第62卷第5期 数学学报中文版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0703-06 **文献标识码: A**

渐近 Teichmüller 空间的不唯一性

黄志勇 周泽民

中国人民大学数学系 北京 100872
E-mail: huangzhiy@ruc.edu.cn; zzm@ruc.edu.cn

摘 要 设 $AT(\Delta)$ 是单位圆盘 Δ 上所有渐近 Teichmüller 等价类 $[[\mu]]$ 或 $[[f^\mu]]$ 构成的渐近 Teichmüller 空间. 本文证明了对 $AT(\Delta)$ 内的任意渐近极值的 f^μ, 总存在一个 $[[f^\mu]]$ 内的渐近极值映射 g^ν, 使边界伸缩商 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\neq 0$. 同时也获得了 $AT(\Delta)$ 在基点处的切空间上的类似结果.

关键词 Teichmüller 空间; 拟共形映射; 极值映射; 渐近 Teichmüller 空间
MR(2010) 主题分类 30C62, 30F60
中图分类 O174.5

Nonuniqueness Properties on Asymptotic Teichmuller Space

Zhi Yong HUANG Ze Min ZHOU

Department of Mathematics, Renmin University of China,
Beijing 100872, *P. R. China*
E-mail: *huangzhiy@ruc.edu.cn*; *zzm@ruc.edu.cn*

Abstract Let $AT(\Delta)$ be the asymptotic Teichmüller space on the unit disk Δ, viewed as the space of all asymptotic Teichmüller equivalence classes $[[\mu]]$ or $[[f^\mu]]$. It is shown that, for each asymptotically extremal $[[f^\mu]]$ in $AT(\Delta)$, there exists an asymptotically extremal g^ν in $[[f^\mu]]$ such that the boundary dilatation $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\neq 0$. A parallel result in the tangent space to $AT(\Delta)$ at the basepoint is also obtained.

Keywords Teichmüller space; quasiconformal mappings; extremal quasiconformal mappings; asymptotic Teichmüller space
MR(2010) Subject Classification 30C62, 30F60
Chinese Library Classification O174.5

1 引言

用 Δ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, Belt(Δ) 表示 Δ 上的所有有界可测函数带 L^∞ 范数构成的巴拿赫空间, $\mathscr{M}(\Delta)$ 表示 Belt(Δ) 内的开单位圆盘. 区域 $D\subset\mathbb{C}$ 上的一个拟共形映射指的是 D 与 $f(D)$ 之间的保向同胚, 并且有线性绝对连续性, $\|\frac{f_{\bar z}}{f_z}\|_\infty<1$, 其中 $\mu_f=\frac{f_{\bar z}}{f_z}$ 是 f 的复特征.

收稿日期: 2017-07-05; 接受日期: 2018-02-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571362, 11371045)
通讯作者: 周泽民

我们已经知道, 对任意 $\mu \in \mathscr{M}(\Delta)$, 存在唯一的 Δ 上以 μ 为复特征的拟共形自映射 f^μ, 且保持 1,−1, i 三点不动.

$\mathscr{M}(\Delta)$ 内的两个元素 μ, ν 被称作 Teichmüller 等价, 记作 $\mu \sim \nu$, 如果存在 $f^\mu(\Delta)$ 到 $f^\nu(\Delta)$ 上的共形映射 ψ, 使 $(f^\nu)^{-1} \circ \psi \circ f^\mu$ 同伦于恒同映射 (Mod $\partial\Delta$). Teichmüller 空间 $T(\Delta)$ 则定义成 $\mathscr{M}(\Delta)/\sim$, 即 $T(\Delta) := \{[\mu] : \mu \in \mathscr{M}(\Delta)\}$, 其中 $[\mu]$ 是 μ 的 Teichmüller 等价类 [1,10,11].

称一个拟共形映射 f 是渐近共形的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 Δ 的一个紧子集 E, 使得 f 的伸缩商在 $\Delta - E$ 上小于 $1+\varepsilon$. 把 Teichmüller 等价定义中的共形映射 ψ 换成是渐近共形的, 就是渐近 Teichmüller 等价的定义. 若 $\mathscr{M}(\Delta)$ 内的两个元素 μ, ν 是渐近 Teichmüller 等价的, 则记为 $\mu \approx \nu$, 并用 $[[f]]$ 或 $[[\mu]]$ 表示拟共形映射 f^μ 的渐近 Teichmüller 等价类. 渐近 Teichmüller 空间 $AT(\Delta)$ 定义为 $\mathscr{M}(\Delta)/\approx$, 即 $AT(\Delta) := \{[[\mu]] : \mu \in \mathscr{M}(\Delta)\}$. 由 Gardiner 和 Sullivan 开始了 $AT(\Delta)$ 的研究 [12]. 有关渐近 Teichmüller 空间的一般结果可见论文 [3, 4, 7,11]. 有关渐近 Teichmüller 空间的近期结果, 可见文 [9, 10, 19, 20, 21, 28].

对任意 $p \in \partial\Delta$, $[[\mu]]$ 在 p 处的边界伸缩商 $h_p([[\mu]])$ 定义为 [3, 4, 13]

$$h_p([[\mu]]) = \inf\{h_p^*(\nu) : \nu \in [[\mu]]\},$$

其中

$$h^*(\mu) = \inf_F\{\|\mu|_{\Delta-F}\|_\infty, F \text{是 } \Delta \text{ 的紧子集}\}.$$

$\zeta \in \Delta$ 被称作 $[[\mu]]$ 的本质边界点, 如果 $h_\zeta([[\mu]]) = h([[\mu]])$.

记 $A_1(\Delta) = \{\varphi : \varphi \text{ 在}\Delta\text{上解析 且 } \int_\Delta |\varphi| dxdy = 1\}$. 序列 $\{\varphi_n\} \subset A_1(\Delta)$ 被称作退化的, 如果 φ_n 在 Δ 的任意紧子集上一致收敛于 0, 并记作 $\{\varphi_n\} \subset A_1^d(\Delta)$.

$\mathscr{M}(\Delta)$ 内的两个元素 μ 和 ν 被称作是无穷小 Teichmüller 等价的, 如果 $\int_\Delta (\mu-\nu)\phi dxdy = 0$ 对任何 $\phi \in A_1(\Delta)$ 成立. 对任何 $\mu \in \mathscr{M}(\Delta)$, 用 $[\mu]_B$ 表示 μ 的无穷小 Teichmüller 等价类, 则无穷小 Teichmüller 空间定义为

$$B(\Delta) := \{[\mu]_B : \mu \in \mathscr{M}(\Delta)\}.$$

注意 $B(\Delta)$ 是 $T(\Delta)$ 在基点 $[[0]]$ 处的切空间.

$\mathscr{M}(\Delta)$ 内的两个元素 μ 和 ν 称作是渐近无穷小 Teichmüller 等价的, 如果 $\lim_{n\to\infty} \int_\Delta (\mu - \nu)\phi_n dxdy = 0$, 其中 ϕ_n 是退化的 Hamilton 序列对任何 $\mu \in \mathscr{M}(\Delta)$, 用 $[[\mu]]_B$ 或者 $[[f^\mu]]_B$ 表示 μ 的渐近无穷小 Teichmüller 等价类, 则渐近无穷小 Teichmüller 空间定义为

$$AB(\Delta) := \{[[\mu]]_B : \mu \in \mathscr{M}(\Delta)\}.$$

注意 $AB(\Delta)$ 是 $AT(\Delta)$ 在基点 $[[0]]$ 处的切空间.

$[[\mu]]_B$ 的边界伸缩商定义为

$$h([[\mu]]_B) = \inf\{h^*(\nu) : \nu \in [[\mu]]_B\}.$$

称 μ 或 f^μ 分别是 $AT(\Delta)$ 或 $AB(\Delta)$ 内的渐近极值的, 如果 $h^*(\mu) = h([[\mu]])$ (或 $h^*(\mu) = h([[\mu]]_B)$. 已有结果表明 μ 或 f^μ 是 $AT(\Delta)$ 内的渐近极值的当且仅当 μ 或 f^μ 是 $AB(\Delta)$ 内的渐近极值的.

给定 $\mathscr{M}(\Delta)$ 内的两个复特征 μ 和 ν, 渐近 Teichmüller 度量 d_{AT} 定义为

$$d_{AT}([[\mu]], [[\nu]]) = \frac{1}{2} \inf\left\{ \log \frac{1 + h^*(\frac{\mu-\nu}{1-\mu\overline{\nu}})}{1 - h^*(\frac{\mu-\nu}{1-\mu\overline{\nu}})} : \mu \in [[\mu]], \nu \in [[\nu]]\right\}.$$

一般地, 庞加莱圆盘指的是带庞加莱度量的单位圆盘, 其庞加莱度量为

$$\rho(z,\zeta) := \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right|}{1-\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right|}, \quad \forall\, z\in\Delta, \ \ \zeta\in\Delta.$$

称从 $[a,b]\subset[0,1)$ 到 $AT(\Delta)$ 的映射 $t\mapsto[[\mu_t]]$ 是关于庞加莱度量与 $AT(\Delta)$ 的度量的保距嵌入, 如果 $d_{AT}([[\mu_{t_1}]],[[\mu_{t_2}]])=\rho(t_1,t_2)$, $\forall\, t_1,t_2\in[a,b]$.

如果 $\Gamma: t\mapsto[[\mu_t]]$ 是 $[a,b]\subset[0,1)$ 到 $AT(\Delta)$ 的保距嵌入, 则 $\Gamma([a,b])$ 的像称作 $AT(\Delta)$ 内连接 $[[\mu_a]]$ 与 $[[\mu_b]]$ 的测地线. 我们已经知道, 如果 μ 是渐近极值的, $h^*(\mu)=k_0\neq 0$, 则映射

$$\Gamma_\mu:[0,k_0]\to AT(\Delta), \quad t\mapsto[[t\mu/k_0]]$$

是保距嵌入且 $\Gamma_\mu([0,k_0])$ 是 $AT(\Delta)$ 内连接 $[[\mu]]$ 与 $[[0]]$ 的测地线.

很多工作与 Teichmüller 空间的唯一极值问题相关. 自然地我们给出 $AT(\Delta)$内的如下定义:

如果 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})=0$ 对任意渐近极值的 $g\in[[f]]$ (或 $g\in[[f]]_B$) 成立, 称 f (或 μ) 是 $AT(\Delta)$ (或 $AB(\Delta)$) 的唯一极值. 我们将证明在 $AT(\Delta)$ 和 $AB(\Delta)$ 内没有唯一极值性.

定理 1.1 对任意给定的 $AT(\Delta)$ 的极值的 f^μ, 且 $h^*(\mu)>0$ 存在 $g^\nu\in[[f^\mu]]$, 使得

$$h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\neq 0.$$

定理 1.2 对任意给定的 $AB(\Delta)$ 的极值的 f^μ, 且 $h^*(\mu)>0$ 存在 $g^\nu\in[[f^\mu]]_B$, 使得

$$h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\neq 0.$$

注 1.3 $L^\infty(\Delta)$ 内的开球 $\mathscr{M}(\Delta)$ 不是线性空间, 因此没有理由假设如果 $\mu,\nu\in\mathscr{M}(\Delta)$, 则 $\mu-\nu$ 也属于 $\mathscr{M}(\Delta)$. 但是 $\frac{\mu-\nu}{1-\overline{\nu}\mu}$ 确实属于 $\mathscr{M}(\Delta)$. 这是因为

$$h^*\left(\frac{\mu-\nu}{1-\overline{\nu}\mu}\right)=h^*\left(\frac{\mu-\nu}{1-\overline{\nu}\mu}\frac{\partial g/\partial z}{\overline{(\partial g/\partial z)}}\right) \ \text{且}\ \ \mu_{f\circ g^{-1}(g(z))}=\frac{\mu-\nu}{1-\overline{\nu}\mu}\frac{\partial g/\partial z}{\overline{(\partial g/\partial z)}}.$$

因此条件 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\neq 0$ 是自然的, 其中 f, g 的复特征分别是 μ, ν.

众所周知, 对 $T(\Delta)$ 内的任意两点至少存在一条连接它们的测地线. 由于 Teichmüller 空间 $T(\Delta)$ 是无穷维的, 故测地线的唯一性问题变得非常复杂. 无穷维 Teichmüller 空间中测地线不唯一的第一个例子由 Li [13] 给出, 文 [2, 5, 6, 15–18, 21–25] 对测地线唯一性问题进行了深入研究.

著作 [11, 第 15 章] 证明了连接 $AT(\Delta)$ 内给定两点的测地线的存在性. 接下来, Fan [8] 研究了测地线的唯一性问题, 证明了在 $AT(\Delta)$ 内至少存在两个点, 有无穷多条测地线连接它们, 且连接 $T(\Delta)$ 内给定两点 $[\mu]$ 与 $[\nu]$ 的测地线的唯一性也不能保证在 $AT(\Delta)$ 内连接 $[[\mu]]$ 与 $[[\nu]]$ 的测地线是唯一的.

文 [28] 证明了如果 μ 是 $AT(\Delta)$ 的渐近极值的, 且 $h_p([[\mu]])<h([[\mu]])$ 对 Δ 的某个边界点 p 成立, 则在 $AT(\Delta)$ 内有无穷多条测地线连接 $[[0]]$ 与 $[[\mu]]$.

我们提出如下至今未解决的问题.

问题 1.4 对任意给定$AT(\Delta)$的非零极值的μ, $AT(\Delta)$内有无穷多条测地线连接 $[[0]]$与$[[\mu]]$.

2 定理的证明

在本部分通过引理证明定理 1.1 和 1.2.

引理 2.1 [27] 设 f 是 Δ 到自身的拟共形映射, 其 Beltrami 系数 $\mu(z)\in M(\Delta)$. 设 z_0 是 Δ

内任意给定的点, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 与 Δ 上的拟共形映射 g 满足下列条件:

$$\mu_g(z)=\mu(z),\quad |z-z_0|\le\delta^2; \tag{2.1}$$

$$|\mu_g(z)|<\varepsilon,\quad \delta^2<|z-z_0|<\delta; \tag{2.2}$$

$$g(z)=z,\quad |z-z_0|\ge\delta, \tag{2.3}$$

其中 $\{z:\delta^2<|z-z_0|<\delta\}\subset\Delta$.

由引理 2.1 得到如下推论.

推论 2.2 设 f 是 Δ 到自身的拟共形映射, 其 Beltrami 系数 $\mu(z)\in M(\Delta)$. 设 z_0 是 Δ 内任意给定的点, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 与 Δ 上的拟共形映射 F 满足下列条件:

$$\mu_F(z)=0,\quad |z-z_0|\le\delta^2; \tag{2.4}$$

$$|\mu_F(z)|<k_0+\varepsilon,\quad \delta^2<|z-z_0|<\delta; \tag{2.5}$$

$$F(z)=f(z),\quad |z-z_0|\ge\delta, \tag{2.6}$$

其中 $k_0=\|\mu\|_\infty$, $\{z:\delta^2<|z-z_0|<\delta\}\subset\Delta$.

证明 由引理 2.1, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 和 Δ 上的拟共形映射 g 满足下列条件:

$$\mu_g(z)=\mu,\quad |z-z_0|\le\delta^2;$$
$$|\mu_g(z)|<\varepsilon/3,\quad \delta^2<|z-z_0|<\delta;$$
$$g(z)=z,\quad |z-z_0|\ge\delta.$$

令 $F(z)=f\circ g^{-1}(g(z))$. 由复特征的转换公式, 有

$$\mu_F=\frac{\mu_f-\mu_g}{1-\mu_f\overline{\mu}_g}\cdot\frac{\partial g/\partial z}{\overline{(\partial g/\partial z)}}.$$

不难证明 F 满足条件 (2.4)–(2.6). 推论证毕. 证毕.

定理 1.1 的证明 对于任意 $p\in\partial\Delta$, 如果 $h_p^*(\mu)<h^*(\mu)$, 则由文 [27] 的结果, 存在极值的 $\nu\in[[\mu]]$, 使得 $h^*(\mu-\nu)\ne 0$. 由于

$$\mu(f\circ g^{-1}(g(z)))=\frac{\mu_f-\mu_g}{1-\mu_f\overline{\mu}_g}\cdot\frac{\partial g/\partial z}{\overline{(\partial g/\partial z)}},$$

其中 f 和 g 的复特征分别为 μ_f 和 μ_g, 从而有 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))})\ne 0$. 定理 1.1 得到证明.

于是不妨假设对任意给定的 $p\in\partial\Delta$, $h_p^*(\mu)=h^*(\mu)$.

令 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 是满足下列条件的区域序列:

$$E_n\subset\left\{z:z\in\Delta,\,|z-p|<\frac{1}{n}\right\}; \tag{2.7}$$

$$|\mu|_{E_n}|\ge h_p^*(\mu)-\frac{1}{n}. \tag{2.8}$$

对每个 E_n 取 $z_n\in E_n$, 令 $D_n=\{z:|z-z_n|<\delta_n\}$, 使得 $D_m\cap D_n=\emptyset\,(m\ne n)$. 由推论 2.2, 对给定的 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}\,(n=2,3,\ldots)$, 存在 $\eta_n>0\,(\eta_n<\delta_n)$ 和 Δ 上的拟共形映射 g_n 满足下列条件:

$$\mu_{g_n}(z)=0,\quad |z-z_n|\le\eta_n^2; \tag{2.9}$$

$$|\mu_{g_n}(z)|<k_0+\frac{1}{n},\quad \eta_n^2<|z-z_n|<\eta_n; \tag{2.10}$$

$$g_n(z)=f(z),\quad |z-z_0|\ge\eta_n, \tag{2.11}$$

其中 $k_0=\|\mu\|_\infty$.

令

$$
g(z) := \begin{cases} g_n(z), & z \in D_n; \\ f(z), & z \in \Delta - \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right\}. \end{cases} \tag{2.12}
$$

对任意给定的 $\delta > 0$, 存在数 N, 对所有 $n > N$, $z_n \in \{z : |z-p| < \delta\} \cap \Delta$. 由于

$$
\mu_{g_n}(z) = 0, \quad |z - z_n| \le \eta_n^2, \tag{2.13}
$$

所以有

$$
\mu_g(z) = 0, \quad |z - z_n| \le \eta_n^2. \tag{2.14}
$$

结合 (2.8) 到 (2.14), 有 $h^*(\mu - \mu_g) \neq 0$. 又由于

$$
\mu(f \circ g^{-1}(g(z))) = \frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_f \overline{\mu}_g} \cdot \frac{\partial g/\partial z}{\overline{(\partial g/\partial z)}},
$$

也有 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))}) \neq 0$. 注意到 $g \in [[\mu]]$ 是极值的, 完成证明.

下面记 $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$. 为证明定理 1.2, 把文 [27, 引理 2.1] 描述成以下引理.

引理 2.3 [27] 设 $\nu \in \mathscr{M}(\Delta)$. 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在某个 $r \in (0,1)$ 和 $\mu \in [[0]]_B$, 使得

$$
\mu(z) = \nu(z), \quad z \in \Delta_r \quad 和 \quad \|\mu|_{\Delta\setminus\Delta_r}\| < \epsilon
$$

成立.

定理 1.2 的证明 对给定的极值的 $\mu \in AB(\Delta)$, 令 $h_0 = h^*(\mu)$. 下面将构造一个极值的 $\nu \in [[\mu]]_B$, 使得 $h^*(\mu - \nu) > 0$ 成立.

令 $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$. 对于点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Delta$, $|z_n| \to 1$ $(n \to \infty)$, 我们构造圆盘列 $\{D(z_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对每个 n, $D(z_n, r_n) \subset \Delta$ 且 $D(z_n, r_n) \cap D(z_m, r_m) = \emptyset$ 对于任意 $m \neq n$ 成立.

对每个圆盘 $D(z_n, r_n)$, 考虑 $[[\mu|_{D(z_n,r_n)}]]_B$. 由引理 2.3 有 $\eta_n(z) \in [[0|_{D(z_n,r_n)}]]_B$ 及 $r_n' \in (0, r_n]$, 使得 $\eta_n(z) = -\mu(z)$, $z \in D(z_n, r_n')$ 及 $\|\eta_n|_{D(z_n,r_n)\setminus D(z_n,r_n')}\| < \frac{1}{n}$. 然后令

$$
\tilde{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) + \eta_n(z), & z \in D(z_n, r_n), \quad n = 1, 2, \ldots; \\ \mu(z), & 其它. \end{cases}
$$

由 $\eta_n(z)$ 的构造知 $\tilde{\mu}(z) \in [[\mu]]_B$ 且 $\tilde{\mu}$ 是 $AB(\Delta)$ 内的极值的. 若 $h^*(\mu - \tilde{\mu}) > 0$, 则定理证毕.

若 $h^*(\mu - \tilde{\mu}) = 0$, 注意到, 当 $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, r_n')$ 时, $\tilde{\mu}(z) = 0$ 及对所有 n, $(z - z_n) \in [[0|_{D(z_n,r_n)}]]_B$, 令

$$
\nu(z) := \begin{cases} \alpha_n(z - z_n), & z \in D(z_n, r_n'), \quad n = 1, 2, \ldots; \\ \tilde{\mu}(z), & 其它, \end{cases}
$$

其中 α_n 是满足 $0 < \epsilon_0 < \alpha_n r_n' < h_0$ 的正常数. 在 $h^*(\mu - \tilde{\mu}) = 0$ 的假设下, 根据构造有 $\nu \in [[\mu]]_B$ 及 $h^*(\nu - \mu) = h^*(\nu - \tilde{\mu}) > \epsilon_0 > 0$.

由于

$$
\mu(g \circ f^{-1}(f(z))) = \frac{\mu_g - \mu_f}{1 - \mu_g \overline{\mu}_f} \cdot \frac{\partial f/\partial z}{\overline{(\partial f/\partial z)}},
$$

其中 f, g 的复特征分别是 μ, ν, 得到 $h^*(g \circ f^{-1}(f(z))) \neq 0$, 也有 $h^*(\mu_{f\circ g^{-1}(g(z))}) \neq 0$. 证毕.

致谢 感谢陈纪修教授及范金华教授的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] Ahlfors L. V., Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, New York, 1966.

[2] Božin V., Lakic N., Marković V., et al., Unique extremality, *J. Anal. Math.*, 1998, **75**: 299–338.

[3] Earle C. J., Gardiner F. P., Lakic N., Asymptotic Teichmüller spaces. Part I. The complex structure, *Contemp. Math.*, 2000, **256**: 17–38.

[4] Earle C. J., Gardiner F. P., Lakic N., Asymptotic Teichmüller spaces, Part II, the metric structure, *Contemp. Math.*, 2004, **355**: 187–219.

[5] Earle C. J., Kra I., Krushkal S., Holomorphic motions and Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, **343**: 927–948.

[6] Earle C. J., Li Z., Isometrically embedded polydisks in infinite dimensional Teichmüller spaces, *J. Geom. Anal.*, 1999, **9**: 51–71.

[7] Earle C. J., Markovic V., Saric D., Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller spaces, *Contemp. Math.*, 2002, **311**: 85–105.

[8] Fan J., On geodesics in asymptotic Teichmüller spaces, *Math. Z.*, 2011, **267**: 767–779.

[9] Fletcher A., On asymptotic Teichmüller space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2010, **362**(5): 2507–2523.

[10] Fletcher A., Markovic V., Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory, Oxford University Press, New York, 2007.

[11] Gardiner F. P., Lakic N., Quasiconformal Teichmüller Spaces, Math. Surveys and Monographs, Vol. 76, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[12] Gardiner F. P., Sullivan D. P., Symmetric structures on a closed curve, *Amer. J. Math.*, 1992, **114**: 683–736.

[13] Lakic N., Substantial boundary points for plane domains and Gardiner's conjecture, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2000, **25**: 285–306.

[14] Li Z., Nonuniqueness of geodesics in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Complex Var. Theory Appl.*, 1991, **16**: 261–272.

[15] Li Z., Nonuniqueness of geodesics in infinite-dimensional Teichmüller spaces II, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 1993, **18**: 355–367.

[16] Li Z., Non-convexity of spheres in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Sci. China Ser. A*, 1994, **37**: 924–932.

[17] Li Z., A note on geodesics in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 1995, **20**: 301–313.

[18] Li Z., Closed geodesics and non-differentiability of the metric in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, **124**: 1459–1465.

[19] Miyachi H., On invariant distances on asymptotic Teichmüller spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2006, **134**: 1917–1925.

[20] Miyachi H., Image of asymptotic Bers map, *J. Math. Soc. Japan*, 2008, **60**: 1255–1276.

[21] Qi Y., Wu Y., On nonuniqueness of geodesics and geodesic disks in the universal asymptotic Teichmüller space, *Acta Math. Sin., Engl. Series*, 2017, **33**(2): 201–209.

[22] Shen Y., Some remarks on the geodesics in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Acta Mathematica Sinica, New Series*, 1997, **13**(3): 497–502.

[23] Shen Y., On the geometry of infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Acta Mathematica Sinica, New Series*, 1997, **13**(3): 413–420.

[24] Shen Y., On Teichmüller geometry, *Complex Var. Theory Appl.*, 2001, **44**: 73–83.

[25] Tanigawa H., Holomorphic families of geodesic discs in infinite-dimensional Teichmüller spaces, *Nagoya Math. J.*, 1992, **127**: 117–128.

[26] Yao G., On infinitesimally weakly non-decreasable Beltrami differentials, arXiv:1610.09313.

[27] Zhou Z., On extremal quasiconformal mapping of landslide type, *Chinese J. Contemporary Math.*, 2011, **32**: 279–284.

[28] Zhou Z., Chen J., On geodesics in asymptotic universal Teichmüller space, *Proc. Edin. Math. Soc.*, 2016, **59**(4): 1065–1074.