambda_2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2.\end{aligned}\tag{3.7}$$

观察

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2&=\|P_C(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n)-P_C(I-\lambda_1A_1)(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\le\|(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n)-(I-\lambda_1A_1)(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\le\|(ax_n+(1-a)z_n)-(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\quad-\lambda_1(2d_1-\lambda_1)\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\le a\|x_n-x^*\|^2+(1-a)\|z_n-y^*\|^2\\&\quad-\lambda_1(2d_1-\lambda_1)\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

(3.7) 代入 (3.8), 有

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2\le{}&\|x_n-x^*\|^2-(1-a)\lambda_2(2d_2-\lambda_2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2\\&-\lambda_1(2d_1-\lambda_1)\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|^2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

令 $y_n=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n$. 由 (3.1) 知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n]-x^*\|^2\\&\le\|\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n-x^*\|^2\\&=\|Tu_n-x^*+\alpha_n(\gamma f(x_n)-\theta ATu_n)\|^2\\&\le\|Tu_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle\gamma f(x_n)-\theta ATu_n,y_n-x^*\rangle\\&\le\|u_n-x^*\|^2+2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|\|y_n-x^*\|\\&\le\alpha_nM_2+\|u_n-x^*\|^2,\end{aligned}\tag{3.10}$$

这里 $M_2=\sup_{n\ge1}\{2\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|\|y_n-x^*\|\}$. 由 (3.9) 和 (3.10) 知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&\le\alpha_nM_2+\|u_n-x^*\|^2\\&\le\alpha_nM_2+\|x_n-x^*\|^2-(1-a)\lambda_2(2d_2-\lambda_2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2\\&\quad-\lambda_1(2d_1-\lambda_1)\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|^2,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&(1-a)\lambda_2(2d_2-\lambda_2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2+\lambda_1(2d_1-\lambda_1)\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\quad\le\alpha_nM_2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\&\quad=\alpha_nM_2+\|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|).\end{aligned}$$

因为 $\lambda_i\in(0,2d_i)$, $0\le a<1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 及 (3.6), 则

$$\lim_{n\to\infty}\|A_2x_n-A_2x^*\|=0,\quad\lim_{n\to\infty}\|A_1(ax_n+(1-a)z_n)-A_1(ax^*+(1-a)y^*)\|=0.\tag{3.11}$$

另外一方面, 由 (2.2) 和 (2.5) 得

$$\begin{aligned}\|z_n-y^*\|^2&=\|P_C(I-\lambda_2A_2)x_n-P_C(I-\lambda_2A_2)x^*\|^2\\&\le\langle(I-\lambda_2A_2)x_n-(I-\lambda_2A_2)x^*,z_n-y^*\rangle\\&=\langle x_n-x^*,z_n-y^*\rangle-\lambda_2\langle A_2x_n-A_2x^*,z_n-y^*\rangle\\&=\frac{1}{2}[\|x_n-x^*\|^2+\|z_n-y^*\|^2-\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2]+\lambda_2\langle A_2x^*-A_2x_n,z_n-y^*\rangle,\end{aligned}$$

于是

$$\|z_n-y^*\|^2\le\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2+2\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|.\tag{3.12}$$

再次由 (2.2) 和 (2.5) 得

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2&=\|P_C(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n)-P_C(I-\lambda_1A_1)(ax^*+(1-a)y^*)\|^2\\&\le\langle(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n)-(I-\lambda_1A_1)(ax^*+(1-a)y^*),u_n-x^*\rangle\\&=\langle(ax_n+(1-a)z_n)-(ax^*+(1-a)y^*),u_n-x^*\rangle\\&\quad+\lambda_1\langle A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n),u_n-x^*\rangle\\&=\langle a(x_n-x^*)+(1-a)(z_n-y^*),u_n-x^*\rangle\\&\quad+\lambda_1\langle A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n),u_n-x^*\rangle\\&=a\langle x_n-x^*,u_n-x^*\rangle+(1-a)\langle z_n-y^*,u_n-x^*\rangle\\&\quad+\lambda_1\langle A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n),u_n-x^*\rangle\\&=\frac{a}{2}[\|x_n-x^*\|^2+\|u_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2]\\&\quad+\frac{1-a}{2}[\|z_n-y^*\|^2+\|u_n-x^*\|^2-\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2]\\&\quad+\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2&\le a\|x_n-x^*\|^2+(1-a)\|z_n-y^*\|^2-a\|x_n-u_n\|^2-(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2\\&\quad+2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|\\&\le a\|x_n-x^*\|^2+(1-a)\|z_n-y^*\|^2-(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2\\&\quad+2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|.\end{aligned}\tag{3.13}$$

(3.12) 代入 (3.13), 有

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2&\le a\|x_n-x^*\|^2+(1-a)[\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2\\&\quad+2\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|]-(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2\\&\quad+2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|\\&=\|x_n-x^*\|^2-(1-a)\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2-(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2\\&\quad+2(1-a)\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|\\&\quad+2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|.\end{aligned}\tag{3.14}$$

(3.14) 代入 (3.10), 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le \alpha_n M_2+\|u_n-x^*\|^2\\ &\le \alpha_n M_2+\|x_n-x^*\|^2-(1-a)\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2\\ &\quad -(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2+2(1-a)\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|\\ &\quad +2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&(1-a)\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|^2+(1-a)\|z_n-u_n+x^*-y^*\|^2\\ &\quad\le \alpha_n M_2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2+2(1-a)\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|\\ &\qquad +2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|\\ &\quad\le \alpha_n M_2+\|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)+2(1-a)\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|z_n-y^*\|\\ &\qquad +2\lambda_1\|A_1(ax^*+(1-a)y^*)-A_1(ax_n+(1-a)z_n)\|\|u_n-x^*\|.\end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ 0\le a<1$ 以及 (3.6), (3.11), 则

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|z_n-u_n+x^*-y^*\|=0. \tag{3.15}$$

从而, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\|x_n-u_n\|\le\|x_n-z_n-(x^*-y^*)\|+\|z_n-u_n+x^*-y^*\|\to 0. \tag{3.16}$$

观察

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_n\|=\|x_n-P_CTx_n\|&\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-P_CTx_n\|\\ &=\|x_n-x_{n+1}\|+\|P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n]-P_CTx_n\|\\ &\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)Tu_n-Tx_n\|\\ &\le\|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|+\|Tu_n-Tx_n\|\\ &\le\|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|\gamma f(x_n)-\theta ATu_n\|+\|u_n-x_n\|.\end{aligned}$$

由 (3.6), (3.16) 和 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0. \tag{3.17}$$

令 $q=P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))q$, 我们证明

$$\limsup_{n\to\infty}\langle(\gamma f-\theta A)q,\ x_n-q\rangle\le 0.$$

易知 $P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))$ 是压缩映射. 事实上, 任给 $x,y\in H$, 由引理 2.3 得

$$\begin{aligned}\|P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))x-P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))y\|&\le\|(\gamma f+(I-\theta A))x-(\gamma f+(I-\theta A))y\|\\ &\le\|\gamma f(x)-\gamma f(y)\|+\|(I-\theta A)x-(I-\theta A)y\|\\ &\le\gamma\delta\|x-y\|+(1-\overline{\gamma}\theta)\|x-y\|\\ &=(1-(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta))\|x-y\|.\end{aligned}$$

根据 Banach 压缩映射原理知 $P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))$ 存在唯一不动点, 记为 $q\in H$, 即 $q=P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))q$. 选择 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_i}\}$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle(\gamma f-\theta A)q,x_n-q\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle(\gamma f-\theta A)q,x_{n_i}-q\rangle.$$

因为 $\{x_{n_i}\}$ 是 $C$ 中有界序列, 不失一般性, 假设 $x_{n_i} \rightharpoonup z \in C$. 我们由 (3.2) 知 $G$ 为非扩张的. 根据引理 2.2 和 (3.16) 得 $z \in F(G)$. 由引理 2.2 和 (3.17) 知 $z \in F(T)$, 则 $z \in \Omega$. 因此

$$\limsup_{n\to\infty} \langle(\gamma f-\theta A)q, x_n-q\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle(\gamma f-\theta A)q, z-q\rangle \le 0. \tag{3.18}$$

根据 (3.6) 得

$$\limsup_{n\to\infty} \langle(\gamma f-\theta A)q, x_{n+1}-q\rangle \le 0. \tag{3.19}$$

最后证明 $x_n \to q$. 由 $x_{n+1} = P_C y_n$ 和 (2.3) 得

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-q\|^2 &= \langle x_{n+1}-q, x_{n+1}-q\rangle = \langle x_{n+1}-y_n, x_{n+1}-q\rangle + \langle y_n-q, x_{n+1}-q\rangle \\
&\le \langle y_n-q, x_{n+1}-q\rangle = \langle \alpha_n\gamma f(x_n) + (I-\alpha_n\theta A)Tu_n, x_{n+1}-q\rangle \\
&= \langle \alpha_n\gamma(f(x_n)-f(q)), x_{n+1}-q\rangle + \alpha_n\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle \\
&\quad + \langle (I-\alpha_n\theta A)(Tu_n-q), x_{n+1}-q\rangle \\
&= \alpha_n\gamma\delta\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + (1-\alpha_n\overline{\gamma}\theta)\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| \\
&\quad + \alpha_n\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle \\
&= [1-\alpha_n(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta)]\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + \alpha_n\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle \\
&\le \frac{1}{2}[1-\alpha_n(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta)](\|x_n-q\|^2 + \|x_{n+1}-q\|^2) + \alpha_n\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle \\
&\le \frac{1}{2}\|x_{n+1}-q\|^2 + \frac{1}{2}[1-\alpha_n(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta)]\|x_n-q\|^2 + \alpha_n\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle,
\end{aligned}$$

于是

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \le [1-\alpha_n(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta)]\|x_n-q\|^2 + \alpha_n(\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta)\frac{2\langle\gamma f(q)-\theta Aq, x_{n+1}-q\rangle}{\overline{\gamma}\theta-\gamma\delta}. \tag{3.20}$$

根据引理 2.1, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $x_n \to q$. 证毕.

下述结果由定理 3.1 容易得到, 故略去证明.

**定理 3.2** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $A_i: C \to H$ 为 $d_i$- 逆强单调的, 这里 $i=1,2$. $T: C\to C$ 为非扩张映射满足 $\Omega = F(T)\cap F(G) \ne \emptyset$, $G$ 的定义见引理 2.4. $f$ 为 $H$ 上严格压缩自映射, 其系数 $\delta \in (0,1)$, $A$ 为 $H$ 上强正线性有界算子, 其系数 $\overline{\gamma}$, 满足 $0<\gamma<\frac{\overline{\gamma}\theta}{\delta}$, $0<\theta\le\|A\|^{-1}$. 任给 $x_1 \in C$. 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} z_n = P_C(I-\lambda_2 A_2)x_n, \\ u_n = P_C(I-\lambda_1 A_1)z_n, \\ x_{n+1} = P_C[\alpha_n\gamma f(x_n) + (I-\alpha_n\theta A)Tu_n], \end{cases} \tag{3.21}$$

这里 $\lambda_i \in (0, 2d_i)$. 假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1]$ 中序列满足:

(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $q\in\Omega$, 这里 $q = P_\Omega(\gamma f + (I-\theta A))(q)$ 解决了下述变分不等式

$$\langle(\gamma f-\theta A)q, p-q\rangle \le 0, \quad \forall p\in\Omega.$$

**定理 3.3** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $B: C\to H$ 为 $d$- 逆强单调的. $T: C\to C$ 为非扩张映射满足

$$\Omega = F(T)\cap VI(C,B) \ne \emptyset,$$

这里 $G$ 的定义见引理 2.4. $f$ 为 $H$ 上严格压缩自映射, 其系数 $\delta \in (0,1)$, $A$ 为 $H$ 上强正线性有界算子, 其系数 $\overline{\gamma}$, 满足 $0 < \gamma < \frac{\overline{\gamma}\theta}{\delta}$, $0 < \theta \le \|A\|^{-1}$. 任给 $x_1 \in C$. 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} z_n = P_C(I - \lambda B)x_n, \\ x_{n+1} = P_C[\alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n \theta A)Tz_n], \end{cases} \tag{3.22}$$

这里 $\lambda \in (0, 2d)$. 假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1]$ 中序列, 满足

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $q \in \Omega$, 这里 $q = P_\Omega(\gamma f + (I - \theta A))(q)$ 解决了下述变分不等式

$$\langle (\gamma f - \theta A)q, p - q \rangle \le 0, \quad \forall\, p \in \Omega.$$

## 4 应用

(I) 应用到严格伪压缩映射的不动点问题.

映射 $T : C \to H$ 称为 $k$- 严格伪压缩的, 若存在常数 $k \in [0,1)$ 满足

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + k\,\|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad \forall\, x, y \in C. \tag{4.1}$$

**引理 4.1** [22] 设 $T : C \to H$ 为 $k$- 严格伪压缩映射且 $F(T) \ne \emptyset$, 则 $F(P_C T) = F(T)$.

**引理 4.2** [22] 设 $T : C \to H$ 为 $k$- 严格伪压缩映射. 定义 $S : C \to H$ 为 $Sx = \delta x + (1 - \delta)Tx$, $\forall\, x \in C$, 则当 $\delta \in [k, 1)$ 时, $S$ 是非扩张的且 $F(S) = F(T)$.

由引理 4.1 和 4.2, 我们有下面结果.

**定理 4.3** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $A_i : C \to H$ 为 $d_i$- 逆强单调的, 这里 $i = 1, 2$. $T : C \to H$ 为 $\nu$- 严格伪压缩满足 $\Omega = F(T) \cap F(G) \ne \emptyset$, 这里 $G$ 的定义见引理 2.4. $f$ 为 $H$ 中严格压缩自映射, 其系数为 $\delta \in (0,1)$, $A$ 为 $H$ 上强正线性有界算子, 其系数 $\overline{\gamma}$ 满足 $0 < \gamma < \frac{\overline{\gamma}\theta}{\delta}$, $0 < \theta \le \|A\|^{-1}$. 任给 $x_1 \in C$, 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} z_n = P_C(I - \lambda_2 A_2)x_n, \\ u_n = P_C(I - \lambda_1 A_1)z_n, \\ x_{n+1} = P_C[\alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n \theta A)P_C(\sigma I + (1 - \sigma)T)u_n], \end{cases} \tag{4.2}$$

这里 $\lambda_i \in (0, 2d_i)$, $\sigma \in [\nu, 1)$. 假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1]$ 中序列, 满足

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $q \in \Omega$, 这里 $q = P_\Omega(\gamma f + (I - \theta A))(q)$ 解决了如下变分不等式

$$\langle (\gamma f - \theta A)q, p - q \rangle \le 0, \quad \forall\, p \in \Omega.$$

(II) 应用到均衡问题.

设 $\phi : C \times C \to \mathbb{R}$ 为双函数, 这里 $\mathbb{R}$ 为实数集. 关于 $\phi$ 的均衡问题就是找点 $x \in C$, 满足

$$\phi(x, y) \ge 0, \quad \forall\, y \in C. \tag{4.3}$$

(4.3) 的解集记为 $EP(\phi)$. 均衡问题包含变分不等式问题, 不动点问题和优化问题作为特殊情形 (见 Blum 和 Oetti 的文 [1]).

为了解决均衡问题, 假设双函数 $\phi$ 满足条件 (见文 [1]):

(A1) $\phi(x,x)=0,\ \forall x\in C$;

(A2) $\phi$ 是单调的, 即 $\phi(x,y)+\phi(y,x)\le 0,\ \forall x,y\in C$;

(A3) $\phi$ 是上半连续的, 即任给 $x,y,z\in C$, 有

$$\limsup_{t\to 0^+}\phi(tz+(1-t)x,y)\le\phi(x,y);$$

(A4) 任给 $x\in C$, $\phi(x,\cdot)$ 是凸的和弱下半连续的.

**引理 4.4**[1] 设 $C$ 为 $H$ 中非空闭凸子集, $\phi$ 为 $C\times C$ 到 $\mathbb{R}$ 上双函数且满足条件 (A1)–(A4). 令 $r>0$, $x\in H$, 则存在 $z\in C$ 满足

$$\phi(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,\,z-x\rangle\ge 0,\quad \forall y\in C.$$

**引理 4.5**[5] 假设 $\phi:C\times C\to\mathbb{R}$ 满足条件 (A1)–(A4). 令 $r>0$, $x\in H$, 定义映射 $T_r:H\to C$ 如下: $T_r(x)=\left\{z\in C:\phi(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,\,z-x\rangle\ge 0,\ \forall y\in C\right\}$, 则

(1) $T_r$ 是单值的;

(2) $T_r$ 是固定非扩张的, 即任给 $x,y\in H$, 有 $\|T_rx-T_ry\|^2\le\langle T_rx-T_ry,\,x-y\rangle$, 于是 $\|T_rx-T_ry\|\le\|x-y\|$, $\forall x,y\in H$, 即 $T_r$ 是非扩张的;

(3) $F(T_r)=EP(\phi)$, $\forall r>0$;

(4) $EP(\phi)$ 是闭凸集.

根据引理 4.3 和 4.4, 我们有如下结果.

**定理 4.6** 设 $C$ 为实 Hilbert 空间 $H$ 中非空闭凸子集. $\phi:C\times C\to\mathbb{R}$ 为双函数且满足条件 (A1)–(A4). $A_i:C\to H$ 为 $d_i$- 逆强单调的, 这里 $i=1,2$. $T:C\to C$ 为非扩张映射满足 $\Omega=EP(\phi)\cap F(G)\ne\emptyset$, 这里 $G$ 的定义见引理 2.4. $f$ 为 $H$ 上严格压缩自映射, 其系数 $\delta\in(0,1)$, $A$ 为 $H$ 上强正有界线性算子, 其系数 $\overline{\gamma}$ 满足 $0<\gamma<\frac{\overline{\gamma}\theta}{\delta}$, $0<\theta\le\|A\|^{-1}$. 任给 $x_1\in C$. 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} z_n=P_C(I-\lambda_2A_2)x_n,\\ u_n=P_C(I-\lambda_1A_1)(ax_n+(1-a)z_n),\\ x_{n+1}=P_C[\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\theta A)T_ru_n],\end{cases}\tag{4.3}$$

这里 $\lambda_i\in(0,2d_i)$, $0\le a<1$, $r>0$. 假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1]$ 中序列满足:

(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=1}^\infty\alpha_n=\infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^\infty|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $q\in\Omega$, 这里 $q=P_\Omega(\gamma f+(I-\theta A))(q)$ 解决了如下变分不等式

$$\langle(\gamma f-\theta A)q,p-q\rangle\le 0,\quad\forall p\in\Omega.$$

## 5 数值例子

**例 5.1** 定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3,$$

且范数 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义为 $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$. 任给 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, 定义 $T,A_1,A_2,A,\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为

$$T\mathbf{x}=\frac{1}{5}\mathbf{x},\quad A_1\mathbf{x}=\frac{1}{2}\mathbf{x},\quad A_2\mathbf{x}=\frac{1}{2}\mathbf{x},\quad A\mathbf{x}=\frac{1}{3}\mathbf{x},\quad f(\mathbf{x})=\frac{1}{4}\mathbf{x}.$$

设 $\alpha_n = \frac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_1 = d_2 = 1$, $\theta = 2$, $\delta = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$, $\overline{\gamma} = \frac{1}{4}$. $\{x_n\}$ 为 (3.1) 中定义的序列, 则 $\{\mathbf{x}_n\}$ 强收敛到 0.

易知 $F(T) \cap F(G) = \{0\}$, 这里 $G$ 的定义见引理 2.4. 重写 (3.1) 为

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{3n+4}{40n}\mathbf{x}_n. \tag{5.1}$$

在二维空间和三维空间中选择初值 $\mathbf{x}_1 = (1,3)$ 与 $\mathbf{x}_1 = (1,3,5)$, 则有下述数值结果.

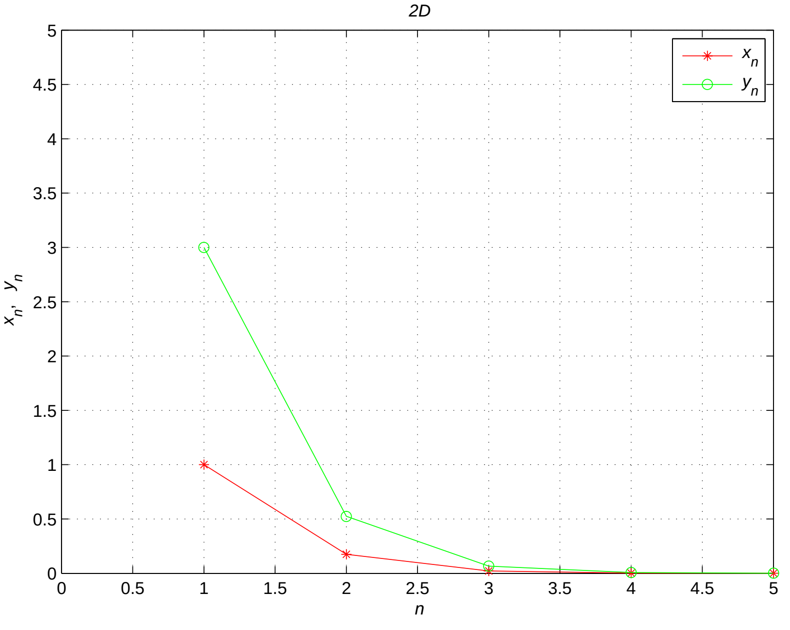


图 1　例 5.1 中二维情形

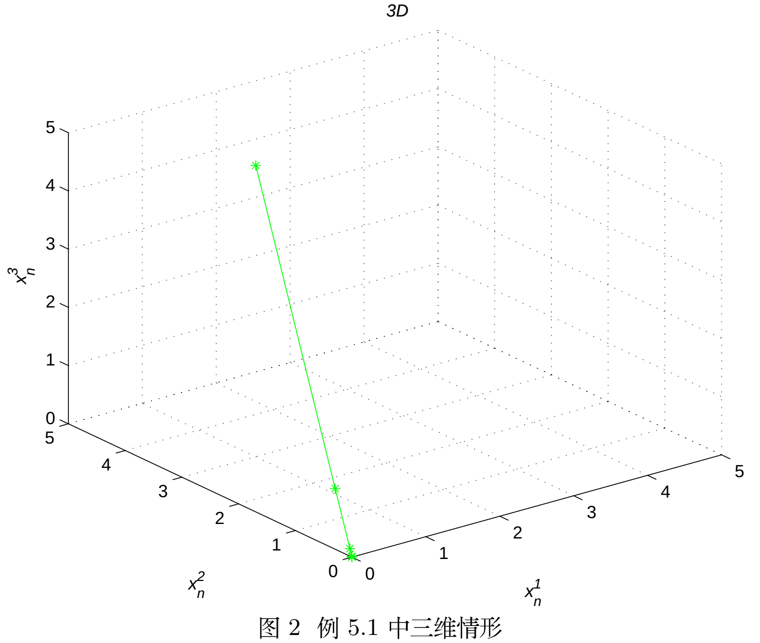


图 2　例 5.1 中三维情形

# 参 考 文 献


[1] Blum E., Oettli W., From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Stud.*, 1994, **63**: 123–145.

[2] Ceng L. C., Wang C., Yao J. C., Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, *Math. Methods Oper. Res.*, 2008, **67**: 375–390.

[3] Chang S. S., On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **216**: 94–111.

[4] Colao V., Marino G., Xu H. K., An iterative method for finding common solutions of equilibrium and fixed point problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**: 340–352.

[5] Combettes P. L., Hirstoaga S. A., Equilibrium programming in Hilbert space, *J. Nonlinear convex Anal.*, 2002, **6**: 117–136.

[6] Iiduka H., Takahashi W., Toyoda M., Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings, *Pan. Math. J.*, 2004, **14**: 49–61.

[7] Lim T. C., Xu H. K., Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings, *Nonlinear Anal.*, 1994, **22**: 1345–1355.

[8] Marino G., Xu H. K., A general iterative method for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **318**: 43–52.

[9] Moudafi A., Viscosity approximation methods for fixed points problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, **241**: 46–55.

[10] Nakajo K., Takahashi W., Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **279**: 372–379.

[11] Noor M. A., Some algorithms for general monotone mixed variational inequalities, *Math. Comput. Model.*, 1999, **29**: 1–9.

[12] Noor M. A., Some development in general variational inequalities, *Appl. Math. Comput.*, 2004, **152**: 199–277.

[13] Siriyan K., Kangtunyakarn A., A new general system of variational inequalities for convergence theorem and application, *Numer Algor.*, 2019, **81**: 99–123.

[14] Suzuki T., Strong convergence of Krasnoselskii and Manns type sequences for one parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **305**: 227–239.

[15] Sunthrayuth P., Kumam P., Viscosity approximation methods based on generalized contraction mappings for a countable family of strict pseudo-contractions, a general system of variational inequalities and a generalized mixed equilibrium problem in Banach spaces, *Math. Comput. Modell.*, 2013, **58**: 1814–1828.

[16] Qin X., Cho Y. J., Kang S. M., Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, **225**: 20–30.

[17] Qin X., Lin L. J., Kang S. M., On a generalized Ky Fan inequality and asymptotically strict pseudocontractions in the intermediate sense, *J. Optim. Theory. Appl.*, 2011, **150**: 553–579.

[18] Qin X., Cho Y. J., Kang S. M., Viscosity approximation methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems with applications, *Nonlinear Anal.*, 2010, **72**: 99–112.

[19] Xu H. K., Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **298**: 279–291.

[20] Yao Y., Noor M. A., On viscosity iterative methods for variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **325**: 776–787.

[21] Yao Y., Noor M. A., Noor K. I., et al., Modified extragradient methods for a system of variational inequalities in Banach spaces, *Acta Appl. Math.*, 2010, **110**: 1211–1224.

[22] Zhou H., Convergence theorems of fixed points for $k$-strict pseudo-contractions in Hilbert spaces, *Nonlinear Anal.*, 2008, **69**(2): 456–462.

[23] Zhu D. L., Marcotte P., Co-coercivity and its role in the convergence of iterative schemes for solving variational inequalities, *SIAM J. Optim.*, 1996, **6**: 774–726.