第62卷第5期 数学学报中文版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0687-16 **文献标识码: A**

带超级光滑噪声密度函数的小波自适应点态估计

吴 聪 曾晓晨 王晋茹

北京工业大学应用数理学院 北京 100124
E-mail: wuc@emails.bjut.edu.cn; zengxiaochen@bjut.edu.cn;
wangjinru@bjut.edu.cn

摘 要 利用小波方法在局部 Hölder 空间中研究一类反卷积密度函数的点态估计问题. 首先, 针对超级光滑噪声给出该模型任一估计器的点态风险下界; 其次, 构造有限求和小波估计器, 并证明其在超级光滑噪声条件下达到了最优收敛阶, 即该估计器在点态风险下的收敛速度与下界一致. 最后, 还讨论了这类小波估计器的强收敛性. 值得指出的是上述估计都是自适应的.

关键词 小波; 点态密度估计; 自适应; 最优性
MR(2010) 主题分类 42C40, 62G07, 62G20
中图分类 O174.2

Wavelet Adaptive Pointwise Density Estimations with Super-smooth Noises

Cong WU Xiao Chen ZENG Jin Ru WANG

College of Applied Sciences, Beijing University of Technology,
Beijing 100124, *P. R. China*
E-mail: *wuc@emails.bjut.edu.cn*; *zengxiaochen@bjut.edu.cn*;
wangjinru@bjut.edu.cn

Abstract This paper considers pointwise deconvolution estimation of density functions under the local Hölder condition by wavelet method. We firstly give a lower bound of any estimator with super-smooth noises. Then the practical linear wavelet estimator is constructed to obtain the optimal convergence rate, which means that the rate coincides with the lower bound. The strong convergence rate of the defined wavelet estimator is also provided. It should be pointed out that all above estimations are adaptive.

Keywords wavelets; pointwise density estimation; adaptivity; optimality
MR(2010) Subject Classification 42C40, 62G07, 62G20
Chinese Library Classification O174.2

收稿日期: 2018-10-29; 接受日期: 2019-01-09
基金项目: 国家自然科学基金 (11771030); 北京市自然科学基金 (1172001); 北京市博士后工作经费 (ZZ2019-77); 北京工业大学基础研究基金 (006000546319511, 006000546319528)
通讯作者: 曾晓晨

1 引言

带加法噪声 (反卷积) 密度估计在统计学、经济学等领域具有重要的理论意义和应用价值 (见文 [13]), 其数学模型概述如下: 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 为 Y 的独立同分布的随机样本:

$$Y = X + \varepsilon, \tag{1.1}$$

其中 X 表示密度函数为 f (未知) 的实值随机变量, ε 是与 X 独立的噪声变量且其密度函数为 f_ε. 考虑如何由 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 定义恰当的估计器 $\hat{f}_n(\cdot; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, 使其在某种意义下逼近真实的密度函数 f.

由于观测变量 Y 的密度函数 f_Y 等于 f 与 f_ε 的卷积,

$$f_Y(y) = f * f_\varepsilon(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) f_\varepsilon(y - x) dx.$$

因而上述模型称为反卷积密度估计模型. 特别地, 当 f_ε 退化为 Dirac 泛函 δ 时, $f_Y = f * \delta = f$, 此时模型 (1.1) 退化为经典的无噪声密度估计模型.

在实际应用中, 人们更关注密度函数 f 在某个固定点 x_0 的值的估计. 然而, 相比于 L^p 风险估计的研究成果 [9, 10, 12, 14–17, 26], 点态风险估计问题的研究较少. 在一个密度函数集 Ψ 上, 估计器 $\hat{f}_n$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的点态极大风险是指

$$R_{p,n}(\hat{f}_n, \Psi, x_0) := \sup_{f \in \Psi} \left[E|\hat{f}_n(x_0) - f(x_0)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

其中 $\hat{f}_n(x) := \hat{f}_n(x; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 且 EX 表示随机变量 X 的数学期望. 进一步, 若

$$R_{p,n}(\hat{f}_n^*, \Psi, x_0) \lesssim \inf_{\hat{f}_n} R_{p,n}(\hat{f}_n, \Psi, x_0),$$

则称估计器 $\hat{f}_n^*$ 在集合 Ψ 上达到了最优. 这里及以后, 对于两个变量 A 和 B, $A \lesssim B$ 表示 $A \leq CB$ (C 为独立于 A 和 B 的正常数); $A \gtrsim B$ 意指 $B \lesssim A$; $A \sim B$ 表示 $A \gtrsim B$ 与 $A \lesssim B$ 同时成立. 易见, $R_{p,n}(\hat{f}_n^*, \Psi, x_0) \geq \inf_{\hat{f}_n} R_{p,n}(\hat{f}_n, \Psi, x_0)$ 自然成立.

多尺度分析 (MRA) [11] 是小波分析的核心概念, 它是平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一列线性闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 且满足以下条件:

(i) 单调性: $V_j \subset V_{j+1}, \ \forall\, j \in \mathbb{Z}$;

(ii) 完备性: $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(iii) 伸缩性: $f(2\,\cdot) \in V_{j+1}$ 当且仅当对任一 $j \in \mathbb{Z}$, 有 $f(\,\cdot\,) \in V_j$;

(iv) 基的存在性: 存在 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 使得 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基, 其中 ϕ 称为 MRA 对应的尺度函数.

利用小波分析中的常用记号 $f_{jk}(\,\cdot\,) := 2^{\frac{j}{2}} f(2^j \cdot - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, 由上述定义可知: 固定 $j \in \mathbb{Z}$, $\{\phi_{jk}(\,\cdot\,)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是空间 V_j 的标准正交基. 给定尺度函数 ϕ,

$$\psi(\,\cdot\,) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi_{1k}(\,\cdot\,), \text{ 其中 } h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle$$

为 ϕ 对应的小波函数. 对固定的 $j \in \mathbb{Z}$, $\{\psi_{jk}(\,\cdot\,)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成空间 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间 W_j 的标准正交基. 这里, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. 进一步, 固定 $j_0 \in \mathbb{Z}$, $\{\phi_{j_0 k}(\,\cdot\,), \psi_{jk}(\,\cdot\,)\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ 与

$\{\psi_{jk}(\cdot)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 均构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基 (简称小波基). 从而对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 下述展式在 L^2 意义下成立:

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}+\sum_{j\ge j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_{jk}\psi_{jk},$$

其中 $\alpha_{jk}:=\langle f,\phi_{jk}\rangle$ 且 $\beta_{jk}:=\langle f,\psi_{jk}\rangle$.

一般地, 设 P_j 表示从 $L^2(\mathbb{R})$ 到其闭子空间 V_j 的正交投影算子, 则对 $f\in L^2(\mathbb{R})$,

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{jk}\phi_{jk}.$$

若 ϕ 满足 (θ) 条件, 即

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\phi(x-k)|\in L^\infty(\mathbb{R}),$$

那么对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 上述 P_jf 的定义也是有意义的.

一类重要的例子是 Meyer 尺度函数和小波函数, 其傅里叶变换是紧支无限次可微的, 即

$$\operatorname{supp}\phi^{ft}\subseteq\Big[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\Big]\ \text{且}\ \operatorname{supp}\psi^{ft}\subseteq\Big[-\frac{8\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\Big]\cup\Big[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\Big].$$

本文中, 函数 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换 f^{ft} 定义为

$$f^{ft}(t):=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx.$$

常规的方法可将上述定义推广到 $L^2(\mathbb{R})$ 函数.

下面对噪声变量 ε 做一些基本假定. 设 $\alpha>0$, $c_0>0$ 且 $\beta\in\mathbb{R}$, 若其密度函数 f_ε 满足:

(C1) $|f_\varepsilon^{ft}(t)|\lesssim(1+|t|^2)^{-\frac{\beta}{2}}\mathrm{e}^{-c_0|t|^\alpha}$;

(C2) $|(f_\varepsilon^{ft})'(t)|\lesssim(1+|t|^2)^{-\frac{\beta}{2}}\mathrm{e}^{-c_0|t|^\alpha}$;

(C3) $|f_\varepsilon^{ft}(t)|\gtrsim(1+|t|^2)^{-\frac{\beta}{2}}\mathrm{e}^{-c_0|t|^\alpha}$,

则称这类噪声是超级光滑的 (super-smooth noises). Gaussian 和 Cauchy 分布为其特例. 当 $c_0=0$ 且 $\beta\ge0$ 时, 该类噪声称之为适度光滑噪声 (ordinary-smooth noises).

毫无疑问, Gaussian 噪声在理论和应用中具有特别的重要性 [5, 6, 8, 22]. 记 $\mathbf{C}^m(\mathbb{R})$ 为实直线 $\mathbb{R}$ 上 m 次连续可微的函数集. Carroll 和 Hall [1] 证明了对 $\mathbf{C}^m(\mathbb{R})$ 中密度函数在 Gaussian 噪声条件下反卷积点态估计的收敛阶不会优于 $(\ln n)^{-\frac{m}{2}}$. 进一步, Stefanski 和 Carroll [21] 构造核估计器 $\hat f_n^K$, 并证明其点态风险达到此收敛阶, 即核估计器 $\hat f_n^K$ 在 $\mathbf{C}^m(\mathbb{R})$ 空间中是最优的. 1991 年, Fan [9] 在经典的 Hölder 球 $H^s(L)$ 中, 给出超级光滑噪声条件下的最优核估计, 即

$$(\ln n)^{-\frac{2s}{\alpha}}\lesssim\sup_{f\in H^s(L)}E|\hat f_n^K(x)-f(x)|\lesssim(\ln n)^{-\frac{2s}{\alpha}}.$$

显然, Fan 的工作是文 [1, 21] 的推广. 2013 年, Comte 和 Lacour [2] 利用核方法将这一工作推广到各向异性的高维 Hölder 空间中.

众所周知, 传统的核方法在处理非参数密度估计问题中是十分有效的, 但其仍存在着一些局限. 例如, 函数空间比较受限; 针对多峰性密度函数, 带宽选择不够灵活等. 幸运的是, 由于小波基的时频局部性, 多尺度特性以及刻画函数空间的功能, 小波方法可避免上述不足并拓宽了非参数统计的研究领域. 同时, 小波具有快速算法, 这在应用上尤为重要.

1999 年, Pensky 和 Vidakovic [20] 针对两类常见的噪声 (超级光滑噪声和适度光滑噪声), 利用 Meyer 小波构造反卷积估计器并在 Sobolev 球中 $W_2^s(L)$ 中讨论其 L^2 风险估计. 三年后, Fan 和 Koo [10] 将上述结论推广至更一般的函数类 Besov 球 $B_{r,q}^s(L)$ $(1\le r\le 2)$ 中. 2011 年, Lounici 和 Nickl [18] 考虑了 Besov 球 $B_{\infty,\infty}^s(L)$ 中的小波最优 L^∞ 风险估计. 2014 年, Li 和 Liu [14] 利用小波方法得到 Besov 球 $B_{r,q}^s(L)$ $(s>1/r,\ r,q\in[1,\infty])$ 中的最优 L^p 风险估计, 其中 $p\in[1,\infty)$.

反卷积模型中密度函数点态风险的小波估计研究相对较少, 首个研究成果可追溯到 1999 年 Walter 的文章 [24]. 另一方面, 上述所有估计都假定了待估密度函数的整体光滑性. 事实上, 为估计在固定点 x_0 的函数值 $f(x_0)$, 更为自然的是考虑密度函数 f 在该点某邻域内的光滑性.

固定 $x_0\in\mathbb{R}$, 若 $s\in(0,1]$ 且函数 f 满足对任意的 $x,y\in\Omega_{x_0}$ (Ω_{x_0} 为 x_0 的邻域), 存在常数 $C>0$, 使得

$$|f(y)-f(x)|\le C|y-x|^s, \tag{1.2}$$

则称函数 f 具有 s 阶局部 Hölder 光滑性.

条件 (1.2) 略强于条件

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|^s. \tag{1.3}$$

例如, $f(x)=|x|^sI_{\mathbb{Q}}(x)$, 其中 $I_{\mathbb{Q}}$ 表示有理数集 $\mathbb{Q}$ 上的特征函数. 取 $x_0=0$, 它满足条件 (1.3), 却不满足条件 (1.2), 这是因为上述函数 f 在 $x\ne0$ 处不连续. 显然, 若函数 f 属于经典的 Hölder 空间 $H^s(\mathbb{R})$ $(0<s<1)$, 则 f 在任意固定 $x_0\in\mathbb{R}$ 的邻域内都满足局部 Hölder 条件. 反之不然.

记 $H^s(\Omega_{x_0})$ 为满足条件 (1.2) 的函数集, 这里的 $C>0$ 为固定常数. 这个一致的常数 C 将在后面的讨论中起重要作用. 对 $s=N+\delta$, 其中 N 是非负整数且 $\delta\in(0,1]$, 那么 $f\in H^s(\Omega_{x_0})$ 意味着 $f^{(N)}\in H^\delta(\Omega_{x_0})$.

定义

$$H^s(\Omega_{x_0},M):=\{f\in H^s(\Omega_{x_0}),\ f\ \text{为密度函数且}\ \|f\|_\infty\le M\}.$$

容易看出, $H^s(\Omega_{x_0},M)\subseteq L^2(\mathbb{R})$, 这是因为

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\le\|f\|_\infty\|f\|_1\le M\|f\|_1<+\infty.$$

本文第 2 节给出超级光滑噪声条件下 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 空间中密度函数点态风险的下界估计. 具体地, 设 $\hat f_n$ 为 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 中密度函数 f 的任一估计器 (由样本 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 构造) 且 $1\le p<\infty$, 则

$$\inf_{\hat f_n}\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}\left[E|\hat f_n(x_0)-f(x_0)|^p\right]^{\frac1p}\gtrsim(\ln n)^{-\frac{s}{\alpha}}. \tag{1.4}$$

第 3 节将利用 Meyer 小波构造一类反卷积密度估计器, 并证明其在 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 空间中达到最优收敛阶 $(\ln n)^{-\frac{s}{\alpha}}$, 且该小波估计器是自适应的. 本文最后研究了模型 (1.1) 在超级光滑噪声条件下点态风险的强收敛性, 并得到与平均估计一致的收敛阶.

2 下界估计

为了给出 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 空间中反卷积密度估计的下界, 先叙述并证明下面的命题.

命题 2.1 设 Ψ 是一个密度函数集且 "d" 表示 $\Psi\times\Psi$ 上的某种度量. 若存在 $f_0, f_n\in\Psi$ (n 为样本容量) 满足:

(i) $f_0 * f_\varepsilon(x) > 0$;

(ii) $d(f_n, f_0) \ge a_n > 0$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}}(f_0 * f_\varepsilon)^{-1}(x)(f_n * f_\varepsilon)^2(x)dx \le \sqrt[n]{\lambda}$, 其中 $\lambda\in(1,5)$,

则对 $f\in\Psi$ 的任意估计器 $\hat{f}_n(x; Y_1,\dots,Y_n)$ 及 $1\le p<\infty$,

$$\inf_{\hat{f}_n}\sup_{f\in\Psi} E_{f_Y} d^p(\hat{f}_n, f) \gtrsim a_n^p.$$

证明 由 Jensen 不等式和 $1\le p<\infty$, 容易看出

$$E_{f_0*f_\varepsilon} d^p(\hat{f}_n, f_0) + E_{f_n*f_\varepsilon} d^p(\hat{f}_n, f_n) \ge [E_{f_0*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_0)]^p + [E_{f_n*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_n)]^p.$$

进一步, 根据 $f_0, f_n\in\Psi$,

$$2\sup_{f\in\Psi} E_{f_Y} d^p(\hat{f}_n, f) = 2\sup_{f\in\Psi} E_{f*f_\varepsilon} d^p(\hat{f}_n, f) \ge [E_{f_0*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_0)]^p + [E_{f_n*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_n)]^p. \tag{2.1}$$

因为 $p\ge 1$, 所以 $(|a|+|b|)^p \le 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$. 从而 (2.1) 的右端有下界

$$2^{1-p}[E_{f_0*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_0) + E_{f_n*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_n)]^p \gtrsim \big[E_{f_0*f_\varepsilon}|d(\hat{f}_n, f_n) - d(f_n, f_0)| + E_{f_n*f_\varepsilon} d(\hat{f}_n, f_n)\big]^p.$$

结合上式和条件 (ii), (2.1) 可化为

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\Psi} E_{f_Y} d^p(\hat{f}_n, f) &\gtrsim d^p(f_n, f_0)\big[E_{f_0*f_\varepsilon}|d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1| + E_{f_n*f_\varepsilon}[d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)]\big]^p\\ &\ge a_n^p\big[E_{f_0*f_\varepsilon}|d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1| + E_{f_n*f_\varepsilon}[d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)]\big]^p.\end{aligned}$$

因此, 为得到该命题的结论只需证明

$$I_n := E_{f_0*f_\varepsilon}|d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1| + E_{f_n*f_\varepsilon}[d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)] \gtrsim 1. \tag{2.2}$$

对 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 记

$$F_0(x) := \prod_{l=1}^n f_0 * f_\varepsilon(x_l),\quad F_n(x) := \prod_{l=1}^n f_n * f_\varepsilon(x_l) \text{ 及 } G_n(x) := \prod_{l=1}^n (f_0 * f_\varepsilon)^{-1}(x_l) f_n * f_\varepsilon(x_l).$$

由条件 (i) 可知 G_n 的定义是有意义的. 于是

$$\begin{aligned}E_{f_n*f_\varepsilon}[d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)F_n(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)G_n(x)F_0(x)dx.\end{aligned} \tag{2.3}$$

另一方面,

$$E_{f_0*f_\varepsilon}|d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1| = \int_{\mathbb{R}^n} |d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1|F_0(x)dx. \tag{2.4}$$

结合 (2.3), (2.4) 与 $|x-1|+|x|\ge 1$, 便有

$$\begin{aligned}I_n &\ge \int_{\mathbb{R}^n} \big[|d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n) - 1| + d^{-1}(f_n, f_0)d(\hat{f}_n, f_n)\big]\min\{1, G_n(x)\}F_0(x)dx\\ &\ge \int_{\mathbb{R}^n} \min\{1, G_n(x)\}F_0(x)dx.\end{aligned}$$

因为 $\min\{x,y\}=\frac{1}{2}\left[(x+y)-|x-y|\right]$, 所以

$$I_n \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[1+G_n(x)-|1-G_n(x)|\right]F_0(x)dx.$$

由于 $\int_{\mathbb{R}} f_0 * f_\varepsilon(x)dx=\int_{\mathbb{R}} f_n * f_\varepsilon(x)dx=1$, 易见 $\int_{\mathbb{R}^n} F_0(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x)F_0(x)dx=1$ 且

$$I_n \geq 1-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|1-G_n(x)|F_0(x)dx := 1-\frac{b_n}{2}. \tag{2.5}$$

利用 Jensen 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} b_n^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n}[1-G_n(x)]^2F_0(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left[1-2G_n(x)+G_n^2(x)\right]F_0(x)dx \\ &= -1+\int_{\mathbb{R}^n}G_n^2(x)F_0(x)dx. \end{aligned}$$

进一步, 根据 F_0 和 G_n 的定义及条件 (iii),

$$b_n^2 \leq \left[\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(f_n*f_\varepsilon)^2(x)dx\right]^n-1 \leq \lambda-1.$$

该式与 (2.5) 和 $\lambda\in(1,5)$ 表明

$$I_n \geq 1-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-1}>0,$$

这意味着 (2.2) 成立. 故命题得证. 证毕.

注 2.2 Fano 引理在经典的下界估计问题 [7, 14, 18] 中发挥重要作用. 本文考虑 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 空间的下界估计, 将利用命题 2.1 代替之. 为比较两种方法, 先介绍 Fano 引理.

设 P, Q 为两个概率测度且其密度函数分别为 p,q. 若 P 关于 Q 绝对连续, 则 P 和 Q 的 Kullback–Leilber (K–L) 散度定义为

$$K(P,Q):=\int_{p\cdot q>0}p(x)\ln\frac{p(x)}{q(x)}dx.$$

Fano 引理 [22] 设 $(\Omega,\mathscr{F},P_k)$ 为概率测度空间且 $A_k\in\mathscr{F}$, $k=0,1,\dots,m$. 若对 $k\neq v$, 有 $A_k\cap A_v=\emptyset$, 则

$$\sup_{0\leq k\leq m}P_k(A_k^c)\geq \min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{m}\exp(-3\mathrm{e}^{-1}-\mathscr{K}_m)\right\},$$

其中 A^c 表示 A 的补集且

$$\mathscr{K}_m:=\inf_{0\leq v\leq m}\frac{1}{m}\sum_{k\neq v}K(P_k,P_v).$$

Fano 引理涉及一个相对复杂的记号: 两个概率测度之间的 K–L 散度. 命题 2.1 看起来更基础, 因为它的三个条件都是假定在密度函数上的. 另一方面, 命题 2.1 的证明比 Fano 引理 [3, 22] 更为简单. 事实上, 传统估计 [7, 14, 18] 中利用 Fano 引理研究风险的下界时需要验证 $\mathscr{K}_m\lesssim 1$, 通常情况下这个证明相对困难.

下面利用命题 2.1 给出在 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 空间中反卷积密度估计下界的证明.

定理 2.3 设 f_ε 满足 (C1), (C2) 且 $\hat{f}_n$ 是密度函数 $f\in H^s(\Omega_{x_0},M)$ 的任一估计器, 那么对 $1\leq p<\infty$, 下述估计成立:

$$\inf_{\hat{f}_n}\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}E|\hat{f}_n(x_0)-f(x_0)|^p\gtrsim(\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}.$$

证明 设 f_0 是 Cauchy 分布的密度函数, 即 $f_0(x) := \frac{1}{\pi(1+|x-x_0|^2)}$. 容易验证

$$(f_0 * f_\varepsilon)(x) \gtrsim \frac{1}{1+|x-x_0|^2}. \tag{2.6}$$

事实上, Fatou 引理蕴含

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to\infty}(1+|x-x_0|^2)(f_0 * f_\varepsilon)(x) &= \frac{1}{\pi}\liminf_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\frac{1+|x-x_0|^2}{1+|x-x_0-t|^2}dt\\ &\geq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\liminf_{x\to\infty}\frac{1+|x-x_0|^2}{1+|x-x_0-t|^2}dt = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

这表明存在常数 $A>0$, 使得当 $|x-x_0|\geq A$ 时,

$$(f_0 * f_\varepsilon)(x) \geq \frac{1}{\pi(1+|x-x_0|^2)}; \tag{2.7}$$

另一方面, 选取充分大的 $B>0$, 使得 $\int_{|t-x_0|\leq B-A} f_\varepsilon(t)dt \geq \frac{1}{2}$. 当 $|x-x_0|\leq A$ 且 $|t-x_0|\leq B-A$ 时, $|x-t-x_0| \leq |x-x_0+x_0-t|+|x_0| \leq |x-x_0|+|t-x_0|+|x_0| \leq B+|x_0|$. 于是

$$\begin{aligned}(f_0 * f_\varepsilon)(x) &\geq \int_{|t-x_0|\leq B-A} f_0(x-t)f_\varepsilon(t)dt = \int_{|t-x_0|\leq B-A}\frac{1}{\pi(1+|x-t-x_0|^2)}f_\varepsilon(t)dt\\ &\gtrsim \frac{1}{1+(B+|x_0|)^2}\int_{|t-x_0|\leq B-A} f_\varepsilon(t)dt \gtrsim 1 \gtrsim \frac{1}{1+|x-x_0|^2}.\end{aligned}$$

结合上式和 (2.7), 即证 (2.6).

设 ψ 为 Meyer 小波函数, 记 $\psi_j(\cdot) := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j\cdot)$. 固定 $x_0\in\mathbb{R}$, 函数 g_n $(n=1,2,\ldots)$ 定义为

$$g_n(\cdot) := 2^{-j(s+\frac{1}{2})}\psi_j(\cdot - x_0), \tag{2.8}$$

其中 $\frac{3}{2\pi}(\frac{\ln n}{2c_0})^{\frac{1}{\alpha}} < 2^j \leq \frac{3}{\pi}(\frac{\ln n}{2c_0})^{\frac{1}{\alpha}}$. 由 Meyer 小波的性质 $|\psi(x)|\lesssim (1+|x|^2)^{-1}$ 知

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &= 2^{-j(s+\frac{1}{2})}|2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-2^jx_0)| = 2^{-js}|\psi(2^jx-2^jx_0)| \lesssim \frac{2^{-js}}{1+2^{2j}|x-x_0|^2}\\ &\leq \frac{2^{-js}}{1+|x-x_0|^2} \lesssim 2^{-js}f_0(x).\end{aligned} \tag{2.9}$$

定义

$$f_n := f_0 + c_* g_n, \tag{2.10}$$

其中 c_* 为小于 1 且充分小的正常数. 根据 $f_0(x)>0$, (2.9) 和 $\lim_{n\to\infty}2^{-js}=0$ 知, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 和充分大的 n, $f_n(x)\geq 0$. 因为 $\int_{\mathbb{R}}\psi(x)dx=0$, 所以 $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx = 0$ 且 $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x)dx = 1$. 从而当 n 充分大时, f_n 是一个密度函数.

当 $s\in(0,1]$ 时, 易见对 $|x-y|\geq 1$,

$$|f_0(x)-f_0(y)| \leq |f_0(x)|+|f_0(y)| \lesssim 1 \lesssim |x-y|^s;$$

另一方面, 对 $|x-y|\leq 1$,

$$\begin{aligned}|f_0(x)-f_0(y)| &\lesssim \left|\frac{1}{1+|x-x_0|^2}-\frac{1}{1+|y-x_0|^2}\right| = \left|\frac{|x-x_0|^2-|y-x_0|^2}{(1+|x-x_0|^2)(1+|y-x_0|^2)}\right|\\ &= \left|\frac{(x-y)(x-x_0+y-x_0)}{(1+|x-x_0|^2)(1+|y-x_0|^2)}\right| \leq |x-y| \leq |x-y|^s.\end{aligned}$$

当 $s=N+\delta$ 时, 其中 $\delta\in(0,1]$ 且 $N\geq 1$, 我们有 $f_0^{(N)}(x)=\frac{P_N(x-x_0)}{(1+|x-x_0|^2)^{1+N}}$, 这里 $P_N(x)=\sum_{k=1}^{N+1}a_kx^{N+1-k}$ 且 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 为常数. 类似地, 由 $\frac{|P_N(x-x_0)|}{(1+|x-x_0|^2)^N}\lesssim 1$ 知

$$|f_0^{(N)}(x)-f_0^{(N)}(y)|\lesssim\left|\frac{1}{1+|x-x_0|^2}-\frac{1}{1+|y-x_0|^2}\right|\lesssim|x-y|^\delta.$$

因此, $f_0\in H^s(\Omega_{x_0})$.

为证 $f_n\in H^s(\Omega_{x_0})$, 只需证 $g_n\in H^s(\Omega_{x_0})$. 设 $s=N+\delta$, 则对 $x,y\in\Omega_{x_0}$, 有

$$|g_n^{(N)}(x)-g_n^{(N)}(y)|=2^{-j(s-N)}|\psi^{(N)}(2^jx-2^jx_0)-\psi^{(N)}(2^jy-2^jx_0)|.$$

因 $\psi\in H^\alpha(\mathbb{R})$ 对任意的 $\alpha>0$ 成立, 故上式可化为

$$|g_n^{(N)}(x)-g_n^{(N)}(y)|\lesssim 2^{-j(s-N)}\cdot 2^{j\delta}|x-y|^\delta\lesssim|x-y|^\delta,$$

其中 "$\lesssim$" 的常数不依赖于 n, x 和 y. 于是 $g_n\in H^s(\Omega_{x_0})$ 且 $f_n\in H^s(\Omega_{x_0})$. 同时 $\|f_0\|_\infty\leq\frac{1}{\pi}$ 及 $\|f_n\|_\infty\leq\|f_0\|_\infty+c_*\|g_n\|_\infty\lesssim 1$ 成立. 故 $\{f_0,f_n\}\subseteq H^s(\Omega_{x_0},M)$, 其中 M 为大于零的某个常数.

进一步, (2.6) 说明 $(f_0*f_\varepsilon)(x)\gtrsim(1+|x-x_0|^2)^{-1}>0$. 结合 (2.10), (2.8) 和 $\psi(0)\neq 0$ (文献 [23]), 便有

$$|f_n(x_0)-f_0(x_0)|=c_*2^{-js}|\psi(0)|\gtrsim 2^{-js}.$$

为证明定理 2.3, 只需在命题 2.1 中取 $d(f,g)=|f(x_0)-g(x_0)|$ 并且验证条件 (iii) 成立即可.

根据 (2.10), $(f_n*f_\varepsilon)^2(x)=[(f_0+c_*g_n)*f_\varepsilon]^2(x)=(f_0*f_\varepsilon)^2(x)+2(f_0*f_\varepsilon)(x)(c_*g_n*f_\varepsilon)(x)+(c_*g_n*f_\varepsilon)^2(x)$. 于是, $\int_{\mathbb{R}}(g_n*f_\varepsilon)(x)dx=0$ 蕴含

$$\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(f_n*f_\varepsilon)^2(x)dx=1+c_*^2\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(g_n*f_\varepsilon)^2(x)dx;\tag{2.11}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(g_n*f_\varepsilon)^2(x)dx&\lesssim\int_{\mathbb{R}}(1+|x-x_0|^2)|2^{-j(s+\frac12)}[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx\\&\lesssim\int_{\mathbb{R}}|2^{-j(s+\frac12)}[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx+\int_{\mathbb{R}}x^2|2^{-j(s+\frac12)}[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx.\end{aligned}\tag{2.12}$$

利用 Parseval 等式及 $\operatorname{supp}\psi^{ft}\subseteq[-\frac{8\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}]$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}|2^{-j(s+\frac12)}[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx\\&\quad=2^{-j(2s+1)}(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}|(\psi_j)^{ft}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_0}f_\varepsilon^{ft}(t)|^2dt\\&\quad=2^{-j(2s+1)}2^{-j}(2\pi)^{-1}\int_{\{t,\frac{2\pi}{3}2^j\leq|t|\leq\frac{8\pi}{3}2^j\}}\cdot|\psi^{ft}(2^{-j}t)\cdot f_\varepsilon^{ft}(t)|^2dt.\end{aligned}\tag{2.13}$$

上式和条件 (C1) 意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|2^{-j(s+\frac12)}[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx&\lesssim 2^{-j(2s+1)}\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}2^{-j}\int_{\mathbb{R}}|\psi^{ft}(2^{-j}t)|^2dt\\&=2^{-j(2s+1)}\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\int_{\mathbb{R}}|\psi^{ft}(t)|^2dt\\&=2^{-j(2s+1)}\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\int_{\mathbb{R}}|\psi(t)|^2dt\\&=2^{-j(2s+1)}\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

记 $q=(\psi_j)^{ft}\cdot f_\varepsilon^{ft}$, 则 $q\in L^1(\mathbb{R})$ 且在任一有限区间上局部绝对连续, 同时 $q'=[(\psi_j)^{ft}]'f_\varepsilon^{ft}+(\psi_j)^{ft}(f_\varepsilon^{ft})'\in L^1(\mathbb{R})$. 另外, $|(q')^{ft}(x)|^2=|xq^{ft}(x)|^2$. 进一步,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}x^2|[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx&=\int_{\mathbb{R}}|(q')^{ft}(x)|^2dx=2\pi\int_{\mathbb{R}}|q'(t)|^2dt\\&\lesssim\int_{\mathbb{R}}|[(\psi_j)^{ft}]'(t)f_\varepsilon^{ft}(t)+(\psi_j)^{ft}(t)(f_\varepsilon^{ft})'(t)|^2dt.\end{aligned}$$

这与 (C1)–(C2) 及 $\operatorname{supp}\psi^{ft}\subseteq[-\frac{8\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}]$, 推出

$$\int_{\mathbb{R}}x^2|[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx\lesssim\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\int_{\mathbb{R}}|[(\psi_j)^{ft}]'(t)+(\psi_j)^{ft}(t)|^2dt.$$

联合上式和 $[(\psi_j)^{ft}]'(t)=2^{-\frac{3j}{2}}(\psi^{ft})'(2^{-j}t)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}x^2|[\psi_j(\cdot-x_0)*f_\varepsilon](x)|^2dx&\lesssim\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\int_{\mathbb{R}}|2^{-\frac{3j}{2}}(\psi^{ft})'(2^{-j}x)+2^{-\frac{j}{2}}(\psi^{ft})(2^{-j}x)|^2dx\\&\lesssim\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\left[2^{-j}\int_{\mathbb{R}}|x|^2|\psi(x)|^2dx+1\right]\\&\lesssim\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha},\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中在第二个不等式的证明中用到 Parseval 等式.

因此, 由 (2.12)–(2.15) 和 $2^j>\frac{3}{2\pi}(\frac{\ln n}{2c_0})^{\frac{1}{\alpha}}$, 可得

$$n\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)|f_n*f_\varepsilon(x)-f_0*f_\varepsilon(x)|^2dx\lesssim n\mathrm{e}^{-2c_0|\frac{2\pi}{3}2^j|^\alpha}\le 1.$$

上式与 (2.11) 蕴含

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(f_n*f_\varepsilon)^2(x)dx\right)^n&=\left(1+c_*^2\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(g_n*f_\varepsilon)^2(x)dx\right)^n\\&\le\exp\left\{nc_*^2\int_{\mathbb{R}}(f_0*f_\varepsilon)^{-1}(x)(g_n*f_\varepsilon)^2(x)dx\right\}\le\lambda,\end{aligned}$$

其中 $\lambda\in(1,5)$ (因为 c_* 充分小), 这样命题 2.1 中的条件 (iii) 成立.

最后, 根据命题 2.1, $a_n=2^{-js}$ 以及 $2^j\le\frac{3}{\pi}(\frac{\ln n}{2c_0})^{\frac{1}{\alpha}}$, 便得到定理 2.3 的结论. 证毕.

注 2.4 事实上, 因为

$$\inf_{\hat f_n}\sup_{x\in\Omega_{x_0}}\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}E|\hat f_n(x)-f(x)|^p\ge\inf_{\hat f_n}\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}E|\hat f_n(x_0)-f(x_0)|^p,$$

所以定理 2.3 的结论对 $x\in\Omega_{x_0}$ 一致成立.

3 上界估计

本节研究 $H^s(\Omega_{x_0},M)$ 中密度函数点态风险的小波最优估计, 即构造小波反卷积估计器并证明其收敛阶与定理 2.3 中的结论相吻合. 为此, 先介绍两个重要的引理.

引理 3.1 [11] 设 g 为 Meyer 尺度函数或小波函数, 则存在一个非增函数 $F\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, 使得对任意的 $s\ge0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(x-k)g(y-k)|\le F(|y-x|)\ \text{且}\ \int_{\mathbb{R}}|x|^sF(|x|)dx<+\infty.$$

引理 3.2 [19] 设实值函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足局部 Hölder 条件 $H^s(\Omega_{x_0})$ $(s=N+\delta)$ 且在区间 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 上有 $|f(x)|\le M$, 那么对所有的 $x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 和 $k=0,1,\ldots,N$,

$$|f^{(k)}(x)|\le C_k,$$

其中 $C_k>0$ 依赖于 M,C,ε 和 k.

下面的命题在证明本节的主要结论中将发挥重要作用.

命题 3.3 设 ϕ 和 ψ 分别为 Meyer 尺度函数和小波函数. 若 $f\in H^s(\Omega_{x_0},M)$, 其中 $s=N+\delta$ $(0<\delta\le 1)$, 则对 $x\in\Omega_{x_0}$ 和充分大的 j, 下述结论成立:

(i) $\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\beta_{jk}\psi_{jk}(x)|\lesssim 2^{-js}$;

(ii) $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_{jk}\psi_{jk}(x)$;

(iii) $\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}|f(x)-P_{j_0}f(x)|\lesssim 2^{-j_0s}$.

证明 因为 $\beta_{jk}:=\int_{\mathbb{R}}f(x)\psi_{jk}(x)dx$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\beta_{jk}\psi_{jk}(x)|&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_{jk}(y)f(y)dy\psi_{jk}(x)\right|\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{|y-x|\le 2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)f(y)dy\psi_{jk}(x)+\int_{|y-x|>2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)f(y)dy\psi_{jk}(x)\right|\\&\le I_1(j)+I_2(j),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中

$$I_1(j):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{|y-x|<2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)f(y)dy\psi_{jk}(x)\right|$$

且

$$I_2(j):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{|y-x|\ge 2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)f(y)dy\psi_{jk}(x)\right|.$$

注意到对于充分大的 j, 开球 $B(x,2^{-\frac{j}{2}})\subseteq\Omega_{x_0}$ 且 $f\in H^s(\Omega_{x_0})$, 其中 $s=N+\delta$. 于是, Taylor 公式蕴含着对 $y\in B(x,2^{-\frac{j}{2}})$,

$$f(y)=\sum_{m=0}^{N}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}(y-x)^m+\frac{f^{(N)}(\xi)-f^{(N)}(x)}{N!}(y-x)^N$$

成立, 其中 $\xi=x+\theta(y-x)$ 且 θ 为大于零小于 1 的常数. 因此

$$\begin{aligned}I_1(j)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{|y-x|<2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)\left[\sum_{m=0}^{N}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}(y-x)^m+\frac{f^{(N)}(\xi)-f^{(N)}(x)}{N!}(y-x)^N\right]dy\right|\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left[\int_{\mathbb{R}}-\int_{|y-x|\ge 2^{-\frac{j}{2}}}\right]\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)\sum_{m=0}^{N}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}(y-x)^m dy\right.\\&\qquad\left.+\int_{|y-x|<2^{-\frac{j}{2}}}\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)\frac{f^{(N)}(\xi)-f^{(N)}(x)}{N!}(y-x)^N dy\right|.\end{aligned}$$

由 Meyer 小波函数 ψ 的消失矩特性可知对任意 $m=0,1,2,\ldots$,

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{jk}(y)y^m dy=0.$$

它与引理 3.2 推出

$$\begin{aligned} I_1(j) &\lesssim \int_{\Omega_{x_0}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)|\,|f^{(N)}(\xi)-f^{(N)}(x)|\,|y-x|^N dy \\ &\quad + \sum_{m=0}^{N} \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)|\,|y-x|^m dy \\ &:= I_{11}(j) + I_{12}(j). \end{aligned} \tag{3.2}$$

显然, 根据引理 3.1 和 $f\in H^s(\Omega_{x_0})$,

$$I_{11}(j) \lesssim 2^j \int_{\Omega_{x_0}} F(2^j|y-x|)|\xi-x|^\delta |y-x|^N dy,$$

其中 $\xi = x+\theta(y-x)$ 且 $0\leq\theta\leq 1$. 这里, 我们用到 $H^s(\Omega_{x_0})$ 定义中的一致常数 C. 从而对 $s=N+\delta$,

$$I_{11}(j) \lesssim 2^j \int_{\mathbb{R}} F(2^j|y-x|)|y-x|^s dy \lesssim 2^{-js}. \tag{3.3}$$

另一方面, 再利用引理 3.1,

$$\begin{aligned} I_{12}(j) &\lesssim \sum_{m=0}^{N} \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} 2^j F(2^j|y-x|)|y-x|^m dy \\ &\leq \sum_{m=0}^{N} \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} 2^j F(2^j|y-x|)(2^{\frac{j}{2}}|y-x|)^{2s-2m}|y-x|^m dy \\ &= \sum_{m=0}^{N} 2^{-js} \int_{\mathbb{R}} F(2^j|y-x|)\left(2^j|y-x|\right)^{2s-m} d2^j y \lesssim 2^{-js}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

同理,

$$\begin{aligned} I_2(j) &\leq \|f\|_\infty \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_{jk}(y)\psi_{jk}(x)|dy \lesssim \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} 2^j F(2^j|y-x|)dy \\ &\leq \int_{|y-x|\geq 2^{-\frac{j}{2}}} 2^j F(2^j|y-x|)2^{js}|y-x|^{2s} dy \lesssim 2^{-js}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

结合 (3.1), (3.2) 和 (3.3)–(3.5), 便有

$$\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{jk}\psi_{jk}(x)| \lesssim 2^{-js},$$

即结论 (i) 得证.

往证结论 (ii). 由结论 (i) 易见级数 $\sum_{j=j_0}^\infty \sum_k \beta_{jk}\psi_{jk}(x)$ 在 Ω_{x_0} 上一致收敛. 事实上, 因为 $|\alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x)| \leq 2^{j_0}|\phi(2^{j_0}x-k)| \lesssim 2^{j_0}\frac{1}{1+|2^{j_0}x-k|^2}$ 和级数 $\sum_k \frac{2^{j_0}}{1+|2^{j_0}x-k|^2}$ 一致收敛, 所以 $\sum_k \alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x)$ 也一致收敛. 再利用 ϕ 和 ψ 的连续性, 函数

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x) + \sum_{j=j_0}^\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(x)$$

在 Ω_{x_0} 上连续. 另一方面, $f\in H^s(\Omega_{x_0},M)$ 蕴含 f 在 Ω_{x_0} 上连续. 注意到, 等式 $f=\sum_k \alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}+\sum_{j=j_0}^\infty\sum_k \beta_{jk}\psi_{jk}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 意义下成立意味着

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x) + \sum_{j=j_0}^\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(x)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立, 当然在 Ω_{x_0} 上也几乎处处成立. 因为两个连续函数在一个开集上几乎处处相等则它们逐点相等, 所以结论 (ii) 成立.

根据结论 (ii) 的证明可知对 $x\in\Omega_{x_0}$, 有 $P_jf(x)=\sum_k\alpha_{jk}\phi_{jk}(x)$. 它与结论 (ii) 导致

$$|f(x)-P_{j_0}f(x)|\le\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\beta_{jk}\psi_{jk}(x)|$$

成立. 最后, 结论 (iii) 可由结论 (i) 直接推出. 证毕.

注 3.4 命题 3.3 (ii) 表明对任意的 $f\in H^s(\Omega_{x_0},M)$, 选择合适的 ϕ 和 ψ 便有

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{j_0k}\phi_{j_0k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_{jk}\psi_{jk}(x)$$

逐点成立. 另一方面, 结论 (iii) 将在点态风险的偏差项估计中发挥关键作用, 见定理 3.6 的证明.

为研究超级光滑噪声条件下模型 (1.1) 的点态风险上界, 首先介绍小波反卷积估计器. 记

$$(K_j\phi)(y):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}\frac{\phi^{ft}(t)}{f_\varepsilon^{ft}(-2^jt)}dt,\tag{3.6}$$

其中 ϕ 为 Meyer 尺度函数. 由条件 (C3) 及 $\operatorname{supp}\phi^{ft}\subseteq[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 知 $K_j\phi$ 是有意义的.

定义

$$\hat{\alpha}_{jk}:=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(K_j\phi)_{jk}(Y_l)=\frac{2^{\frac{j}{2}}}{n}\sum_{l=1}^{n}(K_j\phi)(2^jY_l-k),\tag{3.7}$$

那么经典的线性小波估计器

$$\hat{f}_n^{\mathrm{lin}}(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\alpha}_{jk}\phi_{jk}(x).\tag{3.8}$$

事实上, (3.7) 中的 $\hat{\alpha}_{jk}$ 是尺度系数 α_{jk} 的一个无偏估计, 即 $E\hat{\alpha}_{jk}=\alpha_{jk}$ (见文 [16, 25]).

为了保证估计器的实用性, 定义有限求和小波估计器

$$\hat{f}_{n,F}(x):=\sum_{|k|\le K_n}\hat{\alpha}_{jk}\phi_{jk}(x),\tag{3.9}$$

其中正整数 K_n 将在后面给出.

为证引理 3.5, 我们需要下面这个经典的不等式.

Rosenthal 不等式 [11] 设独立同分布的随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 满足 $EX_l=0$ 和 $E|X_l|^p<\infty$ $(l=1,\dots,n)$, 则

$$E\Big|\sum_{l=1}^{n}X_l\Big|^p\lesssim\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{n}E|X_l|^p+\Big(\sum_{l=1}^{n}EX_l^2\Big)^{\frac{p}{2}}, & p>2;\\ \displaystyle\Big(\sum_{l=1}^{n}EX_l^2\Big)^{\frac{p}{2}}, & 0<p\le 2,\end{cases}$$

其中 "$\lesssim$" 中的常数仅依赖于 p.

引理 3.5 设 ϕ 为 Meyer 尺度函数且 f_ε 满足条件 (C3), 则对 (3.7) 中定义的 $\hat{\alpha}_{jk}$,

$$E|\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk}|^p\lesssim n^{-\frac{p}{2}}2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}.$$

证明 由 $\hat{\alpha}_{jk}$ 和 α_{jk} 的定义, 易见

$$E|\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk}|^p=\frac{1}{n^p}E\bigg|\sum_{l=1}^{n}[(K_j\phi)_{jk}(Y_l)-E(K_j\phi)_{jk}(Y_l)]\bigg|^p:=\frac{1}{n^p}E\bigg|\sum_{l=1}^{n}\xi_l\bigg|^p, \tag{3.10}$$

其中 $\xi_l=(K_j\phi)_{jk}(Y_l)-E(K_j\phi)_{jk}(Y_l)$. 显然, 由 (3.6), $\operatorname{supp}\phi^{ft}\subset[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 和条件 (C3) 推出对任意的 $l=1,2,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}|(K_j\phi)_{jk}(Y_l)|&=\bigg|\frac{2^{\frac{j}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2^jY_l-k)}\frac{\phi^{ft}(t)}{f_\varepsilon^{ft}(-2^jt)}dt\bigg|\le\frac{2^{\frac{j}{2}}}{2\pi}\int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{|\phi^{ft}(t)|}{|f_\varepsilon^{ft}(-2^jt)|}dt\\&\lesssim 2^{\frac{j}{2}}\int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(1+|2^jt|^2)^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{e}^{c_0|2^jt|^\alpha}dt\lesssim 2^{j(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

进一步, $E|\xi_l|^p\lesssim 2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}$. 根据 Rosenthal 不等式

$$\begin{aligned}E\bigg|\sum_{i=1}^{n}\xi_l\bigg|^p&\lesssim\sum_{i=1}^{n}E|\xi_l|^pI_{\{p>2\}}+\bigg(\sum_{l=1}^{n}E\xi_l^2\bigg)^{\frac{p}{2}}\\&\lesssim n2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}I_{\{p>2\}}+n^{\frac{p}{2}}2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}.\end{aligned}$$

结合上式和 (3.10), 便有

$$E|\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk}|^p\lesssim n^{-\frac{p}{2}}2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha},$$

即得到期望的结论. 证毕.

现在叙述并证明本节的主要结论.

定理 3.6 在引理 3.5 的假设下, 若 $p\in[1,\infty)$ 且 $\|x^2f(x)\|_\infty\lesssim 1$, 选取 $K_n\sim\mathrm{e}^{(\ln n)^\theta}$ $(0<\theta<1)$ 和 $\frac{3}{8\pi}(\frac{\ln n}{4c_0})^{\frac{1}{\alpha}}<2^j\le\frac{3}{4\pi}(\frac{\ln n}{4c_0})^{\frac{1}{\alpha}}$, 则 (3.9) 中定义的实用估计器 $\hat{f}_{n,F}$ 满足对 $x\in\Omega_{x_0}$,

$$\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)}E|\hat{f}_{n,F}(x)-f(x)|^p\lesssim(\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}. \tag{3.12}$$

当 $1<p<\infty$ 时, 条件 $\|x^2f(x)\|_\infty\lesssim 1$ 可由 $\|xf(x)\|_\infty\lesssim 1$ 代替.

证明 由 $E\hat{\alpha}_{jk}=\alpha_{jk}$ 和 $P_jf(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{jk}\phi_{jk}(x)$, 得

$$\begin{aligned}E|\hat{f}_{n,F}(x)-f(x)|^p&\lesssim E|\hat{f}_{n,F}(x)-E\hat{f}_{n,F}(x)|^p+\bigg|\sum_{|k|>K_n}\alpha_{jk}\phi_{jk}(x)\bigg|^p+|P_jf(x)-f(x)|^p\\&:=I_1(j;n)+I_2(j;n)+I_3(j;n).\end{aligned} \tag{3.13}$$

对于偏差项 $I_3(j;n)$, 根据命题 3.3 (iii) 和 2^j 的选取, 有

$$I_3(j;n):=|P_jf(x)-f(x)|^p\lesssim 2^{-jps}\lesssim(\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}. \tag{3.14}$$

因为 $|\alpha_{jk}|\le\int_{\mathbb{R}}|\phi_{jk}(x)|f(x)dx$ 且 $\|x\phi(x)\|_\infty\lesssim 1$, 所以利用 $\|x^2f(x)\|_\infty\lesssim 1$ 知

$$\begin{aligned}|k^2\alpha_{jk}|&\lesssim\int_{\mathbb{R}}|2^jx-k|^2|\phi_{jk}(x)|f(x)dx+\int_{\mathbb{R}}|2^jx|^2|\phi_{jk}(x)|f(x)dx.\\&\le 2^{\frac{j}{2}}\|x^2\phi(x)\|_\infty+2^{2j}\|x^2f(x)\|_\infty\int_{\mathbb{R}}|\phi_{jk}(x)|dx\lesssim 2^{\frac{3}{2}j}.\end{aligned}$$

进一步, $|\alpha_{jk}|\lesssim 2^{\frac{3}{2}j}|k|^{-2}$ 且

$$\sum_{|k|>K_n}|\alpha_{jk}|^p\lesssim\sum_{|k|>K_n}k^{-2p}2^{\frac{3}{2}pj}\lesssim K_n^{1-2p}2^{\frac{3}{2}pj}.$$

这与 ϕ 的有界性推出

$$I_2(j;n) := \left|\sum_{|k|>K_n} \alpha_{jk}\phi_{jk}(x)\right|^p \lesssim 2^{\frac{pj}{2}} \sum_{|k|>K_n} |\alpha_{jk}|^p \lesssim 2^{2pj} K_n^{1-2p} = o((\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}). \tag{3.15}$$

同时, (3.15) 的成立也得益于 $K_n \sim \mathrm{e}^{(\ln n)^\theta}(0<\theta<1)$, $\frac{3}{8\pi}(\frac{\ln n}{4c_0})^{\frac{1}{\alpha}} < 2^j \le \frac{3}{4\pi}(\frac{\ln n}{4c_0})^{\frac{1}{\alpha}}$ 和 $p \ge 1$.

剩下只需估计 $I_1(j;n)$ 即可. 显然

$$|\hat{f}_{n,F}(x) - E\hat{f}_{n,F}(x)| = \left|\sum_{|k|\le K_n} (\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk})\phi_{jk}(x)\right| \le \sum_{|k|\le K_n} |\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk}|\,|\phi_{jk}(x)|^{\frac{1}{p}}|\phi_{jk}(x)|^{\frac{1}{p'}},$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 于是, 利用 Hölder 不等式

$$I_1(j;n) := E|\hat{f}_{n,F}(x) - E\hat{f}_{n,F}(x)|^p \le E\sum_{|k|\le K_n} |\hat{\alpha}_{jk}-\alpha_{jk}|^p|\phi_{jk}(x)|\left(\sum_{|k|\le K_n}|\phi_{jk}(x)|\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

结合上式与引理 3.5 及 ϕ 的 (θ) 条件, 我们有

$$\begin{aligned} I_1(j;n) &\lesssim n^{-\frac{p}{2}} 2^{pj(\beta+\frac{1}{2})} \mathrm{e}^{c_0 p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha} 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{p}{2p'}j} = n^{-\frac{p}{2}} 2^{pj(\beta+1)} \mathrm{e}^{c_0 p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha} \\ &\lesssim n^{-\frac{p}{2}} (\ln n)^{\frac{p(\beta+1)}{\alpha}} n^{\frac{p}{4}} = o((\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

上式简化时用到了 $1+\frac{p}{p'}=\frac{1}{p}$ 和 2^j 的选取.

因此, 由 (3.13)–(3.16) 可推出对任意的 $x \in \Omega_{x_0}$,

$$\sup_{f\in H^s(\Omega_{x_0},M)} E|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p \lesssim (\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}.$$

当 $1<p<\infty$ 时, 容易验证

$$\sum_{|k|\ge K_n} |k|^{-p} \sim \int_{K_n}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}K_n^{1-p}.$$

另一方面, $|k\alpha_{jk}| \le \int_{\mathbb{R}} |k|\,|\phi_{jk}(x)|f(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} |2^jx-k|\,|\phi_{jk}(x)|f(x)dx + \int_{\mathbb{R}} |2^jx|\,|\phi_{jk}(x)|f(x)dx$. 它与新的假设 $\|xf(x)\|_\infty \lesssim 1$ 蕴含

$$|k\alpha_{jk}| \lesssim 2^{\frac{j}{2}}\|x\phi(x)\|_\infty + 2^j\|xf(x)\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\phi_{jk}(x)|dx \lesssim 2^{\frac{j}{2}}.$$

进而, $|\alpha_{jk}| \lesssim 2^{\frac{j}{2}}|k|^{-1}$. 类似于 (3.15), 当 $p>1$ 时, 根据 K_n 和 2^j 的选取,

$$I_2(j;n) \lesssim 2^{\frac{pj}{2}} \sum_{|k|>K_n} |\alpha_{jk}|^p \lesssim 2^{pj} \sum_{|k|>K_n} |k|^{-p} \lesssim 2^{pj}K_n^{1-p} = o((\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}).$$

同样, $I_1(j;n)$ 和 $I_3(j;n)$ 的估计仍然成立. 故 (3.12) 成立. 证毕.

注 3.7 对比定理 2.3 的结论, 定理 3.6 表明有限求和小波估计器 $\hat{f}_{n,F}$ 给出了点态风险的最优估计, 即其收敛阶与定理 2.3 中的下界一致. 进一步, 类似于注 2.4, 我们还可以证明该收敛阶关于 Ω_{x_0} 的一致性. 因为局部 Hölder 条件的定义中具有一致常数 C, 所以该收敛阶的一致性就显得自然了.

注 3.8 通过更细致的观察, 定理 3.6 中 j 和 K_n 的选取不依赖于密度函数空间的未知参数 s, 这意味着有限求和小波估计器在超级光滑噪声条件下具有自适应性.

虽然强收敛和平均收敛互不蕴含, 下述推论说明我们构造的有限求和估计器在超级光滑噪声条件下两种收敛阶相同. 应该指出的是该小波估计器在强收敛意义下也具有自适应性. 在给出具体证明之前, 先叙述有界差分不等式.

有界差分不等式 [4, 16] 设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 且函数 $g: A^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$\sup_{x_1,\dots,x_n,x_l'\in A} |g(x_1,\dots,x_n) - g(x_1,\dots,x_{l-1},x_l',x_{l+1},\dots,x_n)| \le c_l,$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$ 及独立的随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$,

$$P\{|g(X_1,X_2,\dots,X_n) - Eg(X_1,X_2,\dots,X_n)| > \varepsilon\} \le 2\exp\bigg\{-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{l=1}^n c_l^2}\bigg\}.$$

推论 3.9 在定理 3.6 的假设下, 对任一 $x \in \Omega_{x_0}$ 和 $p \in [1,\infty)$, 则下述估计成立:

$$\big|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)\big|^p = o_{\text{a.s.}}\ ((\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}).$$

证明 固定 $x \in \Omega_{x_0}$, 定义 $g(Y_1,Y_2,\dots,Y_n) := \varepsilon_n^{-1}|\hat{f}_{n,F}(x;Y_1,Y_2,\dots,Y_n) - f(x)|^p$, 其中 $\varepsilon_n := (\ln n)^{-\frac{ps}{\alpha}}$. 于是

$$\begin{aligned}
&|g(Y_1,\dots,Y_n) - g(Y_1,\dots,Y_l',\dots,Y_n)|\\
&\quad= \varepsilon_n^{-1}\big|\,|\hat{f}_{n,F}(x;Y_1,\dots,Y_n) - f(x)|^p - |\hat{f}_{n,F}(x;Y_1,\dots,Y_l'\dots,Y_n) - f(x)|^p\big|\\
&\quad\lesssim \varepsilon_n^{-1}|\hat{f}_{n,F}(x;Y_1,\dots,Y_n) - \hat{f}_{n,F}(x;Y_1,\dots,Y_l'\dots,Y_n)|^p.
\end{aligned}$$

由 $\hat{f}_{n,F}$ 的定义 (见 (3.9)), 上式可简化为

$$|g(Y_1,\dots,Y_n) - g(Y_1,\dots,Y_l',\dots,Y_n)| \lesssim \varepsilon_n^{-1}\bigg[\sum_{|k|\le K_n} |\hat{\alpha}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}'|\,|\phi_{jk}(x)|\bigg]^p, \tag{3.17}$$

这里 $\hat{\alpha}_{jk}' := \frac{1}{n}\big[\sum_{m=1,m\ne l}^n (K_j\phi)_{jk}(Y_m) + (K_j\phi)_{jk}(Y_l')\big]$.

根据 (3.11), 易见 $|\hat{\alpha}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}'| = \frac{1}{n}|(K_j\phi)_{jk}(Y_l) - (K_j\phi)_{jk}(Y_l')| \lesssim \frac{1}{n}2^{j(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}$. 结合它与 (3.17) 及 ϕ 的 (θ) 条件, 便有

$$\begin{aligned}
|g(Y_1,\dots,Y_n) - g(Y_1,\dots,Y_l',\dots,Y_n)| &\lesssim \varepsilon_n^{-1}n^{-p}2^{pj(\beta+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}2^{\frac{pj}{2}}\\
&= \varepsilon_n^{-1}n^{-p}2^{pj(\beta+1)}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}.
\end{aligned}$$

从而在有界差分不等式取 $c_l = \varepsilon_n^{-1}n^{-p}2^{pj(\beta+1)}\mathrm{e}^{c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}$, 并由 2^j 的选取知对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
P\{\varepsilon_n^{-1}\big|\,|\hat{f}_{n,F}(x)-f(x)|^p-E|\hat{f}_{n,F}(x)-f(x)|^p\big| > \varepsilon\} &\le 2\exp\bigg\{-\frac{2n^{2p-1}\varepsilon_n^2\varepsilon^2}{2^{2pj(\beta+1)}\mathrm{e}^{2c_0p(\frac{4\pi}{3}2^j)^\alpha}}\bigg\}\\
&\le 2\exp\big\{-2n^{\frac{3p}{2}-1}(\ln n)^\delta\varepsilon^2\big\},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 δ 是某个固定常数.

显然, $P\{\varepsilon_n^{-1}|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p > \varepsilon\} \le P\{\varepsilon_n^{-1}\big|\,|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p - E|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p\big| + \varepsilon_n^{-1}E|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p > \varepsilon\}$. 这与 (3.12) (对于固定的 f) 及 (3.18) 推出

$$\begin{aligned}
P\{\varepsilon_n^{-1}|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p > \varepsilon\} &\le P\bigg\{\varepsilon_n^{-1}\big|\,|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p - E|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p\big| > \frac{\varepsilon}{2}\bigg\}\\
&\le 2\exp\bigg\{-\frac{1}{2}n^{\frac{3p}{2}-1}(\ln n)^\delta\varepsilon^2\bigg\}.
\end{aligned}$$

因此, 由 $p \geq 1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\varepsilon_n^{-1}|\hat{f}_{n,F}(x) - f(x)|^p > \varepsilon\} < +\infty$. 最后, 利用 Borel–Cantelli 引理即得期望的结论. 证毕.

致谢 感谢刘有明教授的帮助和建议.

参考文献

[1] Carroll R. J., Hall P., Optimal rates of convergence for deconvolving a density, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1988, **83**(404): 1184–1186.
[2] Comte F., Lacour C., Anisotropic adaptive kernel deconvolution, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2013, **49**(2): 569–609.
[3] Devore R., Kerkyacharian G., Picard D., et al., Approximation methods for supervised learning, *Found. Comput. Math.*, 2006, **6**(1): 3–58.
[4] Devroye L., Lugosi G., Combinatorial Methods in Density Estimation, Springer, New York, 2001.
[5] Donoho D. L., Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1993, **1**(1): 100–115.
[6] Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., et al., Wavelet Shrinkage: Asymptopia? *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 1995, **57**(2): 301–369.
[7] Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., et al., Density estimation by wavelet thresholding, *Ann. Statist*, 1996, **24**(2): 508–539.
[8] Efromovich S., Nonparametric Curve Estimation: Methods, Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, 1999.
[9] Fan J., On the optimal rate of convergence for nonparametric deconvolution problems, *Ann. Statist.*, 1991, **19**(3): 1257–1272.
[10] Fan J., Koo J., Wavelet deconvolution, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2002, **48**(3): 734–747.
[11] Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., et al., Wavelets, Approximation and Statistical Applications, Springer-Verlag, New York, 1998.
[12] Hu L., Zeng X. C., Wang J. R., Wavelet optimal estimations for a two-dimensional continuous-discrete density function over L^p risk, *J. Inequal. Appl.*, 2018, **2018**: 279, 20 pp.
[13] Li Q., Racine J. S., Nonparametric Econometrics: Theory and Practice, Princeton, Princeton University Press, 2007.
[14] Li R., Liu Y. M., Wavelet optimal estimations for a density with some additive noises, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2014, **36**(3): 416–433.
[15] Liu Y. M., Xu J. L., On the L^p-consistency of wavelet estimators, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2016, **32**(7): 765–782.
[16] Liu Y. M., Zeng X. C., Strong L^p convergence of wavelet deconvolution density estimators, *Anal. Appl. Singap*, 2018, **16**(2): 183–208.
[17] Liu Y. M., Zeng X. C., Asymptotic normality of wavelet deconvolution density estimators, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2018, DOI: 10.1016/j.acha.2018.05.006.
[18] Lounici K., Nickl R., Global uniform risk bounds for wavelet deconvolution estimators, *Ann. Statist*, 2011, **39**(1): 201–231.
[19] Meister A., Deconvolution Problems in Nonparametric Statistics, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
[20] Pensky M., Vidakovic B., Adaptive wavelet estimator for nonparametric density deconvolution, *Ann. Statist*, 1999, **27**(6): 2033–2053.
[21] Stefanski L., Carrol R. J., Deconvoluting kernel density estimators, *Statistics*, 1990, **21**(2): 169–184.
[22] Tsybakov A. B., Introduction to Nonparametric Estimation, Springer, New York, 2009.
[23] Walnut David F., An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhäuser, Boston, 2004.
[24] Walter G. G., Density estimation in the presence of noise, *Statist. Probab. Lett.*, 1999, **41**: 237–246.
[25] Zeng X. C., A note on wavelet deconvolution density estimation, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2017, **15**(6): 1750055, 12 pp.
[26] Zeng X. C., Wang J. R., Wavelet density deconvolution estimations with heteroscedastic measurement errors, *Statist. Probab. Lett.*, 2018, **134**: 79–85.