第62卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0709-12 **文献标识码: A**

涉及导数与差分分担值的唯一性问题

邓炳茂 曾翠萍

广东金融学院金融数学与统计学院 广州 510521
E-mail: dbmao2012@163.com; ytxzcp@163.com

刘 丹 方明亮

华南农业大学应用数学研究所 广州 510642
E-mail: liudan@scau.edu.cn; mlfang@scau.edu.cn

摘 要 本文研究了有穷级亚纯函数的导数及其差分分担值的唯一性问题, 主要证明了以下结论: 如果 f' 与 $\Delta_c f$ CM 分担 a, b, ∞, 则 $f' \equiv \Delta_c f$. 该结论解决了 Qi 等人在 2018 年提出的问题.

关键词 亚纯函数; 差分; 分担值
MR(2010) 主题分类 30D35
中图分类 O174.2

Unicity of Mermorphic Functions Concerning Their Derivatives and Difference

Bing Mao DENG Cui Ping ZENG

School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521*, P. R. China*
E-mail: *dbmao*2012*@*163*.com*; *ytxzcp@*163*.com*

Dan LIU Ming Liang FANG

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642*, P. R. China*
E-mail: *liudan@scau.edu.cn*; *mlfang@scau.edu.cn*

Abstract In this paper, we investigate a uniqueness of meromorphic functions with finite order concerning their derivative and difference and obtain one result that if f' and $\Delta_c f$ share a, b, ∞ CM, then $f' \equiv \Delta_c f$. This result confirms the problem of Qi et al. in 2018.

Keywords meromorphic function; difference; sharing value
MR(2010) Subject Classification 30D35
Chinese Library Classification O174.2

收稿日期: 2018-10-13; 接受日期: 2019-03-13
基金项目: 国家自然科学基金青年资助项目 (11701188)
通讯作者: 曾翠萍

1 引言及主要结论

本文将使用 Nevanlinna 值分布理论中的基本理论及其符号, 比如 $N(r,f), m(r,f), T(r,f)$, $S(r,f)$, 其中, 当 $r\to\infty$ 时, $S(r,f)=o(T(r,f))$, 可能需除去一个对数测度为有限的例外值集, 请见文献 [7, 15].

设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 定义

$$\rho(f)=\sup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

则称 $\rho(f)$ 为函数 f 的增长级, 如果 $\rho(f)<\infty$, 则称函数 f 是有穷级亚纯函数.

设 f 与 g 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的两个亚纯函数, a 是一个复数. 如果 $f-a$ 与 $g-a$ 具有相同的零点, 并且零点重级也一样, 则称 f 与 g CM 分担 a; 如果 $f-a$ 与 $g-a$ 具有相同的零点, 不计算零点重级, 则称 f 与 g IM 分担 a.

本文中, c 均表示非零有穷复数. 对于复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $f(z)$, 定义 $f(z)$ 的平移为 $f_c(z)=f(z+c)$, 其差分算子为 $\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)$. 特别地, $\Delta f(z)=\Delta_1 f(z)=f(z+1)-f(z)$.

1976 年, Rubel 和 Yang [14] 研究了整函数与其导数分担两个值的唯一性问题, 并证明了以下定理:

定理 1.1 设 $f(z)$ 是一个非常数整函数, a,b 是两个判别的有穷复数. 如果 $f(z)$ 与 $f'(z)$ CM 分担 a,b, 则 $f(z)\equiv f'(z)$.

近年来, 值分布相关理论的差分模拟成为热门的研究问题, 许多学者开始研究值分布相关理论的差分模拟问题, 并取得了丰富的结果 [1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 16]. 2009 年, Heittokangas 等人 [8] 研究了定理 1.1 的差分模拟问题, 他们证明了以下结论:

定理 1.2 设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, a_1,a_2,a_3 是相互判别的复数. 如果 $f(z)$ 与 $f(z+c)$ CM 分担 a_1,a_2, 并且 IM 分担 a_3, 则 $f(z)\equiv f(z+c)$.

2013 年, Chen 和 Yi [2] 考虑了 $f(z)$ 与其差分算子 $\Delta_c f(z)$ CM 分担三个值的情形, 证明了如下结论:

定理 1.3 设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, 并且 $f(z)$ 的增长级 $\rho(f)$ 不是整数, a,b 是相互判别的有穷复数. 如果 $\Delta_c f(z)\not\equiv 0$, 且 $\Delta_c f(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 a,b,∞, 则 $f(z)\equiv\Delta_c f(z)$.

2014 年, Zhang 等人 [16] 和 Liu 等人 [10] 证明了当 $\rho(f)$ 是整数时, 定理 1.3 仍然成立, 他们证明的结果如下:

定理 1.4 设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数, a,b 是相互判别的有穷复数. 如果 $\Delta_c f(z)\not\equiv 0$, 且 $\Delta_c f(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 a,b, 则 $f(z)\equiv\Delta_c f(z)$.

后来, Li 等人 [9], Cui 等人 [4], 以及 Lü等人 [11] 研究了当 $f(z)$ 是亚纯函数的情形, 证明了:

定理 1.5 设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, a,b 是相互判别的有穷复数. 如果 $\Delta_c f(z)\not\equiv 0$, 且 $\Delta_c f(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 a,b,∞, 则 $f(z)\equiv\Delta_c f(z)$.

从导数的定义可知导数与差分有着直接的联系. Qi 等人 [12] 研究了有穷级亚纯函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 与其差分 $\Delta f(z)$ 分担三个值的唯一性问题, 他们证明了:

定理 1.6 设 $f(z)$ 是一个有穷级超越亚纯函数, 并且 $f(z)$ 的增长级 $\rho(f)$ 不是整数, 设 a,b 是判别的有穷复数. 如果 $\Delta f(z)\not\equiv 0$, 且 $\Delta f(z)$ 与 $f'(z)$ CM 分担 a,b,∞, 则 $f'(z)\equiv\Delta f(z)$.

注 1.7 文 [12] 中提出如下问题: 若去掉定理 1.6 中的条件 “$f(z)$ 的增长级 $\rho(f)$ 不是整数” 结论是否仍成立?

本文研究了该问题, 并进一步研究了当 $f(z)$ 是有理函数的情形, 证明了如下结果.

定理 1.8 设 $f(z)$ 是一个有穷级非常数亚纯函数, 设 a,b 是判别的有穷复数. 如果 $\Delta_c f(z)$ 与 $f'(z)$ CM 分担 a,b,∞, 则 $f'(z)\equiv\Delta_c f(z)$ 或者 $f(z)=Az+B$, 其中 A,B 是满足 $A\neq a,b$, $Ac\neq a,b$ 的常数.

另一方面, 2012 年, Chen 等人 [1] 证明了以下结论:

定理 1.9 设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数, a 是一个非零有穷复数. 如果 $f(z),\Delta_c f(z)$ 与 $\Delta_c^2 f(z)$ CM 分担 a, 则 $\Delta_c f(z)\equiv\Delta_c^2 f(z)$.

我们考虑了 $f(z),f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ 分担一个非零值的唯一性问题, 证明了如下定理.

定理 1.10 设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数, a 是一个非零有穷复数. 如果 $f(z),f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a, 则 $f'(z)\equiv\Delta_c f(z)$.

例 1.11 令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{Az}+a(A-1)}{A}$, 其中 A 是一个满足 $\mathrm{e}^{Ac}-1=A$ 的常数. 经简单计算可得

$$f'(z)=\Delta_c f(z)=\mathrm{e}^{Az}.$$

显然, $f(z),f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a, 此例子表明定理 1.10 中的结论不能改成 $f(z)\equiv\Delta_c f(z)$, 或者 $f(z)\equiv f'(z)$.

2 一些引理

引理 2.1 [3, 5] 设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, c 是一个非零有穷复数, 则有

$$T(r,f(z+c))=T(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.2 [3, 5] 设 $f(z)$是一个有穷级亚纯函数, c是一个非零有穷复数, k是一个正整数, 则有

$$m\left(r,\frac{\Delta_c^k f(z)}{f(z)}\right)=S(r,f).$$

引理 2.3 [13, 15] 设 $f_i(z)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $g_i(z)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $n\geq 2$ 均是整函数, 并满足

(1) $\sum_{i=1}^n f_i(z)\mathrm{e}^{g_i(z)}\equiv 0$;

(2) 对于任意的 $1\leq i\leq n$, $1\leq k<l\leq n$, f_i 的增长级均小于 $\mathrm{e}^{g_k-g_l}$ 的增长级,

则有 $f_i(z)\equiv 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

3 定理 1.8 的证明

如果 $\Delta_c f(z)\equiv a$ (或者 $\Delta_c f(z)\equiv b$), 则由 $f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a,b,∞, 显然有 $f'(z)\equiv a$ (或者 $\Delta_c f(z)\equiv b$), 定理 1.8 的结论显然成立. 以下讨论 $\Delta_c f(z)\not\equiv a,b$ 的情形.

因为 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, 由引理 2.1 知 $\rho(\Delta_c f(z))\leq\rho(f(z))$, 结合 $f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a,b,∞, 因此有

$$\frac{f'(z)-a}{\Delta_c f(z)-a}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{f'(z)-b}{\Delta_c f(z)-b}=\mathrm{e}^{\beta(z)},\tag{3.1}$$

其中 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$ 是两个多项式.

从 (3.1) 式可得

$$(\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)})\Delta_c f(z)=a\mathrm{e}^{\alpha(z)}-b\mathrm{e}^{\beta(z)}-a+b. \tag{3.2}$$

如果 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$, 则由 (3.2) 式可得

$$(a-b)(\mathrm{e}^{\beta(z)}-1)=0.$$

由于 $a\neq b$, 易得 $\mathrm{e}^{\beta(z)}\equiv 1$, 因此 $f'(z)\equiv\Delta_c f(z)$.

以下考虑 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$ 的情形.

从 (3.2) 式以及 (3.1) 的第一个方程, 可得

$$\Delta_c f(z)=\frac{a\mathrm{e}^{\alpha(z)}-b\mathrm{e}^{\beta(z)}-a+b}{\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)}}, \tag{3.3}$$

$$f'(z)=\frac{\mathrm{e}^{\alpha(z)}[a\mathrm{e}^{\alpha(z)}-b\mathrm{e}^{\beta(z)}-a+b]}{\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)}}-a\mathrm{e}^{\alpha(z)}+a. \tag{3.4}$$

对 (3.3) 式两边同时求一阶导数, 可得

$$(\Delta_c f(z))'=\frac{[(a-b)\beta'(z)-(a-b)\alpha'(z)]\mathrm{e}^{\alpha(z)+\beta(z)}+(a-b)\alpha'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)}-(a-b)\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}}{(\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)})^2}. \tag{3.5}$$

另外一方面, 由 (3.4) 式可得

$$\Delta_c f'(z)=\frac{\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}[a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}-b\mathrm{e}^{\beta(z+c)}-a+b]}{\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}-\mathrm{e}^{\beta(z+c)}}-\frac{\mathrm{e}^{\alpha(z)}[a\mathrm{e}^{\alpha(z)}-b\mathrm{e}^{\beta(z)}-a+b]}{\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)}}-a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}+a\mathrm{e}^{\alpha(z)}. \tag{3.6}$$

显然, $(\Delta_c f(z))'=\Delta_c f'(z)$, 结合 (3.5) 式与 (3.6) 式, 经仔细计算并化简可得

$$\begin{aligned}
&[\beta'(z)-\alpha'(z)-1]\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)+\beta(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}-[\beta'(z)-\alpha'(z)+1]\mathrm{e}^{\alpha(z)+\beta(z)+\beta(z+c)}\\
&\quad-\beta'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z+c)+\beta(z)}-\alpha'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)+\beta(z+c)}+\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)+\beta(z+c)}-\mathrm{e}^{2\alpha(z)+\alpha(z+c)+\beta(z+c)}\\
&\quad+2\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)+\beta(z)+\beta(z+c)}-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)+2\beta(z)+\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\alpha(z+c)+2\beta(z)}+\mathrm{e}^{2\alpha(z)+\alpha(z+c)+\beta(z)}\\
&\quad-\mathrm{e}^{2\alpha(z)+\beta(z)+\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{2\alpha(z)+\beta(z+c)}-\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)+2\beta(z)}+\mathrm{e}^{\alpha(z)+2\beta(z)+\beta(z+c)}\\
&\equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

以下分三种情形讨论:

情形 1 $\deg\alpha(z)>\deg\beta(z)$, 则将 (3.7) 式改写为如下形式:

$$F_3(z)\mathrm{e}^{3\alpha(z)}+F_2(z)\mathrm{e}^{2\alpha(z)}+F_1(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)}+F_0(z)\equiv 0, \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_3(z)&=(\mathrm{e}^{\beta(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z+c)})\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)},\\
F_2(z)&=[\beta'(z)-\alpha'(z)-1]\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\beta(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\beta(z)+\beta(z+c)}\\
&\quad-\mathrm{e}^{\beta(z)+\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\beta(z+c)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+2\beta(z)},\\
F_1(z)&=-\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\beta(z)}-[\beta'(z)-\alpha'(z)+1]\mathrm{e}^{\beta(z)+\beta(z+c)}-\alpha'(z)\mathrm{e}^{\beta(z+c)}\\
&\quad-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+2\beta(z)+\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+2\beta(z)}+\mathrm{e}^{2\beta(z)+\beta(z+c)},\\
F_0(z)&=\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)+\beta(z+c)}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

显然, 对任意的 $i=1,2,3,4$, 均有

$$\rho(F_i(z))<\deg\alpha=\rho(\mathrm{e}^{\alpha(z)}).$$

因此, 由引理 2.3 可得

$$F_0(z) \equiv F_1(z) \equiv F_2(z) \equiv F_3(z) \equiv 0.$$

由 $F_0(z) \equiv 0$ 可得 $\beta'(z) \equiv 0$, 从而 $\beta(z) \equiv \beta$ 是一个常数, $\mathrm{e}^{\beta(z)} \equiv \mathrm{e}^{\beta(z+c)} = \mathrm{e}^{\beta}$. 因此 $F_1(z), F_2(z)$ 可化简为如下形式:

$$F_2(z) = [\mathrm{e}^{2\beta} - \mathrm{e}^{\beta} - \alpha'(z)(\mathrm{e}^{\beta} - 1)]\mathrm{e}^{\Delta_c \alpha(z)} + \mathrm{e}^{\beta}(1 - \mathrm{e}^{\beta}) \equiv 0, \tag{3.10}$$

$$F_1(z) = \mathrm{e}^{2\beta}(1 - \mathrm{e}^{\beta})\mathrm{e}^{\Delta_c \alpha(z)} + \mathrm{e}^{\beta}[\mathrm{e}^{2\beta} - \mathrm{e}^{\beta} + \alpha'(z)(\mathrm{e}^{\beta} - 1)] \equiv 0. \tag{3.11}$$

如果 $\mathrm{e}^{\beta} \neq 1$, 由 (3.10) 式及 (3.11) 式, 可得

$$\mathrm{e}^{\Delta_c \alpha(z)} = \frac{\mathrm{e}^{2\beta} - \mathrm{e}^{\beta} - \alpha'(z)(\mathrm{e}^{\beta} - 1)}{\mathrm{e}^{\beta}(\mathrm{e}^{\beta} - 1)} = \frac{\mathrm{e}^{\beta}(\mathrm{e}^{\beta} - 1)}{\mathrm{e}^{2\beta} - \mathrm{e}^{\beta} + \alpha'(z)(\mathrm{e}^{\beta} - 1)}.$$

解以上方程可得 $\mathrm{e}^{\beta} = 1$, 矛盾.

因此 $\mathrm{e}^{\beta} = 1$, 即 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$.

情形 2 $\deg \alpha(z) < \deg \beta(z)$, 则 (3.7) 式可改写成以下形式

$$G_3(z)\mathrm{e}^{3\beta(z)} + G_2(z)\mathrm{e}^{2\beta(z)} + G_1(z)\mathrm{e}^{\beta(z)} + G_0(z) \equiv 0, \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
G_3(z) &= (\mathrm{e}^{\alpha(z)} - \mathrm{e}^{\alpha(z+c)})\mathrm{e}^{\Delta_c \beta(z)}, \\
G_2(z) &= -[\beta'(z) - \alpha'(z) + 1]\mathrm{e}^{\alpha(z)+\Delta_c \beta(z)} + \beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c \beta(z)} + 2\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)+\Delta_c \beta(z)} \\
&\quad + \mathrm{e}^{\alpha(z+c)} - \mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)} - \mathrm{e}^{2\alpha(z)+\Delta_c \beta(z)}, \\
G_1(z) &= [\beta'(z) - \alpha'(z) - 1]\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)} - \beta'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z+c)} - \alpha'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)+\Delta_c \beta(z)} \\
&\quad - \mathrm{e}^{2\alpha(z)+\alpha(z+c)+\Delta_c \beta(z)} + \mathrm{e}^{2\alpha(z)+\alpha(z+c)} + \mathrm{e}^{2\alpha(z)+\Delta_c \beta(z)}, \\
G_0(z) &= \alpha'(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

显然, 对任意的 $i = 0, 1, 2, 3$, 均有

$$\rho(G_i(z)) < \deg \beta = \rho(\mathrm{e}^{\beta(z)}).$$

因此, 由引理 2.3 可得

$$G_0(z) \equiv G_1(z) \equiv G_2(z) \equiv G_3(z) \equiv 0.$$

由 $G_0(z) \equiv 0$ 可得 $\alpha'(z) \equiv 0$, 从而 $\alpha(z) \equiv \alpha$ 是一个常数, $\mathrm{e}^{\alpha(z)} \equiv \mathrm{e}^{\alpha(z+c)} = \mathrm{e}^{\alpha}$. 因此

$$G_2(z) = [\mathrm{e}^{2\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha} - \beta'(z)(\mathrm{e}^{\alpha} - 1)]\mathrm{e}^{\Delta_c \beta(z)} + \mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{2\alpha} \equiv 0,$$

$$G_1(z) = \mathrm{e}^{2\alpha}(1 - \mathrm{e}^{\alpha})\mathrm{e}^{\Delta_c \beta(z)} + \mathrm{e}^{\alpha}[\mathrm{e}^{2\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha} + \beta'(z)(\mathrm{e}^{\alpha} - 1)] \equiv 0.$$

类似情形 1 的讨论, 可推出 $\mathrm{e}^{\alpha} = 1$, 因此 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$.

情形 3 $\deg \alpha(z) = \deg \beta(z)$. 以下再分两种子情形讨论.

情形 3.1 $\deg \alpha(z) = \deg \beta(z) = 0$. 由 (3.4) 式可得 $f'(z)$ 是一个常数, 从而 $f(z) = Az + B$, 此时 $f'(z) = A$, $\Delta_c f(z) = Ac$. 如果 $A = a$, 则由 $f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a 易得 $Ac = a$, 即有 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$. 同理, 如果 $A = b$ 可得 $Ac = b$, 即 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$. 如果 $A \neq a, b$, 则由 $f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a, b, 可得 $Ac \neq a, b$.

情形 3.2 $\deg\alpha(z)=\deg\beta(z)\geq 1$. 由 (3.7) 式可得

$$\begin{aligned}&[(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{2\alpha(z)+\beta(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\mathrm{e}^{2\alpha(z)}\\&\quad-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{\alpha(z)+\beta(z)}-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{\alpha(z)+2\beta(z)}\\&\quad+\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}\mathrm{e}^{2\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1)\mathrm{e}^{3\alpha(z)+\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1)\mathrm{e}^{\alpha+3\beta(z)}\\&\quad+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{2\alpha(z)+2\beta(z)}\\&\equiv 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

(3.14) 可改写成以下形式:

$$\sum_{i=1}^{8}L_i(z)\mathrm{e}^{g_i(z)}\equiv 0,\tag{3.15}$$

其中

$$\begin{aligned}&L_1(z)=(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}, && g_1(z)=2\alpha(z)+\beta(z),\\&L_2(z)=\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}, && g_2(z)=2\alpha(z),\\&L_3(z)=-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}), && g_3(z)=\alpha(z)+\beta(z),\\&L_4(z)=-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}], && g_4(z)=\alpha(z)+2\beta(z),\\&L_5(z)=\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}, && g_5(z)=2\beta(z),\\&L_6(z)=-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1), && g_6(z)=3\alpha(z)+\beta(z),\\&L_7(z)=-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1), && g_7(z)=\alpha(z)+3\beta(z),\\&L_8(z)=2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}; && g_8(z)=2\alpha(z)+2\beta(z).\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}\deg(2\alpha(z)-\beta(z))&=\deg(\alpha(z)+\beta(z))=\deg(3\alpha(z)-\beta(z))=\deg(\alpha(z)-\beta(z))\\&=\deg(\alpha(z)-2\beta(z))=\deg(3\beta(z)-\alpha(z))=\deg\alpha(z),\end{aligned}$$

则对任意的 $1\leq i<j\leq 8$, $1\leq n\leq 8$, 均有

$$\rho(L_n(z))<\rho(\mathrm{e}^{g_i(z)-g_j(z)})=\deg\alpha(z).$$

由引理 2.3 可得 $L_n(z)\equiv 0$ $(n=1,2,\ldots,8)$, 从 $L_2(z)\equiv 0$ 可得 $\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\equiv 0$, 从而可推出 $\alpha(z)$ 是常数, 但这与 $\deg\alpha(z)=\deg\beta(z)\geq 1$ 矛盾.

因此, 我们只需考虑

$$\begin{aligned}&\deg(2\alpha(z)-\beta(z)),\ \deg(\alpha(z)+\beta(z)),\ \deg(3\alpha(z)-\beta(z)),\\&\deg(\alpha(z)-\beta(z)),\ \deg(\alpha(z)-2\beta(z)),\ \deg(3\beta(z)-\alpha(z))\end{aligned}$$

之中存在某些小于 $\deg\alpha(z)$ 的情形.

情形 3.2.1 $\deg(2\alpha(z)-\beta(z))<\deg\alpha(z)$. 令 $2\alpha(z)-\beta(z)=p_1(z)$, 则 $\beta(z)=2\alpha(z)-p_1(z)$. 从而 (3.14) 式可改写成以下形式:

$$H_7(z)\mathrm{e}^{7\alpha(z)}+H_6(z)\mathrm{e}^{6\alpha(z)}+H_5(z)\mathrm{e}^{5\alpha(z)}+H_4(z)\mathrm{e}^{4\alpha(z)}+H_3(z)\mathrm{e}^{3\alpha(z)}+H_2(z)\mathrm{e}^{2\alpha(z)}\equiv 0,\tag{3.16}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&H_7(z) = (\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-3p_1(z)},\\
&H_6(z) = (2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-2p_1(z)},\\
&H_5(z) = -[(\beta'(z) - \alpha'(z) + 1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{-2p_1(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)} - 1)\mathrm{e}^{-p_1(z)},\\
&H_4(z) = [(\beta'(z) - \alpha'(z) - 1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} + \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{-p_1(z)} + \beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}\mathrm{e}^{-2p(z)},\\
&H_3(z) = -(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} + \alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-p_1(z)},\\
&H_2(z) = \alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}.
\end{aligned}
$$

显然, 对任意的 $i = 2, 3, \ldots, 7$, 均有

$$\rho(H_i(z)) < \deg\alpha(z).$$

因此, 由引理 2.3 可得

$$H_2(z) = \alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} \equiv 0,$$

即 $\alpha(z)$ 是一个常数, 矛盾.

情形 3.2.2 $\deg(\alpha(z)+\beta(z)) < \deg\alpha(z)$. 令 $\alpha(z)+\beta(z) = p_2(z)$, 则 $\beta(z) = -\alpha(z)+p_2(z)$. 因此, (3.14) 式可改写成以下形式:

$$J_2(z)\mathrm{e}^{2\alpha(z)} + J_1(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)} + J_0(z) + J_{-1}(z)\mathrm{e}^{-\alpha(z)} + J_{-2}(z)\mathrm{e}^{-2\alpha(z)} \equiv 0,$$

其中

$$
\begin{aligned}
&J_2(z) = \alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)} - 1)\mathrm{e}^{p_2(z)},\\
&J_1(z) = [(\beta'(z) - \alpha'(z) - 1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} + \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{p_2(z)},\\
&J_0(z) = (2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{2p_2(z)} - (\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} + \alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{p_2(z)},\\
&J_{-1}(z) = -[(\beta'(z) - \alpha'(z) + 1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{2p_2(z)},\\
&J_{-2}(z) = \beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}\mathrm{e}^{2p_2(z)} - \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)} - 1)\mathrm{e}^{3p_2(z)}.
\end{aligned}
$$

显然, 对任意的 $i = -2, -1, \ldots, 2$, 均有 $\rho(J_i(z)) < \deg\alpha(z)$. 因此, 由引理 2.3 可得

$$J_{-2}(z) \equiv J_{-1}(z) \equiv J_0(z) \equiv J_1(z) \equiv J_2(z) \equiv 0.$$

由 $J_2(z) \equiv 0$ 以及 $J_{-2}(z) \equiv 0$, 可得

$$(1 - \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{p_2(z)} + \alpha'(z) \equiv 0, \quad (1 - \mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)})\mathrm{e}^{p_2(z)} + \beta'(z) \equiv 0. \tag{3.17}$$

显然, $\alpha(z)+\beta(z) = p_2(z)$ 以及 $\deg(2\alpha(z) - \beta(z)) < \deg\alpha(z) = \deg\beta(z)$, 可知

$$\deg p_2(z) \le \deg\Delta_c\beta(z) = \deg\beta(z) - 1.$$

如果 $\deg p_2(z) < \deg\Delta_c\beta(z) = \deg\beta(z) - 1$, 则由 (3.17) 式以及 Nevanlinna 第一基本定理, 可得

$$T(r, \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}) = T\left(r, \frac{\mathrm{e}^{p_2(z)} + \alpha'(z)}{\mathrm{e}^{p_2(z)}}\right) \le S(r, \mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}),$$

即 $\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}$ 是常数, 这与 $0 \le \deg p_2(z) < \deg\Delta_c\beta(z)$ 矛盾.

因此 $\deg p_2(z) = \deg\Delta_c\beta(z)$.

如果 $\deg p_2(z)=\deg \Delta_c\beta(z)\geq 1$, 则显然 $\deg\alpha(z)=\deg\beta(z)\geq 2$, 此时 $\alpha'(z)\not\equiv 0$. 由 (3.17) 式可得

$$\mathrm{e}^{p_2(z)}+\alpha'(z)\equiv \mathrm{e}^{p_2(z)+\Delta_c\beta(z)}. \tag{3.18}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理以及 (3.18) 式, 有

$$\begin{aligned}T(r,\mathrm{e}^{p_2(z)})&\leq N(r,\mathrm{e}^{p_2(z)})+N\left(r,\frac{1}{\mathrm{e}^{p_2(z)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{\mathrm{e}^{p_2(z)}+\alpha'(z)}\right)+S(r,\mathrm{e}^{p_2(z)})\\&\leq N\left(r,\frac{1}{\mathrm{e}^{p_2(z)+\Delta_c\beta(z)}}\right)+S(r,\mathrm{e}^{p_2(z)})\\&\leq S(r,\mathrm{e}^{p_2(z)}),\end{aligned}$$

即 $\mathrm{e}^{p_2(z)}$ 是一个常数, 这与 $\deg p_2(z)\geq 1$ 矛盾.

如果 $\deg p_2(z)=\deg\Delta_c\beta(z)=0$, 则 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$ 是两个一次多项式. 不妨设

$$\alpha(z)=a_1z+a_0,\quad \beta(z)=-a_1z+b_0, \tag{3.19}$$

其中 $a_1\neq 0, a_0, b_0$ 是常数.

从 (3.17) 式与 (3.19) 式, 可得

$$(1-\mathrm{e}^{-a_1c})\mathrm{e}^{p_2(z)}+a_1\equiv 0,\quad (1-\mathrm{e}^{a_1c})\mathrm{e}^{p_2(z)}-a_1\equiv 0. \tag{3.20}$$

解以上方程组可得 $a_1=0$, 矛盾.

情形 3.2.3 $\deg(\alpha(z)-\beta(z))<\deg\alpha(z)$. 令 $p_3(z)=\beta(z)-\alpha(z)$, 则 $\beta(z)=\alpha(z)+p_3(z)$. 因此, (3.14) 式可改写成以下形式:

$$W_4(z)\mathrm{e}^{4\alpha(z)}+W_3(z)\mathrm{e}^{3\alpha(z)}+W_2(z)\mathrm{e}^{2\alpha(z)}\equiv 0,$$

其中

$$\begin{aligned}W_4(z)&=-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1)\mathrm{e}^{p_3(z)}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{2p_3(z)}\\&\quad-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1)\mathrm{e}^{3p_3(z)},\\W_3(z)&=[(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{p_3(z)}\\&\quad-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{2p_3(z)},\\W_2(z)&=\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{p_3(z)}+\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}\mathrm{e}^{2p_3(z)}.\end{aligned}$$

显然, 对任意的 $i=2,3,4$, 均有

$$\rho(W_i(z))<\deg\alpha(z).$$

因此, 由引理 2.3 可得

$$W_2=W_3=W_4\equiv 0.$$

由 $\beta(z)=\alpha(z)+p_3(z)$, 易得 $\Delta_c\beta(z)=\Delta_c\alpha(z)+\Delta p_3(z)$. 因此, W_2 可改写成以下形式:

$$W_2(z)=\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}[\alpha'(z)-(\beta'(z)+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta p_3(z)})\mathrm{e}^{p_3(z)}+\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta p_3(z)}\mathrm{e}^{2p_3(z)}]. \tag{3.21}$$

结合 $W_2(z)\equiv 0$ 与 (3.21) 式, 可得

$$\alpha'(z)-(\beta'(z)+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta p_3(z)})\mathrm{e}^{p_3(z)}+\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta p_3(z)}\mathrm{e}^{2p_3(z)}\equiv 0. \tag{3.22}$$

如果 $\deg p_3(z)\geq 1$, 则由引理 2.3, 可得 $\beta'(z)\equiv 0$, 但这与 $\deg\beta(z)\geq 1$ 矛盾.

因此 $\deg p_3(z)=0$, 从而 $p_3(z)$ 是一个常数, 即有

$$\Delta p_3(z)=0 \quad 且 \quad \alpha'(z)=\beta'(z). \tag{3.23}$$

由 (3.22) 式以及 (3.24) 式, 可得

$$\mathrm{e}^{2p_3(z)}-2\mathrm{e}^{p_3(z)}+1=0. \tag{3.24}$$

解 (3.24) 式可得 $\mathrm{e}^{p_3(z)}=1$, 从而 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}=\mathrm{e}^{\beta(z)}$, 这与假设 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$ 矛盾.

情形 3.2.4 $\deg(3\alpha(z)-\beta(z))<\deg\alpha(z)$. 令 $3\alpha(z)-\beta(z)=p_4(z)$, 则 $\beta(z)=3\alpha(z)-p_4(z)$. 因此, (3.14) 式可改写成以下形式:

$$N_7(z)\mathrm{e}^{10\alpha(z)}+N_6(z)\mathrm{e}^{8\alpha(z)}+N_5(z)\mathrm{e}^{7\alpha(z)}+N_4(z)\mathrm{e}^{6\alpha(z)}+N_3(z)\mathrm{e}^{5\alpha(z)}+N_2(z)\mathrm{e}^{4\alpha(z)}+N_1(z)\mathrm{e}^{2\alpha(z)}\equiv 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
N_7(z)&=-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1)\mathrm{e}^{-3p_4(z)},\\
N_6(z)&=(2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-2p_4(z)},\\
N_5(z)&=-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{-2p_4(z)},\\
N_4(z)&=\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}\mathrm{e}^{-2p_4(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1)\mathrm{e}^{-p_4(z)},\\
N_3(z)&=[(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{-p_4(z)},\\
N_2(z)&=-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-p_4(z)},\\
N_1(z)&=\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}.
\end{aligned}$$

显然, 对任意的 $i=1,2,\dots,7$, 均有 $\rho(N_i(z))<\deg\alpha(z)$. 因此, 由引理 2.3 可得 $N_1\equiv 0$, 即 $\alpha(z)$ 是常数, 这与 $\deg\alpha(z)\geq 1$ 矛盾.

情形 3.2.5 $\deg(3\beta(z)-\alpha(z))<\deg\alpha(z)$. 令 $3\beta(z)-\alpha(z)=p_5(z)$, 则 $\alpha(z)=3\beta(z)-p_5(z)$. 因此, (3.14) 式可改写成以下形式:

$$M_7(z)\mathrm{e}^{10\beta(z)}+M_6(z)\mathrm{e}^{8\beta(z)}+M_5(z)\mathrm{e}^{7\beta(z)}+M_4(z)\mathrm{e}^{6\beta(z)}+M_3(z)\mathrm{e}^{5\beta(z)}+M_2(z)\mathrm{e}^{4\beta(z)}+N_1(z)\mathrm{e}^{2\beta(z)}\equiv 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
M_7(z)&=-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1)\mathrm{e}^{-3p_5(z)},\\
M_6(z)&=(2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-2p_5(z)},\\
M_5(z)&=[(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{-2p_5(z)},\\
M_4(z)&=\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\mathrm{e}^{-2p_5(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1)\mathrm{e}^{-p_5(z)},\\
M_3(z)&=-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{-p_5(z)},\\
M_2(z)&=-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{-p_5(z)},\\
M_1(z)&=\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}.
\end{aligned}$$

显然, 对任意的 $i=1,2,\dots,7$, 均有

$$\rho(M_i(z))<\deg\beta(z).$$

因此, 由引理 2.3 可得 $M_1\equiv 0$, 即 $\beta(z)$ 是常数, 这与 $\deg\beta(z)\geq 1$ 矛盾.

情形 3.2.6 $\deg(\alpha(z)-2\beta(z)) < \deg\alpha(z)$. 令 $\alpha(z)-2\beta(z)=p_6(z)$, 则 $\alpha(z)=2\beta(z)+p_6(z)$. 因此, (3.14) 式可改写成以下形式:

$$K_7(z)\mathrm{e}^{7\beta(z)}+K_6(z)\mathrm{e}^{6\beta(z)}+K_5(z)\mathrm{e}^{5\beta(z)}+K_4(z)\mathrm{e}^{4\beta(z)}+K_3(z)\mathrm{e}^{3\beta(z)}+K_2(z)\mathrm{e}^{2\beta(z)}\equiv 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
K_7(z)&=-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-1)\mathrm{e}^{3p_6(z)},\\
K_6(z)&=(2\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)+\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{2p_6(z)},\\
K_5(z)&=[(\beta'(z)-\alpha'(z)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}]\mathrm{e}^{2p_6(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}(\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}-1)\mathrm{e}^{p_6(z)},\\
K_4(z)&=\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\mathrm{e}^{2p_6(z)}-[(\beta'(z)-\alpha'(z)+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}]\mathrm{e}^{p_6(z)},\\
K_3(z)&=-(\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+\alpha'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)})\mathrm{e}^{p_6(z)},\\
K_2(z)&=\beta'(z)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}.
\end{aligned}$$

显然, 对任意的 $i=2,\dots,7$, 均有

$$\rho(K_i(z))<\deg\beta(z).$$

因此, 由引理 2.3 可得 $K_2\equiv 0$, 即 $\beta(z)$ 是常数, 这与 $\deg\beta(z)\ge 1$ 矛盾.

至此, 定理 1.8 证明完毕.

4 定理 1.10 的证明

由于 $f(z),f'(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 a, 并且 $f(z)$ 是一个有穷级整函数, 因此有

$$\frac{f'(z)-a}{f(z)-a}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{\Delta_c f(z)-a}{f(z)-a}=\mathrm{e}^{\beta(z)}, \tag{4.1}$$

其中 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$ 是两个多项式, 并且满足 $\deg\alpha(z)\le\rho(f)$, $\deg\beta(z)\le\rho(f)$.

如果 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$, 则显然 $f'(z)\equiv\Delta_c f(z)$. 因此, 以下仅需讨论 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$ 的情形.

令

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)-\Delta_c f(z)}{f(z)-a}. \tag{4.2}$$

由 (4.1) 式以及 (4.2) 式, 可得

$$\varphi(z)=\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)}. \tag{4.3}$$

因为 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$, 所以 $\varphi(z)\not\equiv 0$. 由 (4.2) 式以及引理 2.2, 可得

$$T(r,\varphi)=m(r,\varphi)\le m\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{\Delta_c f}{f-a}\right)+\log 2=S(r,f). \tag{4.4}$$

由 (4.3) 式可得 $\mathrm{e}^\alpha/\varphi-\mathrm{e}^\beta/\varphi\equiv 1$. 由 (4.4) 式以及 Nevanlinna 第二基本定理, 可得

$$\begin{aligned}
T\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right)&\le N\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right)+N\left(r,\frac{\varphi}{\mathrm{e}^\alpha}\right)+N\left(r,\frac{1}{\mathrm{e}^\alpha/\varphi-1}\right)+S\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right)\\
&\le N\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right)+N\left(r,\frac{\varphi}{\mathrm{e}^\alpha}\right)+N\left(r,\frac{\varphi}{\mathrm{e}^\beta}\right)+S\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right)\\
&\le S(r,f)+S\left(r,\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

再结合 (4.4) 与 (4.5) 式, 可得 $T(r,\mathrm{e}^{\alpha})=S(r,f)$. 同理可得

$$T(r,\mathrm{e}^{\beta})=S(r,f).$$

由 (4.1) 第一个式子, 可得

$$f'(z)=\mathrm{e}^{\alpha(z)}f(z)-a\mathrm{e}^{\alpha(z)}+a. \tag{4.6}$$

对两边同时做平移变换, 可得

$$f'(z+c)=\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}f(z+c)-a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}+a. \tag{4.7}$$

另一方面, 从 (4.1) 的第二个式子, 可得

$$f(z+c)=(\mathrm{e}^{\beta(z)}+1)f(z)-a\mathrm{e}^{\beta(z)}+a. \tag{4.8}$$

对 (4.8) 两边同时求一阶导数, 可得

$$f'(z+c)=\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}f(z)+(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})f'(z)-a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}. \tag{4.9}$$

由 (4.6) 与 (4.9) 式, 可得

$$f'(z+c)=[\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}+(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})\mathrm{e}^{\alpha(z)}]f(z)+a(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})(1-\mathrm{e}^{\alpha(z)})-a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}. \tag{4.10}$$

由 (4.7) 与 (4.8) 式, 可得

$$f'(z+c)=\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(\mathrm{e}^{\beta(z)}+1)f(z)+a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(1-\mathrm{e}^{\beta(z)})+a(1-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}). \tag{4.11}$$

结合 (4.9) 与 (4.11) 式, 有

$$\begin{aligned}&[\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}+(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(\mathrm{e}^{\beta(z)}+1)]f(z)\\&\quad=a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(1-\mathrm{e}^{\beta(z)})+a(1-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)})-a(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})(1-\mathrm{e}^{\alpha(z)})+a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

如果 $a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(1-\mathrm{e}^{\beta(z)})+a(1-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)})-a(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})(1-\mathrm{e}^{\alpha(z)})+a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}\not\equiv 0$, 则由 (4.12) 式以及 Nevanlinna 第一基本定理可知

$$\begin{aligned}T(r,f)&=T\left(r,\frac{a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(1-\mathrm{e}^{\beta(z)})+a(1-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)})-a(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})(1-\mathrm{e}^{\alpha(z)})+a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}+(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(\mathrm{e}^{\beta(z)}+1)}\right)+S(r,f)\\&\leq S(r,f),\end{aligned}$$

矛盾.

因此有

$$\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}+(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(\mathrm{e}^{\beta(z)}+1)\equiv 0, \tag{4.13}$$

$$a\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}(1-\mathrm{e}^{\beta(z)})+a(1-\mathrm{e}^{\alpha(z+c)})-a(1+\mathrm{e}^{\beta(z)})(1-\mathrm{e}^{\alpha(z)})+a\beta'(z)\mathrm{e}^{\beta(z)}\equiv 0. \tag{4.14}$$

结合 (4.13) 与 (4.14) 式, 可解得

$$\mathrm{e}^{\beta(z)}\equiv\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}. \tag{4.15}$$

显然 $\beta(z)=\alpha(z+c)+A_0$, 其中 A_0 是一个满足 $\mathrm{e}^{A_0}=1$ 的常数. 因此

$$\beta'(z)=\alpha'(z+c).$$

将 $\beta'(z)=\alpha'(z+c)$ 以及 (4.15) 代入 (4.13) 式, 整理可得

$$\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)})\mathrm{e}^{2\alpha(z)}+[(\alpha'(z+c)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+1]\mathrm{e}^{\alpha(z)}\equiv 0. \tag{4.16}$$

如果 $1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\not\equiv 0$. 由 (4.16) 式以及 Nevanlinna 第一基本定理, 可得

$$\begin{aligned}2T(r,\mathrm{e}^{\alpha(z)})=T(r,\mathrm{e}^{2\alpha(z)})&=T\left(r,\frac{[(\alpha'(z+c)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+1]\mathrm{e}^{\alpha(z)}}{\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}(1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)})}\right)\\&\le T(r,\mathrm{e}^{\alpha(z)})+S(r,\mathrm{e}^{\alpha(z)}),\end{aligned}\tag{4.17}$$

矛盾.

因此 $1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\equiv 0$, 从而 $\deg\alpha(z)\le 1$, 并且由 (4.16) 式知

$$(\alpha'(z+c)-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}+1\equiv 0.$$

结合 $1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha(z)}\equiv 0$ 可得 $\alpha'(z+c)\equiv 0$. 因此 $\alpha(z)$ 是一个常数, 从而

$$\mathrm{e}^{\alpha(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z+c)}=\mathrm{e}^{\beta(z)}.$$

这与假设 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv\mathrm{e}^{\beta(z)}$ 矛盾.

定理 1.10 证明完毕.

参 考 文 献

[1] Chen B. Q., Chen Z. X., Li S., Uniqueness theorems on entire functions and their difference operators or shifts, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, **2012**, Article ID 906893.

[2] Chen Z. X., Yi H. X., On sharing values of meromorphic functions and their differences, *Result. Math.*, 2013, **63**: 557–565.

[3] Chiang Y. M., Feng S. J., On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 2008, **16**(1): 105–129.

[4] Cui N., Chen Z. X., The conjecture on unity of meromorphic functions concerning their differences, *J. Difference Equ. Appl.*, 2016, **22**(10): 1452–1471.

[5] Halburd R. G., Korhonen R. J., Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **314**(2): 477–487.

[6] Halburd R. G., Korhonen R. J., Nevanlinna theory for the difference operator, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2006, **31**(2): 463–478.

[7] Hayman W. K., Meromorphic Functions, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[8] Heittokangas J., Korhonen R., Laine I., et al., Value sharing results for shifts of meromorphic function, and sufficient conditions for periodicity, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**: 352–363.

[9] Li X. M., Yi H. X., Yang C. C., Results on meromorphic functions sharing three values with their difference operators, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2015, **52**(5): 1401–1422.

[10] Liu D., Yang D. G., Fang M. L., Unicity of entire functions concerning shifts and difference operators, *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, **2014**, Article ID 380910.

[11] Lü F., Lü W. R., Meromorphic functions sharing three values with their difference operators, *Comput. Methods Funct. Theory*, 2017, **17**: 395–403.

[12] Qi X. G., Li N., Yang L. Z., Uniqueness of meromorphic functions concerning their differences and solutions of difference Painlevé equations, *Comput. Methods Funct. Theory*, 2018, **18**(4): 567–582.

[13] Yang C. C., Yi H. X., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Mathematics and Its Applications, 557, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[14] Ruble L. A., Yang C. C., Values shared by an entire function and its derivative, In: Comples Analysis (Proc. Com. Univ. Kentnchy), Vol. 599, 1977: 101–103.

[15] Yang L., Value Distribution Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[16] Zhang J., Liao L. W., Entire functions sharing some values with their difference operators, *Sci. China Math.*, 2014, **57**: 2143–2152.