第62卷第5期 数学学报中文版 Vol.62, No.5
2019年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)05-0673-14 **文献标识码: A**

黎曼 ζ-函数之一: KS-变换

—— 献给杨乐先生八十华诞

葛力明

中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100190
美国新罕布什尔大学
E-mail: liming@math.ac.cn

摘　要　我们定义了 KS-变换和自然数乘法结构相关的 Fourier 变换, 建立了实数乘法半群 $[1,\infty)=\{x: x\in\mathbb{R}, x\geq 1\}$ 和复半平面 $\Omega=\{s=\sigma+\mathrm{i}t: \sigma, t\in\mathbb{R}, \sigma\geq\frac{1}{2}\}$ 之间的由 KS-变换诱导的对偶关系, 证明了 KS-变换是希尔伯特空间 $L^2([1,\infty))$ 和哈代空间 $H^2(\Omega)$ 之间的等距算子, 而且该算子保持了相关的函数空间之间由实数的乘法卷积和复数点点相乘诱导出的代数结构的同构. 作为应用, 我们给出了黎曼假设成立的有关算子指标的等价命题, 从而算子理论为研究黎曼 ζ-函数和自然数的乘法结构提供了新思路.

关键词　Fourier 变换; KS-变换; L-函数; 乘法卷积
MR(2010) 主题分类　30H, 47S
中图分类　O156

On the Riemann Zeta Function, I: KS-transform

GE Liming

AMSS, CAS, China / UNH, USA
E-mail: *liming@math.ac.cn*

Abstract　Kadison-Singer transform (KS-transform) is introduced as a multiplicative Fourier transform associated with the multiplicative structure of natural numbers. It is a unitary operator between the Hilbert space $L^2([1,\infty))$ and Hardy space $H^2(\Omega)$, where Ω is a the right half complex plane with the real part great than or equal to $\frac{1}{2}$. We also show that KS-transform maps the multiplicative convolution of two functions on $[1,\infty)$ to the usual product of functions on Ω. Riemann hypothesis is equivalent to the vanishing index of certain convolution operators.

Keywords　Fourier transform; KS-transform; L-functions; multiplicative convolution
MR(2010) Subject Classification　30H, 47S
Chinese Library Classification　O156

收稿日期: 2019-07-01; 接受日期: 2019-07-05

1 引言

1859 年, 黎曼 (Bernhard Riemann) 在 Monatsberichte der Berliner Akademie 上发表了一篇题目为 "论小于某给定值的素数个数" [8] 的文章, 把前人研究了的实变量函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 推广到复变量, 并建立了下面的函数方程

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{1.1}$$

其中 $\Gamma(s)$ 为欧拉 Γ-函数 (当复变量 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时, $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}dx$). 上面的等式 (1.1) 关于竖直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 是对称的, 通过这样的对称性, 可以把 $\zeta(s)$ 延拓到全复平面, $s=0$ 和 1 是 $\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ 仅有的一阶 (也称 "单") 极点. 由于 Γ-函数在负整数处是极点, 因此负偶数 $-2,-4,\ldots$ 均为 $\zeta(s)$ 的零点, 它们被称为显然零点. 由欧拉乘积公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

可知, 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时, $\zeta(s)\neq 0$, 从而 $\zeta(s)$ 其余的 "非平凡零点" 都落在条形区域 $\{s:0\leq \mathrm{Re}(s)\leq 1\}$ 中, 它们关于竖直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 及实轴对称, 即 ρ 为非平凡零点当且仅当 $1-\rho$, $\overline{\rho}$ 和 $1-\overline{\rho}$ 均为非平凡零点, 这里的 $\overline{\rho}$ 是指复数 ρ 的复共轭. 通过复函数的围道积分, 黎曼证明了 ζ-函数的零点很多, 在 s 的虚部 t 充分大时, 单位区间 $[t,t+1]$ 对应的区域中的零点个数 (平均意义下) 接近 $\frac{1}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi}$. 关于零点的实部, 黎曼计算了几个非平凡零点, 大胆作了如下猜测:

猜想 (黎曼假设) 函数 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点均落在复平面的竖直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上.

关于黎曼假设的较详细解释可参见 [3], 黎曼虽然猜测的是 $\zeta(s)$ 的零点, 其本质是在刻画素数的分布, 因为黎曼观察到, $\zeta(s)$ 在竖线 "$\mathrm{Re}(s)=1$" 上没有零点就能得到素数定理的证明, 即素数分布的渐近公式: 令 $\pi(x)=\sum_{p\leq x}1$ (不大于 x 的素数个数), 则

$$\pi(x)\sim li(x)\sim\frac{x}{\log x},\quad (x\to\infty), \tag{1.2}$$

其中 li 表示对数积分 $li(x)=\int_2^x(1/\log t)dt$, 等价关系 "$\sim$" 是指两者之比极限为 1. 1896 年, Hadamard [4] 和 Vallée-Poussin [10] 独立地证明了 ζ-函数在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上是非零的, 走通了黎曼指引的路, 首次证明了素数定理. 事实上, 黎曼在短文 [8] 中已观察到下面的等价命题 (数十年后才被证明):

定理 1 黎曼假设成立当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\pi(x)=li(x)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

黎曼通过一个复函数 $\zeta(s)$ 的值域分布, 特别地, 其零点的位置, 来研究和刻画自然数乘法结构 (即素数分布), 用 ζ-函数零点的信息精确描述了素数分布, 但 160 年来, 我们对黎曼假设的研究进展甚微, 甚至有许多比它弱很多的猜想也无法得到证明. 迄今人们在黎曼假设成立的前提下, 得到了数千个定理的证明, 而且发现和黎曼假设等价的命题出现在数学的各分支里.

本文及之后的系列文章中, 我们试图借用现代数学多个领域的方法, 来分析、研究黎曼 ζ-函数, 为我们对素数分布的理解提供新思路. 首先, 我们通过对自然数全体的乘法结构的理解和表示, 及其和 ζ-函数的联系, 得到了一种乘法 Fourier 变换, 称为 KS-变换, 它可看作 Mellin 变换的一种截断, 但具有和 Mellin 变换完全不一样的性质. 然后, 通过 KS-变换我们给出了自然数乘法结构的某种 "对偶" [2], 这样素数分布、黎曼假设等问题就自然转化为算子的谱 (或值域) 的问题, 通常人们把从函数到算子的推广称为 "量子化" 的过程. 事实上, 我们建立的算子理论可以应

用到一般的 L-函数上, L-函数的零点问题也可转化为算子的谱的问题. KS-变换是我们研究的起点, 也是现代分析和数论研究的桥梁, 其中的联系我们将在后续文章中陆续展开.

该文共 6 节, 第 2 节我们回顾了自然数的加法表示和经典 Fourier 分析的关系, 建立了乘法表示和 $\zeta(s)$ 的关系. 第 3 节定义了 KS-变换及其逆变换, 它可看作实数乘法半群 $[1,\infty)$ 和复半平面 $\{\sigma+\mathrm{i}t:\sigma\geq\frac{1}{2}\}$ 之间的对偶关系, 并诱导了两函数空间上的等距算子. 第 4 节我们证明了 KS-变换保持了相关函数空间上代数结构, 即 $[1,\infty)$ 上函数的乘法卷积在 KS-变换下对应了复半平面上函数的乘积. 第 5 节中我们研究了经典狄利克雷 L-函数在 KS-(逆) 变换下对应的函数, 并给出了一些常用的例子. 最后一节里我们用算子的指标给出了 L-函数非平凡零点的等价刻画, 即 L-函数在复半平面非零充分必要其对应的卷积算子指标为零, 且零点个数等于算子指标 (的绝对值). 通过希尔伯特空间的离散化 (即在某标准正交基下的分解), 我们得到了算子的矩阵分解形式, 黎曼假设等命题也有相应的等价表达, 相关定理的证明将在后续文章中给出.

文章中用到的经典分析和算子理论的内容 (例如 Poisson 求和公式等) 可参见 [5, 9] 或常用标准教材.

2 自然数的乘法表示

用现代语言来说, 黎曼把每个自然数 n 对应或表示到一个复函数 $\frac{1}{n^s}$, 这里 s 是复变量, 该表示的一个特点是它保持了自然数的乘法结构 (对应于复函数的乘积). 黎曼熟知自然数的加法表示 $n\rightarrow\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\theta}$, 他对周期函数的 Fourier 级数展开有深刻的研究, 而我们熟知的 Riemann–Lebesgue 定理可表述为: **$L^2(S^1)$ 和 $l^2(\mathbb{Z})$ 之间的 Fourier 变换是酉算子**, 且该变换或酉算子给出了 S^1 上函数的乘积运算到 $\mathbb{Z}$ 上的函数加法卷积运算之间的代数同构. 虽然整数的加法表示对应的是复平面上的单位圆周 S^1, 但在非负整数 (或自然数) 上的限制, 从函数的角度看, S^1 上的函数 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\theta}$ $(n\geq 0)$ 可延拓到圆周内 (是单项式函数 z^n 在圆周上的限制), 所以非负整数对应到了单位圆盘及圆盘内的解析函数, 这样从对偶角度看自然数在 Fourier 变换下对应的是单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$, 其边界单位圆周把复平面分成了两块, 圆周外的解析函数可以由负整数对应的特征给出, 这样单位圆周把复平面一分为二, 给出了整数中正负之间的对换. 这种整数 $\mathbb{Z}$ 和单位圆周 S^1 之间的对偶及其推广形式启发了许多数学研究和数学分支的产生, 该文我们会不断追溯到这一对偶现象里, 更详细的讨论可参见 [2].

我们记自然数集 $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$, 设 $n\rightarrow L_n$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个表示满足 $L_nL_m=L_{nm}$. 通常地, L_n 是某代数中的元素或线性空间上的映射, 但也可以代表某代数结构 (比如 $L_n=M_n(\mathbb{C})$, $L_nL_m=M_n(\mathbb{C})\otimes M_m(\mathbb{C})$). 更一般地, 我们不妨把 L_n 看作满足乘法运算的一个符号, 加上复系数可构成一个形式无穷级数代数 $\mathfrak{A}=\{\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nL_n:a_n\in\mathbb{C}\}$, 其中的 (乘法) 单位元是 L_1, 单位元 L_1 的系数非零的级数都可逆. 我们把其中的一个特殊元素 $\sum_{n\in\mathbb{N}}L_n$ 记为 R, 它的逆 $R^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(n)L_n$, 这里的 μ 是 Möbius 函数. 从自然数的乘法结构不难看出, 该代数完全由单位元 L_1 和 L_p (p 素数) 生成.

黎曼选取的自然数的乘法表示是 $L_n=n^{-s}$, 此时 $R=\sum_{n\in\mathbb{N}}n^{-s}=\zeta(s)$, 作为复函数 $\zeta(s)$ 在 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的右半平面有定义且解析, $s=1$ 时 $\zeta(s)$ 发散. 类比于整数的加法表示, 我们自然要问: 相对于 $\mathbb{N}$ 的乘法, n^{-s} 和 S^1 上的函数 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\theta}$ (相对于 $\mathbb{Z}$ 的加法结构) 一样重要吗? 或更一般地, 自然数对应到乘法结构的特征有哪些? 在回答该问题前, 我们看看自然数的另

外一种 (算子的) 乘法表示.

对一个局部紧的交换群来说, 特征由不可约表示给出, 任何 (有限维的或可约化) 表示都可以分解成不可约表示的直和. 一般来说, (有限) 群的正则表示作不可约分解时可得到丰富的不可约表示的信息, 即使一个群的正则表示没有不可约分解时, 正则表示仍然是研究群或群上分析的重要工具. 自然数对乘法而言仅构成半群, 而它生成的群是正有理数全体, 是一个通常意义下非局部紧的群, 它的完备化 (之一) 是正实数全体, 记为 $\mathbb{R}_+$. 所以自然数就有两个最自然的 (正则) 表示, 一个是到自身的, 另一个是到 $\mathbb{R}_+$ 上. 前一个表示在没有适当加权的情形下, 所诱导的函数空间上的算子可能缺乏好的性质. 设 $n \to L_n$ 是 $\mathbb{N}$ 的正则表示, 记 δ_n 为 $\mathbb{N}$ 上 n 点取值为 1, 其他地方取 0 的特征函数, 那么 $R\delta_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} L_n\delta_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ 就是一个 $\mathbb{N}$ 上处处为 1 的常值函数, 当然在没有任何拓扑条件下该函数也不是无法处理, 但自然数上如何加权使得常值函数成为 "好" 函数 (比如平方可和) 就不是一个很自然的问题, 事实上, $\mathbb{N}$ 上的离散点测度 (即每个自然数处的测度都为 1) 并不是具有乘法平移不变的测度, 因此研究乘法运算时, 我们需要有 $\mathbb{N}$ 上具有和乘法运算有关联的 (平移不变的) 测度, 在深入探讨之前, 我们先看一看 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}_+$上的乘法表示.

当群非交换时, 正则表示可分为左右两个, 因为群运算中结合律的要求, 取右正则表示时我们要求右乘时先取元素的逆, 例如 $L_n : x \to xn^{-1}$; 对交换群而言, 用元素或其逆作乘法都是表示. 回到乘法半群 $\mathbb{N}$, 我们取定 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的作用 $L_n(x) = \frac{x}{n}$, 此时 L_n 诱导的 $\mathbb{R}_+$ 上的函数空间上的算子是 $(L_nf)(x) = f(nx)$, 此作用可以直接推广到正有理数、甚至是正实数构成的群上, 所有的推广都在交换结构下考虑, 所以不可约表示分解中的分量都是一维的. 设 $g(x)$ 是某一维不变子空间中的非零函数, 则存在 $\mathbb{N}$ 或正有理数群上的函数 $\alpha(n)$, 使得 $(L_ng)(x) = g(nx) = \alpha(n)g(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}_+$ 成立. 如果把 g 正规化一下, 设 $g(1) = 1$, 则可得 $\alpha(n) = g(n)$. 再把 n 也看成一个变量时, 就得到 g 是 $\mathbb{R}_+$ 上的乘法特征, 即 $x, y \in \mathbb{R}_+$ 时, $g(xy) = g(x)g(y)$, 从而存在复数 s, 使得 $g(x) = x^s$. 由此特征诱导的 "乘法 Fourier 变换" 就是熟知的 Mellin 变换: 设 f 为 $\mathbb{R}_+$ 上的函数, 记它的 Mellin 变换为 $\tilde{f}$, 则

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^s d^*x,$$

这里 d^*x 是 $\mathbb{R}_+$ 上的乘法不变的 Lebesgue 测度: $d^*x = \frac{dx}{x} = d\log x$. 当然, 以上的讨论是形式上的, 不是十分 "严格" 的, 这里我们没有准确地描述 $\mathbb{R}_+$ 上的 "函数类" , 也没有定义表示如何作 "直和" 分解, 较严格的讨论可参见 [2].

下面通过 Mellin 变换来看两个例子.

例 2 首先是当 $\rho_{\mathbb{N}}(x)$ 是 $\mathbb{N}$(在 $\mathbb{R}_+$ 中) 的稠密度函数, 即 $\rho_{\mathbb{N}}$ 的支撑集是 $\mathbb{N}$, 且在每个自然数处给出的测度为 1; 从另外一种角度看, 可令 $S(x) = \sum_{n\le x} 1 = [x]$ 是一个定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的分段连续的函数, 则 $\rho_{\mathbb{N}}(x)dx = dS(x)$. 对 $\rho_{\mathbb{N}}$ 作 Mellin 变换

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{N}}(s) = \int_0^\infty \rho_{\mathbb{N}}(x)x^s d^*x = \sum_{n=1}^\infty n^{s-1} = \zeta(1-s),$$

由此可知黎曼 ζ-函数是自然数集上的特征函数作 "乘法 Fourier 变换" 后得到的函数.

例 3 这个例子中, 我们看看自然数乘法作用在 $\mathbb{R}_+$ 上和 ζ-函数的关系, 即研究算子 $R = \sum_{n\in\mathbb{N}} L_n$ 的性质. 记 $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的 Schwartz 函数全体, 不难验证, 当 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ 时, $(Rf)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(nx)$ 处处有定义, 且连续可微, 当 $x \to \infty$ 时, Rf 是 Schwartz 类. 为得

到 Rf 在零点也有快速递减性质, 我们需要假设 $\int_0^\infty f(x)dx=0$, 此时我们把 f 扩充成 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 即令 $f(-x)=f(x)$. 记 $\hat{f}$ 为 f 在 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换, 即 $\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}tx}dt$, 那么 $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 也是 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数, 且 $\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=0$. 当 $x\neq 0$ 时, 令 $F(y)=f(yx)$, 那么 F 连续且属于 $L^1(\mathbb{R})$. 通过 Poisson 求和公式, 我们可得

$$\begin{aligned}Rf(x)&=\sum_{n\in\mathbb{N}}f(nx)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(nx)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(n)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{F}(n)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ny}dy=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}f(yx)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ny}dy=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\frac{t}{x}}\frac{dt}{x}\\&=\frac{1}{2x}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{n}{x}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbb{N}}\hat{f}\left(\frac{n}{x}\right).\end{aligned}$$

因为 $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 所以当 $y\to\infty$ 时, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\hat{f}(ny)$ 快速递减, 其对应的是, 当 $x\to 0$ 时, $Rf(x)$ 快速递减. 这样我们得到: **当 $\boldsymbol{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)}$ 且 $\boldsymbol{\int_0^\infty f(x)dx=0}$ 时, $\boldsymbol{Rf\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)}$.** 我们用 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}_+)$ 来记满足 $\int_0^\infty f(x)dx=0$ 的 Schwartz 函数 f 的全体.

不难验证, 当 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ 时, g 的 Mellin 变换 $\tilde{g}(s)$ 是复平面上处处有定义的解析函数, 所以对 $f\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}_+)$ 且非零时, 我们有 $\tilde{f}(s)$ 和 $\widetilde{Rf}(s)$ 都是全复平面上有定义的解析函数, 当 $\mathrm{Re}(s)>1$时,

$$\begin{aligned}\widetilde{Rf}(s)&=\int_0^\infty\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f(nx)\right)x^s d^*x=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^\infty f(nx)x^s d^*x\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^\infty f(y)\left(\frac{y}{n}\right)^s d^*y=\sum_{n\in\mathbb{N}}n^{-s}\int_0^\infty f(x)x^s d^*x=\zeta(s)\tilde{f}(s).\end{aligned}$$

由此可知, 在 Mellin 变换下, $\zeta(s)$是算子 R的 “特征函数”, 且 $\frac{\widetilde{Rf}(s)}{\tilde{f}(s)}$ 是不依赖于 f 的全平面有定义的亚纯函数, 它在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时和 $\zeta(s)$ 一致, 所以, 我们可以把 $\frac{\widetilde{Rf}(s)}{\tilde{f}(s)}$ 看作 $\zeta(s)$ 在全复平面的定义 (或在全复平面上的自然延拓).

从上面两个例子我们看到黎曼 ζ-函数和自然数乘法作用的紧密联系, Mellin 变换虽然是我们常用的 Fourier 变换在乘法运算下的推广, 但它不具有经典 Fourier 变换的许多优点, 例如, 等距性、保运算等. 下面我们将类比整数加法群 $\mathbb{Z}$ 和单位圆周 S^1 的对偶关系 [2] 来研究 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}_+$ 之间及它们有可能的对偶空间, 从而建立一个保持代数结构的乘法 Fourier 变换.

3 希尔伯特空间和 KS-变换

在 $\mathbb{Z}$ 和 S^1 (或 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{D}$) 的对偶关系中, 最重要的工具是它们函数空间上的 Fourier 变换及其诱导出的 $l^2(\mathbb{Z})$ 和 $L^2(S^1)$ 之间的等距同构关系, 也就是 Riemann–Lebesgue 定理. 虽然我们常把 Mellin 变换称作 “乘法 Fourier 变换” , 它给出的是 $\mathbb{R}_+$ 上的函数到复函数之间的对应关系, 但它无法给出函数空间之间的 (对应于某希尔伯特空间结构的) 等距变换. 这节里我们将对 Mellin 变换做些修正, 引入 KS-变换, 此变换将乘法半群 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 上的函数空间和复平面 $\mathbb{C}$ 中实部大于 $\frac{1}{2}$ 的半平面上的解析函数对应, 此对应不仅是相应希尔伯特空间上的酉算子, 而且还保持的函数之间的代数运算. 为此, 我们先引入记号: 对任意实数 a, 记 $\Omega_a=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)\geq a\}$; 特别地 $\Omega=\Omega_{\frac{1}{2}}=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)\geq\frac{1}{2}\}$.

从上节我们已看到, S^1 把复平面分成了两个联通区域: 单位圆内和圆外, 圆内对应的是正整

数, 圆外对应的是负整数, 其中正整数 n 对应的复函数 z^n 在圆内解析, 0 点处取 0, 而负整数 $-n$ 对应了 $\frac{1}{z^n}$ 在无穷远处为 0, 0 点处为极点, 单位圆周是 0 和无穷远点的 "对称轴". 从此观点来看乘法群 $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ 的中心点是 1, $x \in \mathbb{R}_+$ 的对称点是 $\frac{1}{x}$, 我们先用两个例子来说明 $\mathbb{R}_+$ 中的 $(0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 两个区间的差别.

记 χ_S 为 $\mathbb{R}_+$ 的子集 S 上的特征函数, 例如, $\chi_{(0,1]}$ 为 $(0,1]$ 区间上取 1, 其他地方为 0 的函数, 对它作 Mellin 变换, 当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时,

$$\tilde{\chi}_{(0,1]}(s)=\int_0^1 x^s\frac{dx}{x}=\frac{1}{s}x^s\Big|_0^1=\frac{1}{s}$$

是复平面上关于 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的右半平面上有定义的解析函数 (否则 $\mathrm{Re}(s)\le 0$ 时, $x=0$ 会导致极点). 相对应地, 对 $\chi_{[1,\infty)}$ 作 Mellin 变换, 当 $\mathrm{Re}(s)<0$ 时,

$$\tilde{\chi}_{[1,\infty)}(s)=\int_1^\infty x^s\frac{dx}{x}=\frac{1}{s}x^s\Big|_1^\infty=-\frac{1}{s}$$

是复平面上关于 $\mathrm{Re}(s)<0$ 的左半平面上有定义的解析函数. 容易发现, $(0,\infty)$ 上的常值函数 1, 或 $\chi_{(0,1]}+\chi_{[1,\infty)}$ 的 Mellin 变换是不存在的.

从第 2 节的例 2 中可以看到, $\zeta(1-s)=\tilde{\rho}_{\mathbb{N}}(s)$, 这里的 $\rho_{\mathbb{N}}$ 是支撑在 $[1,\infty)$ 上的 (广义) 函数, 因此我们需要区分 $(0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 上的函数. 事实上, 当作适当的变量替换后, 比如 $s\to 1-s$, 这样 $[1,\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 作 Mellin 变换得到的函数 $\tilde{f}(s)$, 经过变换替换后 $\tilde{f}(1-s)$ 和 $(0,1]$ 上的函数

$$g(x)=\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

对应的 Mellin 变换 $\tilde{g}(s)$ 相等, 即 $\tilde{f}(1-s)=\tilde{g}(s)$. 进一步地, 我们还有 $f(x)\to g(x)=\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$ 给出了 $L^2([1,\infty))$ 到 $L^2((0,1])$ 上的等距同构映射. 反之, 从 $(0,1]$ 区间上的函数 $g(x)$ 出发, 定义 $[1,\infty)$ 上的函数 $f(x)=\frac{1}{x}g(\frac{1}{x})$, 则 $\tilde{f}(s)$ 也是复平面上左半平面上的解析函数, 作变量替换 $s\to 1-s$ 后才会成为右半平面上的解析函数. 例如, 取 $g(x)=\chi_{(0,1]}(x)$, 当 $x\ge 1$ 时, 令 $f(x)=\frac{1}{x}g(\frac{1}{x})$ 可得: 当 $x\ge 1$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$, 当 $0<x<1$ 时, 有 $f(x)=0$, 所以 $\mathrm{Re}(s)<1$ 时,

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty f(x)x^s d^*x=\int_1^\infty \frac{1}{x}x^{s-1}dx=-\frac{1}{s-1},$$

$s=1$ 成为该函数的唯一的一阶极点, 作 $s\to 1-s$ 变换后, 又回到了 $\tilde{g}(s)=\frac{1}{s}$. 因此, $\mathbb{R}_+$ 上函数的变换 $f(x)\to\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$ 对应了 Mellin 变换后复函数之间的映射 $\tilde{f}(s)\to\tilde{f}(1-s)$.

这里我们没有清晰地得到 $\mathbb{C}$ 上 0 和 ∞ 关于 $\mathbb{Z}$ 的对偶所得到的对称性, 但 s 到 $1-s$ 之间的对应的不动点是 $\frac{1}{2}$, 而非平凡不变子集正好是复平面上 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 这一直线, 它应该是 "Mellin 变换" 给出的对称轴. 不仅如此, 如果考虑右半平面中的 1 和 ($\mathbb{Z}$ 的加法对偶对应的) 0 对比, 左半平面中的 0 和 ($\mathbb{Z}$ 加法表示中的) ∞ 对应的话, 由此决定的分式线性变换是 $s\to\frac{1-s}{s}$ $(=z)$, 在此变换下, 单位圆周 $|z|=1$ 对应的正好就是直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$. 由此我们看到, 对 $\mathbb{R}_+$ 的乘法结构而言, 复半平面 $\mathrm{Re}(s)\ge\frac{1}{2}$ 可以类比于自然数加法对应的单位圆盘 $\mathbb{D}$, 自然数 $\mathbb{N}$ 作为乘法半群也是乘法半群 $\mathbb{R}_{\ge 1}=[1,\infty)$ 的子半群. 我们定义 **KS-变换**如下:

$$\begin{aligned}&\textbf{当 } f \textbf{ 的支撑集在 } (0,1] \textbf{ 中时}, \ (\mathfrak{K}f)(s)=\int_0^1 f(x)x^s d^*x;\\ &\textbf{当 } f \textbf{ 的支撑集在 } [1,\infty) \textbf{ 中时, 定义 } (\mathfrak{K}f)(s)=\int_1^\infty f(x)x^{1-s}d^*x.\end{aligned}\tag{3.1}$$

不难验证, 当 $f\in L^2([1,\infty))$, $\mathrm{Re}(s)=\sigma>\frac{1}{2}$ 时, $(\mathfrak{K}f)(s)$ 有定义且解析, 还可得下面估计:

$$|(\mathfrak{K}f)(s)|=\left|\int_1^\infty f(x)x^{1-s}d^*x\right|\le\|f\|_{L^2([1.\infty))}\|x^{-\sigma}\|_{L^2([1.\infty))};$$

类似地, $f\in L^2((0,1])$ 时, $(\mathfrak{K}f)(s)$ 也是 $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 的半平面内的解析函数.

这里我们不是简单地把支撑在正实轴 $(0,\infty)$ 上的函数分段, 重要的是把 $(0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 分别看作带单位元 1 的乘法半群, 此时支撑在 1 处的 δ-函数既可以看作 $(0,1]$ 上的函数, 同时也是 $[1,\infty)$ 上的函数, 而映射 $f(x)\to\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$ 给出了两个函数空间 $L^2([1,\infty))$ 和 $L^2((0,1])$ 之间的等距变换, 所以下面我们将主要讨论乘法半群 $[1,\infty)$ 的情形. 通过对数函数 log, $[1,\infty)$ 的乘法结构可转化为 $[0,\infty)$ 上的加法结构, 因此可以和经典的 Fourier 分析联系起来.

关于 $\mathbb{R}$ 上的经典 Fourier 变换的研究已很成熟, 假设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数, f 的 Fourier 变换记为 $\hat{f}$, 也是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 由下面公式给出

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}dx,$$

则 $\hat{f}$ 也是 Schwartz 类函数, 映射 $\mathcal{F}:f\to\hat{f}$ 可以扩充成 $L^2(\mathbb{R})$ 上的酉算子, 其逆算子由下面的 Fourier 逆变换给出

$$f(x)=\check{\hat{f}}(x)=\int_{-\infty}^\infty\hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xy}dy.$$

当 y 给定时, $x\to\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}$ 可看作 $\mathbb{R}$ 的特征, 所以 Fourier 逆变换 $\mathcal{F}^{-1}$ 中的 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xy}$ (x 给定时) 也是 $\mathbb{R}$ 的加法特征. Paley–Wiener 定理的出发点就是把特征中的常数 x 推广到复数, 我们用 z 表示, 对 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数 f 定义

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(z)=\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xz}dx.$$

不难看出, 类似于我们对 $\mathbb{R}_+$ 上的 Mellin 变换的讨论, $\mathcal{F}^{-1}f$ 在复平面上的解析延拓依赖于 f 的支撑集, 当 f 支撑在 $[0,\infty)$ 时, $\mathcal{F}^{-1}f(z)$ 可在复上半平面有定义, 当 f 的支撑集在 $(-\infty,0]$ 中时, $\mathcal{F}^{-1}f$ 给出的是下半平面上的解析函数. 令 $H^2(\mathbb{C}_+)$ 为区域 $\mathbb{C}_+=\{z:\mathrm{Im}(z)\ge0\}$ 上的哈代空间, 则 Paley–Wiener 定理给出的是: $\mathcal{F}^{-1}$ 是 $L^2([0,\infty))$ 到 $H^2(\mathbb{C}_+)$ 上的酉算子 [9].

函数 $\log x$ 的反函数是映射 $x\to\mathrm{e}^x$, 它给出了 $[0,\infty)$ (相对于加法) 到 $[1,\infty)$ (相对于乘法) 的代数同胚, 诱导了希尔伯特空间 $L^2([0,\infty))$ 到 $L^2([1,\infty))$ 上的酉算子, 该算子由映射 $f(x)\to g(x)=\frac{f(\log x)}{\sqrt{x}}$ 给出. 再设 $x=\log y$, $s=\frac{1}{2}-2\pi\mathrm{i}z$, 我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1}f)(z)&=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xz}dx=\int_1^\infty f(\log y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\log y)z}d(\log y)=\int_1^\infty g(y)y^{2\pi\mathrm{i}z-\frac{1}{2}}dy\\&=\tilde{g}(1-s).\end{aligned}$$

通过 $z\to s=\frac{1}{2}-2\pi\mathrm{i}z$ 的变换, $\mathbb{C}_+$ 的像集就成了 $\Omega=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)\ge\frac{1}{2}\}$. 因为哈代空间 $H^2(\Omega)$ 中的函数 $g(s)$ 的范数定义

$$\|g\|^2=\sup_{\sigma>\frac{1}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty|g(\sigma+\mathrm{i}t)|^2dt$$

中的积分是竖直线上的 (即一维的), 我们可以从 Paley–Wiener 定理直接得到下面的对应乘法结构的 Riemann–Lebesgue 定理:

定理 4 等式 (3.1) 中定义的 KS-变换 $\mathfrak{K}$ 是 $L^2([1,\infty))$ 到 $H^2(\Omega)$ 上的酉算子, 其逆变换由下面等式给出: 对 $\varphi \in H^2(\Omega)$, $a > \frac{1}{2}$,

$$(\mathfrak{K}^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(a+\mathrm{i}t)x^{a+\mathrm{i}t-1}dt. \tag{3.2}$$

当 $f \in L^2([1,\infty))$ 时, $\mathfrak{K}f$ 和 f 在 1 点的取值没有关系, 而我们把 KS-变换推广到更广义的函数类时, 例如 f 是 1 处的 δ-函数时, 我们定义

$$(\mathfrak{K}f)(s) = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1-\epsilon}^{\infty} f(x)x^{1-s}d^*x. \tag{3.3}$$

只要当 $\mathrm{Re}(s)$ 充分大时, 上面的积分有定义, 我们都可以定义 f 的 KS-变换, 相应的逆变换中的积分线也一样右移到适当的实部充分大的地方. 下节里, 我们讨论 KS-变换的代数性质.

4 乘法卷积和哈代空间 $H^2(\Omega)$ 上的算子

在 $\mathbb{Z}$ 和 S^1 的对偶中, S^1 上的函数的乘法在 Fourier 变换后对应的是 $\mathbb{Z}$ 上的函数的 (加法) 卷积, 即加法群 $\mathbb{Z}$ 的群代数中元素的乘积. 当限制在非负整数时, 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数的乘积也对应了 (加法半群) $\mathbb{N}_0$ 上的函数的卷积, 类似的对应在 $\mathbb{R}$ 和其对偶群上也成立. 上一节中我们看到从 Paley–Wiener 定理可得 KS-变换是 $L^2([1,\infty))$ 到 $H^2(\Omega)$ 上的酉算子, 那么它是否也给出了乘法半群 $[1,\infty)$ 和 Ω 之间的对偶关系, 即 $[1,\infty)$ 上函数的乘法卷积是否对应到 Ω 上函数的通常乘积? 这节我们将从正面回答该问题.

我们先给出一些记号. 当 $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n L_n$, $\beta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n L_n$ 是群代数 $\mathbb{C}\mathbb{Z}$ 中的两个元素时, 记 $\alpha\beta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n L_n$ 时, 则 $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ 就是 a_n 和 b_n (作为算术函数) 的卷积. 当我们把加法平移变换记为 $A_k(b_n) = b_{n-k}$ 时, $c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k A_k(b_n)$. 类似地, 对有乘法 (交换) 半群结构的区间 $[1,\infty)$ 而言, 对任意函数 $g(x)$, 定义乘法平移变换 $(U_t g)(x) = g(\frac{x}{t})$. 为简单起见, 我们先假设 $f(x)$ 是 $[1,\infty)$ 上的紧支集函数, 定义由 $f(x)$ 诱导的卷积算子为 $C_f = \int_1^\infty f(t)U_t d^*t$, 则我们称 $C_f(g)$ 为 f 和 g 的 (乘法) 卷积, 记为 $f\star g(x)$, 即

$$(f\star g)(x) = C_f(g)(x) = \int_1^\infty f(t)(U_t g)(x)d^*t = \int_1^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)d^*t. \tag{4.1}$$

上面的卷积定义不一定要限制到紧支集函数类里, 只要等式右端有意义, 我们都可以定义 $[1,\infty)$ 上的两个函数 (甚至是广义函数) 的乘法卷积, 我们总是假设在 $x<1$ 时所有函数取零值. 由于 $[1,\infty)$ 作为实数的乘法是交换的, 所以 $f\star g = g\star f$, 即卷积是一个交换的运算. 通过计算

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(f\star g)(s) &= \int_1^\infty\left(\int_1^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)d^*t\right)x^{1-s}d^*x = \int_1^\infty\left(\int_1^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)x^{1-s}d^*x\right)d^*t\\ &= \int_1^\infty\left(\int_1^\infty f(t)g(u)(ut)^{1-s}d^*u\right)d^*t = \mathfrak{K}(f)(s)\mathfrak{K}(g)(s),\end{aligned}$$

我们得到

$$\mathfrak{K}(f\star g)(s) = \mathfrak{K}(f)(s)\mathfrak{K}(g)(s). \tag{4.2}$$

和经典的 Fourier变换一样, KS-变换不仅保持了希尔伯特空间 $L^2([1,\infty))$和哈代空间 $H^2(\Omega)$ 之间的同构关系, 它还可以延拓到更广的函数类或分布上. 从上面的恒等式 $\mathfrak{K}(f\star g) = \mathfrak{K}(f)\mathfrak{K}(g)$ 可以看出, KS-变换还保持了函数空间的 (某种) 代数结构. 类似于 Fourier 变换作为酉算子可以

共轭作用到函数空间 $L^2(S^1)$ 上的算子上, 我们一样可定义 KS-变换的共轭作用. 当 $\psi(s)$ 在 Ω 内解析, 定义由 ψ 诱导的乘法算子 $M_\psi:\varphi(s)\to\psi(s)\varphi(s)$, 当 ψ 在 Ω 上一致有界时, M_ψ 为 $H^2(\Omega)$ 上的有界线性算子, 则我们有下面结果:

定理 5 设 $f(x)$ 为 $[1,\infty)$ 上的函数, 记 $(\mathfrak{K}f)(s)=\phi(s)$ 在 Ω 内有定义, 我们有算子恒等式 $\mathfrak{K}C_f\mathfrak{K}^{-1}=M_\phi$, 或等价地 $\mathfrak{K}^{-1}M_\phi\mathfrak{K}=C_f=C_{\mathfrak{K}^{-1}\phi}$.

简记 $\mathcal{H}=L^2([1,\infty))$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子全体构成的代数, 对有界或无界算子而言, 算子的伴随是很重要的概念, 下面我们计算卷积算子 C_f 的伴随. 从 C_f 的定义 $C_f=\int_1^\infty f(t)U_td^*t$ 和 U_t 的定义 $(U_tg)(x)=g(\frac{x}{t})$ 可知, $C_f^*=\int_1^\infty\overline{f(t)}U_t^*d^*t$, 所以只要计算 U_t^*. 设 $g,h\in\mathcal{H}$ 为 $[1,\infty)$ 上的函数, 则对 $t\geq 1$,

$$\langle U_tg,h\rangle=\int_1^\infty g\left(\frac{x}{t}\right)\overline{h(x)}dx=\int_t^\infty g\left(\frac{x}{t}\right)\overline{h(x)}dx=\int_1^\infty g(u)\overline{h(ut)}tdu=\langle g(u),th(ut)\rangle,$$

由此可得 $(U_t^*h)(x)=th(xt)$, 当 $x<1$ 时, 定义 $(U_t^*h)(x)=0$.

作为 $L^2([1,\infty))$ 上的算子, U_t 和 U_t^* 都是有界线性算子, 但不是酉算子, 范数满足 $\|U_t\|^2=\|U_t^*\|^2=\|U_tU_t^*\|$. 当 $g\in\mathcal{H}$ 时, 有

$$\|U_tg\|^2=\langle U_tg,U_tg\rangle=\int_1^\infty g\left(\frac{x}{t}\right)\overline{g\left(\frac{x}{t}\right)}dx=\int_1^\infty g(u)\overline{g(u)}tdu=t\|g\|^2.$$

由此可得 $\frac{U_t}{\sqrt{t}}$ 是等距算子 ($\frac{U_t^*}{\sqrt{t}}$ 则是部分等距算子), 所以有 $\|U_t\|=\|U_t^*\|=\sqrt{t}$, 从而可得, 对任意 $1\leq a<b$, $C_{\chi_{[a,b]}}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 (也可见下一节的例 9). 算子的伴随将在第 6 节中起到重要作用, 下一节我们给出 KS-变换的例子.

5 狄利克雷 L-函数和 KS-变换

当我们把 KS-变换应用到 ζ-函数、或更一般的 L-函数时, 我们感兴趣的空间会变小, 它们对应到的实轴 $[1,\infty)$ 上的函数类也会变小. 这节我们研究狄利克雷 L-函数在 KS-变换 (或 KS-逆变换) 下的性质.

设 $a_n\in\mathbb{C}$, 我们常把 $L(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s}$ 称为狄利克雷级数或狄利克雷 L-函数 (当 $a_n=1$ 时, 则 $L(s)=\zeta(s)$). 我们不妨做一些大胆试验, 令 $\alpha_{\mathbb{N}}$ 是支撑在 $\mathbb{N}$ 上的并在 n 点的测度为 a_n 的广义函数 (见例 2), 那么对 $(0,\infty)$ 上任意紧支撑的连续函数 $g(x)$, 我们有等式 $\int_0^\infty\alpha_{\mathbb{N}}(x)g(x)dx=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_ng(n)$ 成立. 当 $g(x)=\chi_{(0,y]}(x)$ 时, 我们可定义 $f(y)=\int_0^\infty\alpha_{\mathbb{N}}(x)g(x)dx=\sum_{n\leq y}a_n$, 这样 $\alpha_{\mathbb{N}}(x)$ 可看作阶梯函数 $f(x)$ 的导数, 此时 $L(s)$ 也可以用积分的形式给出

$$L(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s}=\int_0^\infty\alpha_{\mathbb{N}}(x)x^{-s}dx=\int_0^\infty x^{-s}df(x)=x^{-s}f(x)\big|_0^\infty-\int_0^\infty f(x)dx^{-s},$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 充分大且 $f(x)$ 增长不快时, 可设 $x^{-s}f(x)\to 0$ (当 $x\to\infty$ 时), 再记 $\ell(x)=\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}a_n$, 当 $x<1$ 时可令 $\ell(x)=0$. 这样上面的等式就给出了

$$L(s)=s\int_0^\infty f(x)x^{-s-1}dx=s\int_0^\infty\frac{1}{x}f(x)x^{1-s}d^*x=s\int_1^\infty\ell(x)x^{1-s}d^*x=s(\mathfrak{K}\ell)(s).$$

由此我们引入下面的定义:

定义 6 设 $a_n\in\mathbb{C}$ $(n\in\mathbb{N})$ 为一序列, 定义 $\ell(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}a_n$, 我们称 $\mathfrak{K}\ell(s)$ 为序列 $\{a_n\}$ 的 KS-变换, 并记 $(\mathfrak{K}\{a_n\})(s)=(\mathfrak{K}\ell)(s)=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s}$.

不难验证, $(\mathfrak{K}\{a_n\})(s) \in H^2(\Omega)$ 当且仅当 $\ell(x) \in L^2([1,\infty))$. 例如, 设 $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, 令 $a_n = 0$, 我们就有 $(\mathfrak{K}\{a_n\})(s) = \frac{1}{s}$, 此时 $\ell(x) = \frac{1}{x}$ (当 $x < 1$ 时, 令 $\ell(x) = 0$).

从上面分析可以看出, $\mathfrak{K}\{a_n\}(s)$ 的定义域依赖于 $\{a_n\}$ 的增长速度. 不难看到, 经典 "L-函数" 可以由 $[1,\infty)$ 上的函数 $\ell(x)$ 通过 KS-变换得到, 为了和经典的 L-函数一致, 我们称

$$L(\ell, s) = s(\mathfrak{K}\ell)(s) = s\int_1^\infty \ell(x)x^{1-s}d^*x$$

为 $\ell(x)$ 诱导的 L-函数. 下面我们给出一些和 $\zeta(s)$ 有关的例子.

例 7 当 $x \geq 1$ 时, 设 $\ell_0(x) = 1$, $x < 1$ 时, 令 $\ell_0(x) = 0$, 则 $L(\ell_0, s) = s\int_1^\infty x^{1-s}d^*x = s\frac{1}{1-s}x^{1-s}\big|_1^\infty$. 当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时, 可得 $L(\ell_0, s) = \frac{s}{s-1}$.

对所有 $n \in \mathbb{N}$, 令 $a_n = 1$, 当 $x \in [1,\infty)$ 时, 我们定义 $\ell_\zeta(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}1 = \frac{[x]}{x}$, 则 $\mathrm{Re}(s) > 1$时,

$$L(\ell_\zeta, s) = s(\mathfrak{K}\ell_\zeta)(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x}x^{1-s}d^*x = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{1+s}}dx = -\int_1^\infty [x]dx^{-s} = \zeta(s).$$

上面最后一个等式可参照 (3.3), 用分部积分得到. 设 $\ell_1(x) = \ell_0(x) - \ell_\zeta(x)$ (当 $x < 1$ 时, 令 $\ell_1(x) = 0$), 则不难验证, 当 $x \geq 1$ 时, $\ell_1(x) = \frac{\{x\}}{x}$, 因此 $\ell_1(x) \in L^2([1,\infty))$, 此时由 KS-变换的线性性可得 $(\mathfrak{K}\ell_1)(s) = \frac{1}{s}(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)) \in H^2(\Omega)$.

从上面的例子可以看到, $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\zeta(s) \in H^2(\Omega)$, 当 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 时, $\zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t)$ (当 $t \to \infty$ 时) 的增长不能太快, 因此 KS-变换可以提供研究 L-函数的一个新途径.

例 8 例 7 给出了 $\frac{s}{s-1} - \zeta(s)$ 到 Ω 上的解析延拓, 另外一种更直接的方法是用 $(s-1)\zeta(s)$ 来去掉 $\zeta(s)$ 在 $s = 1$ 处的一阶极点, 但这样 $\zeta(s)$ 和 $(s-1)\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 处的函数值会相差很大. 为保留 $\zeta(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t)$ 的变化, 我们可以考虑函数 $\frac{s-1}{s}\zeta(s)$, 当 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 时, $|\frac{s-1}{s}| = 1$, 而 $\frac{s-1}{s}\zeta(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s}\zeta(s)$. 从例 2 和上面的例子可以看到, 当 $\ell(x) = \rho_{\mathbb{N}}(x) - \ell_\zeta(x)$ 时, $\mathfrak{K}\ell(s) = \frac{s-1}{s}\zeta(s)$.

进一步计算可得 (参见后面的例 11): 取 $\ell(x) = \frac{1}{x}([x] - [x]\log x + \sum_{n\leq x}\log n)$, $\mathfrak{K}\ell(s) = \frac{s-1}{s^2}\zeta(s) \in H^2(\Omega)$.

例 9 对任意 $a > 1$, 令 $\chi_a = \chi_{[1,a]}$ 为 $[1,a]$ 上的特征函数, 则

$$L(\chi_a, s) = s(\mathfrak{K}\chi_a)(s) = s\int_1^\infty \chi_a(x)x^{1-s}d^*x = s\int_1^a x^{-s}dx = \frac{s}{1-s}x^{1-s}\big|_1^a = \frac{s}{1-s}(a^{1-s}-1).$$

当 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 时, 它有无穷多个零点.

设 $1 \leq a < b$, 记 $\chi_{[a,b]}$ 为 $[a,b]$ 上的特征函数, 则

$$\mathfrak{K}\chi_{[a,b]}(s) = \int_1^\infty \chi_{[a,b]}(x)x^{1-s}d^*x = \int_a^b x^{-s}dx = \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s},$$

是全复平面上有定义的解析函数, 当 $s = \sigma + \mathrm{i}t$, 其中 $\sigma > 0$ 给定时, 从 $0 < x^{-\sigma} \leq 1$ 可知

$$\left|\int_a^b x^{-s}dx\right| \leq \int_a^b x^{-\sigma}dx \leq b - a,$$

所以 $\mathfrak{K}\chi_{[a,b]}(s)$ 是 Ω 上的一致有界的解析函数.

另外一类特征函数是 $\chi_{[a,\infty)}$, 为了得到 $L^2([1,\infty))$中的函数, 我们定义 $\ell_a(x) = \frac{1}{x}\chi_{[a,\infty)}(x)$,则

$$L(\ell_a, s) = s(\mathfrak{K}\ell_a)(s) = s\int_a^\infty \frac{x^{1-s}}{x}d^*x = s\int_a^\infty x^{-s-1}dx = -x^{-s}\big|_a^\infty = a^{-s}.$$

特别地, 当 $a = n$ 是自然数时, $(\mathfrak{K}\ell_n)(s) = \frac{1}{sn^s} \in H^2(\Omega)$. 不难验证 $\{\ell_a(x) : a \geq 1\}$ 线性生成 $L^2([1,\infty))$ 的稠子空间, 所以 $\{\frac{1}{sa^s} : a \geq 1\}$ 的线性组合在 $H^2(\Omega)$ 中稠密.

6 算子指标和黎曼假设

算子指标最早是用来刻画算子方程 (特别地, Fredholm 积分方程) 可解性的条件, 后来被 Atiyah 和 Singer [1] 用来刻画流形的拓扑不变量, 成为非常有效的数学工具. 这节我们用算子指标的语言来描述 L-函数的零点 (和极点), 我们对稠定无界算子定义指标:

定义 10 对 $H^2(\Omega)$ (或任意希尔伯特空间) 上的稠定算子 T, 假设 T^* 也稠定, 且 $\ker(T)$ 和 $\ker(T^*)$ 之一维数有限, 我们定义 T 的指标为 $\mathrm{Ind}(T)=\dim\ker(T)-\dim\ker(T^*)$.

对某希尔伯特空间上的 Fredholm 算子 F 而言, 其值域总是假设为闭子空间, 而我们这里的算子的值域一般不是闭的, 我们借用 "指标" 这个概念来定义非 Fredholm 算子的指标, 当算子具有 Fredholm 性质时, 我们上面的定义和原来的 Fredholm 算子的指标是一致的.

假设 $f(x)\in L^2([1,\infty))$, 记 $\phi(s)=\mathfrak{K}f(s)\in H^2(\Omega)$. 对所有 $1\le a<b$, 函数 $\chi_{[a,b]}$ 线性生成的子空间在 $L^2([1,\infty))$ 中稠密, 由 $C_{\chi_{[a,b]}}$ 的有界性 (见例 9) 可知, $C_{\chi_{[a,b]}}f=C_f(\chi_{[a,b]})\in L^2([1,\infty))$, 由此可知卷积算子 C_f 是希尔伯特空间 $L^2([1,\infty))$ 上的有稠密定义域的算子, 因此乘积算子 M_ϕ 是 $H^2(\Omega)$ 上的稠定算子. 从第 4 节卷积算子及其伴随的刻画可知

$$
\begin{aligned}
C_f^*\chi_{[a,b]}(x)&=\int_1^\infty\overline{f(t)}(U_t^*\chi_{[a,b]})(x)d^*t=\int_1^\infty\overline{f(t)}\chi_{[a,b]}(xt)td^*t\\
&=\int_x^\infty\overline{f\left(\frac{u}{x}\right)}\chi_{[a,b]}(u)\frac{du}{x}=\frac{1}{x}\int_a^b\overline{f\left(\frac{u}{x}\right)}du.
\end{aligned}
$$

不难看出, 当 $x\ge b$ 时, 上面的函数为零, 所以 $C_f^*\chi_{[a,b]}\in\mathcal{H}\ (=L^2([1,\infty)))$. 由此可得 C_f^*, 从而 M_ϕ^* 也是稠定的.

设 $\phi(s)$ 在 Ω 内解析, 即使 $\phi\notin H^2(\Omega)$, 只要 M_ϕ 是 $H^2(\Omega)$ 上的稠定算子时, 对任意非零解析函数 $\psi\in H^2(\Omega)$, 我们都有 $\phi(s)\psi(s)\ne0$, 从而 $\ker(M_\phi)=0$. 此时如果 M_ϕ^* 也是稠定时, 不难得到它的值域在 $H^2(\Omega)$ 中稠密, 而 M_ϕ 的值域稠密则等价于 $\ker(M_\phi^*)=0$, 所以对这类算子

$$
\mathrm{Ind}(M_\phi)=\dim\ker(M_\phi)-\dim\ker(M_\phi^*)=-\dim\ker(M_\phi^*).
$$

下面我们将建立 M_ϕ 的指标和 $\phi(s)$ 的零点的关系. 我们先给一个指标为零的例子.

例 11 由 KS-变换的定义易得 (见定义 6 及之后的一段叙述) $(\mathfrak{K}\frac{1}{x})(s)=\frac{1}{s}$, 所以 $M_{\frac{1}{s}}$ 作用在 $H^2(\Omega)$ 上的性质完全由 $C_{\frac{1}{x}}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的作用完全决定. 设 $f\in\mathcal{H}$, 则

$$
\begin{aligned}
(C_{\frac{1}{x}}f)(u)&=\int_1^\infty\frac{1}{t}f\left(\frac{u}{t}\right)d^*t=\int_1^u\frac{1}{t^2}f\left(\frac{u}{t}\right)dt=\int_u^1\frac{x^2}{u^2}f(x)d\frac{u}{x}=\frac{1}{u}\int_1^u f(x)dx;\\
(C^*_{\frac{1}{x}}f)(u)&=\int_1^\infty\frac{1}{t}f(ut)td^*t=\int_1^\infty\frac{1}{t}f(ut)dt=\int_u^\infty\frac{u}{x}f(x)d\frac{x}{u}=\int_u^\infty\frac{f(x)}{x}dx.
\end{aligned}
$$

容易验证 $\ker(C^*_{\frac{1}{x}})=0$, 也就等价于 $\ker(M^*_{\frac{1}{s}})=0$. 事实上, 由 $\frac{1}{s}$ 在 Ω 上的一致有界性可得, $M_{\frac{1}{s}}$ 是有界线性算子, 从而 $M^*_{\frac{1}{s}}$, $C_{\frac{1}{x}}$ 和 $C^*_{\frac{1}{x}}$ 等都是有界线性算子. 类似的方法可以用到很多其他算子上, 比如和 $M_{\frac{1}{s^2}}$ 有关的算子 $C_{\frac{1}{x}\star\frac{1}{x}}$. 从 $\ker(M^*_{\frac{1}{s}})=0$ 可得 $\ker(M^*_{\frac{1}{s^2}})=0$, 而

$$
\left(\frac{1}{x}\star\frac{1}{x}\right)(u)=\int_1^\infty\frac{1}{x}\frac{1}{u/x}d^*x=\frac{1}{u}\int_1^u\frac{dx}{x}=\frac{\log u}{u},
$$

所以 $\mathfrak{K}\frac{\log x}{x}(s)=\frac{1}{s^2}$. 这样 $C_{\frac{\log x}{x}}$ 等都是有界线性算子, 且

$$
C^*_{\frac{\log x}{x}}f(u)=\int_1^\infty\frac{\log t}{t}f(ut)td^*t=\int_u^\infty\frac{f(x)(\log x-\log u)}{x}dx.
$$

对于在 Ω 内有极点的函数 $\phi(s)$, 我们无法定义一个稠定算子 M_ϕ 使得它在 $H^2(\Omega)$ 上的作用由乘积给出, 但只要 ϕ 在 Ω 内解析 (没有极点), 在 Ω 上**至多多项式增长, 即存在 n 使得** $\frac{\phi(s)}{s^n} \in H^2(\Omega)$, 这样就可以定义 $H^2(\Omega)$ 上的稠定算子 M_ϕ: 如果把 $M_{\frac{\phi(s)}{s^n}}$ 的定义域记为 $\mathcal{K}$ (它在 $H^2(\Omega)$ 中稠), 则 M_ϕ 可以作用在 $M_{\frac{1}{s^n}}\mathcal{K}$ 上, 由上面的例子可知该值域在 $H^2(\Omega)$ 中是稠密的, 类似地, 我们也得到 M_ϕ^* 也是稠定的. 因此我们讨论乘积算子 M_ϕ 时, 总是假定 ϕ 在 Ω 内解析, 且存在 $n \geq 0$ 使得 $\frac{\phi(s)}{s^n} \in H^2(\Omega)$.

定理 12 设 $\phi(s) \in H^2(\Omega)$, 当 $\ker(M_\phi^*) = 0$ (或 M_ϕ 的值域稠密), 等价地 $\mathrm{Ind}(M_\phi) = 0$ 时, 则对所有 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, $\phi(s) \neq 0$.

证明 由这节开头的讨论和定理的假设知 M_ϕ 的值域在 $H^2(\Omega)$ 中稠, 记 $f(x) = (\mathfrak{K}^{-1}\phi)(x) \in \mathcal{H}$. 再由 $\mathfrak{K}\chi_{[a,b]}$ 在 M_ϕ 的定义域中且它们线性生成 $H^2(\Omega)$ 的稠子集, 对任意给定 $s_0 = \sigma + \mathrm{i}t$, 假设 $\mathrm{Re}(s_0) = \sigma > \frac{1}{2}$, 可取 $\epsilon > 0$, 使得

$$\sigma > \frac{1 + \epsilon^2 |s_0|^2}{2}. \tag{6.1}$$

由假设 M_ϕ 的值域稠密可知, 对 $\frac{1}{s} \in H^2(\Omega)$, 存在复数 λ_j 和 $\chi_{[a_j,b_j]}$, $j = 1, \ldots, n$, 使得

$$\left\| \frac{1}{s} - \phi(s) \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathfrak{K}\chi_{[a_j,b_j]}(s) \right\|_{H^2(\Omega)} < \epsilon.$$

令 $g(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{[a_j,b_j]}(x)$, 则 $\|\frac{1}{x} - f \star g\|_{\mathcal{H}} < \epsilon$, 而

$$\frac{1}{s_0} - \phi(s_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathfrak{K}\chi_{[a_j,b_j]}(s_0) = \mathfrak{K}\left(\frac{1}{x} - f \star g\right)(s_0) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - f \star g(x)\right) x^{1-s_0} d^*x.$$

由 Cauchy–Schwartz 不等式知

$$\left| \frac{1}{s_0} - \phi(s_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathfrak{K}\chi_{[a_j,b_j]}(s_0) \right| \leq \left\| \frac{1}{x} - f \star g \right\|_{\mathcal{H}} \|x^{-s_0}\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon \left(\int_1^\infty x^{-2\sigma} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left(\frac{1}{2\sigma - 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $\phi(s_0) = 0$, 则由 (6.1) 知 $|\frac{1}{s_0}| \leq \epsilon(\frac{1}{2\sigma-1})^{\frac{1}{2}} < \epsilon \frac{1}{\epsilon|s_0|}$, 可得矛盾, 从而得证 $\phi(s) \neq 0$.

当存在 s 使得 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 及 $\phi(s) = 0$ 时, 我们可构造 $\ker(M_\phi^*)$ 中的非零向量 (见定理 15).

注记 13 上面的定理对 Ω 上至多多项式增长的解析函数也成立. 定理的逆命题对 黎曼 ζ-函数也成立, 即取 $\phi(s) = \frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$, 黎曼假设成立时, $M_{\phi(s)}$ 也有稠密的值域, 其证明可以利用表达式 $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s}$ 及 Möbius 函数 μ 的性质得到, 细节将来后续文章中展开, 这里从略.

对 Ω 上的函数 $s - a$ 或 $s - b$, 它们只差一个常数, 可以通过计算得到它们诱导的乘法算子的指标和 M_{s-1} 相同. 下面我们首先计算 $\mathrm{Ind}(M_{s-1})$.

例 14 由上面的讨论可知 $\mathrm{Ind}(M_{s-1}) = \mathrm{Ind}(M_{\frac{s-1}{s^2}})$, $\frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$, 通过 KS-变换, 只要计算 $C_{\frac{1}{x}} - C_{\frac{1}{x} \star \frac{1}{x}}$ 的指标. 由于该算子的核为零, 所以我们只要计算 $\ker(C_{\frac{1}{x}}^* - C_{\frac{1}{x} \star \frac{1}{x}}^*)$. 由例 11 知 $\frac{1}{x} \star \frac{1}{x} = \frac{\log x}{x}$, 对 $f \in \ker(C_{\frac{1}{x}}^* - C_{\frac{\log x}{x}}^*)$,

$$\begin{aligned} 0 = (C_{\frac{1}{x}}^* - C_{\frac{\log x}{x}}^*) f(u) &= \int_u^\infty \frac{f(x)}{x} dx - \int_u^\infty \frac{f(x)(\log x - \log u)}{x} dx \\ &= \int_u^\infty \frac{f(x) - f(x)\log x}{x} dx + \log u \int_u^\infty \frac{f(x)}{x} dx, \end{aligned}$$

对 u 求导数得

$$0=-\frac{f(u)}{u}+\frac{1}{u}\int_u^\infty\frac{f(x)}{x}dx,$$

即 $f(u)=\int_u^\infty\frac{f(x)}{x}dx$, 再对 u 求导得 $f'(u)=-\frac{f(u)}{u}$, 求解得 $f(u)=a\frac{1}{u}$ (a 为任意常数), 由此得到 $\ker(C^*_{\frac{1}{x}-\frac{\log x}{x}})$ 是一维的非平凡子空间, 所以 $\mathrm{Ind}(M_{\frac{s-1}{s^2}})=\mathrm{Ind}(M_{s-1})=-1$.

不难验证对任意 $b=\sigma+\mathrm{i}t$, $\sigma>\frac{1}{2}$, $\frac{s-b}{s^2}=\frac{1}{s}-\frac{b}{s^2}$, 在 KS-逆变换下对应了 $\frac{1}{x}-b(\frac{1}{x}\star\frac{1}{x})$,还有

$$\ker(C^*_{\frac{1}{x}-b\frac{1}{x}\star\frac{1}{x}})=\left\{c\frac{1}{x^{\bar{b}}}:c\in\mathbb{C}\right\}.$$

由此可得:

定理 15 如果 $\phi\in H^2(\Omega)$, $\mathfrak{K}f=\phi$, 则存在 $b=\sigma+\mathrm{i}t$, $\sigma>\frac{1}{2}$, 使得 $\phi(b)=0$ 当且仅当 $x^{-\bar{b}}\in\ker(C_f^*)$.

从上面的计算可知 M_{s-1} 的值域的闭包是 $H^2(\Omega)$ 中余维数是 1 的子空间, 而 M_{s-1} 的值域可以看成算子 $M_{\frac{1}{s-1}}$ 的定义域, 当 T 是可逆有界算子时 $\mathrm{Ind}(T)=0$, 这样 $\mathrm{Ind}(TM_{s-1})=\mathrm{Ind}(M_{s-1}T)=-1$, 所以 M_{s-1} 乘以一个算子后会使得乘积算子的指标减 1. 又因 $\mathrm{Ind}(I)=0$ 及 $I=M_{\frac{1}{s-1}}M_{s-1}$, 从而我们可以定义 $\mathrm{Ind}(M_{\frac{1}{s-1}})=1$. 更一般地, 我们有下面的定义:

定义 16 设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 在 Ω 内 (按重数计算) 有有限多个极点 $s_1,\dots,s_k$, 记 $g(s)=(s-s_1)\cdots(s-s_k)$. 再设存在 $n\geq k+1$, 使得 $\frac{g(s)\phi(s)}{s^n}\in H^2(\Omega)$, 则我们定义

$$\mathrm{Ind}(\phi)=\mathrm{Ind}(M_\phi)=\mathrm{Ind}(M_{\frac{g(s)\phi(s)}{s^n}})-\mathrm{Ind}(M_{\frac{g(s)}{s^n}}).$$

事实上, 不难验证上面定义中的 $\mathrm{Ind}(M_{\frac{g(s)}{s^n}})=-k$. 由上面的定义知:

定理 17 如果 $\mathrm{Ind}(\zeta(s))=1$, 或等价地 $\mathrm{Ind}(\frac{s-1}{s^2}\zeta(s))=0$, 此时, $\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)\in H^2(\Omega)$, 那么黎曼假设成立.

事实上, 该定理的逆命题也成立, 我们将在后续文章中把算子离散化后继续讨论, 比较简单的离散化是把函数类限制到狄利克雷 L-函数有关的函数空间 (及其闭包) 和对应的算子上, 这对应在 $[1,\infty)$ 上的函数类为 (乘以因子 x 后的) $[n,n+1)$ 上为常值的函数. 但更自然的离散化是找到一组 $H^2(\Omega)$ (或 $L^2([1,\infty))$) 中的自然的标准正交基, 类似于 $H^2(\mathbb{D})$ 中的基 $\{z^n:n\geq 0\}$, 在这组正交基下 ζ-函数的分解及对应的算子也有离散化的形式, 算子理论中的工具或许能发挥重要作用. 下面我们简要叙述前一种离散化的过程中产生的算子的刻画.

如果把 $l^2(\mathbb{N})$ 嵌入到 $\mathcal{H}$ 中, 对 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\in l^2(\mathbb{N})$, 定义 $\mathcal{H}$ 中的函数为: $[n,n+1)$ 上取 a_n, 则我们可以把 $\mathcal{H}$ $(=L^2([1,\infty)))$ 到 $H^2(\Omega)$ 上的同构限制到 $l^2(\mathbb{N})$ 到它在 (在 KS-变换下) $H^2(\Omega)$ 中的像集里. 不难验证, 当 $f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}b_n$ 和 L-函数 $L(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{b_n}{n^s}$ 有关, 即由定义 6 知 $(\mathfrak{K}f)(s)=\frac{1}{s}L(s)$. 当假设 $f\in\mathcal{H}$ 时, $C_f(\{a_n\})(x)$ 也具有 $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}c_n$ 的形式. 如果我们把 $\frac{1}{x}$ 进一步离散化, 即当 $n\leq x<n+1$ 时, $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{1}{n}$ 替代, 我们可以得到定理 12 的一个离散形式 (定理的证明将在后续文章中给出), 定理中的算子 A 的值域完全由其列向量的线性组合决定, 而每一列则可看作 $S(x)$ (卷积) 作用在 n 点取 1 (其他地方为零) 的特征函数上, 等价地, 也可看作乘法平移 U_n 作用在 $S(x)$ 上, 其中的系数 $\frac{1}{m}$ 则可看作 m 点 (或区间 $[m,m+1)$ 上) 的一种加权测度.

定理 18 设 $a_n\in\mathbb{C}$ 为模 $d(\in\mathbb{N})$ 的 $\mathbb{N}$ 上的乘法特征, 使得 $S(x)=\sum_{n\leq x}a_n$ (对 $x\geq 1$) 一致有界. 令 $L(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s}$, 则算子 $A=(\frac{1}{m}S(\frac{m}{n}))_{m,n}$ 是 $l^2(\mathbb{N})$ 上的有界线性算子, 且 $L(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 时, 非零当且仅当 A 的值域在 $l^2(\mathbb{N})$ 中稠, 或等价地 $\ker(A^*)=\{0\}$.

不难看出, 定理中的 $a_1=1$, 当 $n>m$ 时, $S(\frac{m}{n})=0$, 可知 A 是下三角算子, 对角上都非零, 所以 $\ker(A)=\{0\}$. 这样, 上面的定理也可叙述为: $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 时, $L(s)\neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{Ind}(A)=0$. 定理中 $S(x)$ 的有界性假定是为了避免 $L(s)$ 在 Ω 中产生极点. 当 $S(x)=\sum_{n\leq x}a_n$ (对 $x\geq 1$) 无界但具有多项式增长时 (例如黎曼 $\zeta(s)$ 对应的常值函数 $a_n=1$ 时), 我们也有类似的结果, 这时对应的算子是无界的, 但我们可以乘以一个好的 (有界且 "几乎" 可逆的) 算子使其成为有界算子. 例如我们有下面的定理, 证明细节将在后续文章中给出.

定理 19 定义算子

$$A_\zeta=\left(\frac{1}{mn}\left\{\frac{m}{n+1}\right\}\right)_{m,n\geq 1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots\end{pmatrix},$$

则 A_ζ 是 $l^2(\mathbb{N})$ 上的有界线性 (Hilbert–Schmidt) 算子, 且

(1) $\ker(A_\zeta)=\{0\}$;

(2) A_ζ 在 $l^2(\mathbb{N})$ 中的值域稠密充分必要黎曼假设成立;

(3) 向量 $(1,0,0,\ldots)$ 在 A_ζ 的值域的闭包里充分必要黎曼假设成立.

由于右乘一个有界的有稠值域的有界 (线性) 算子不改变算子 A_ζ 的值域的稠密性, 不难验证通过右乘一个这样的算子可以把 A_ζ 下三角化, 从而很容易得到 $\ker(A_\zeta)=\{0\}$. 一般来说, 通过算子的上三角化, 可以得到一个算子的值域的性质, 但我们对 A_ζ 是否可以 "上三角化" 还没有任何方法. 当然我们这里的三角化过程是保持 A_ζ 的离散矩阵表达式的前提下做的, 紧算子的 "广义" 三角化过程已有很成熟的结果. 关于算子理论和算子代数的基础, 可参见 [5].

有关希尔伯特空间 $L^2([1,\infty))$ 和哈代空间 $H^2(\Omega)$ 中的标准正交基的讨论, 及其和黎曼 ζ-函数的联系等将在以后的文章中展开, 我们也将建立有关零点的实部和某种正定性的联系, 这和李先进正定性 [6] 有关.

参 考 文 献

[1] Atiyah M., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1963, **69**: 422–433.

[2] 葛力明, 数与形 — 一个说不尽的话题, 数学所讲座 2010, 科学出版社, 2012: 1–7.

[3] 葛力明, 薛博卿, 黎曼 ζ-函数的零点都有 $\frac{1}{2}+it$ 的形式吗? 科学通报, 2018: 141–147

[4] Hadamard J., Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 1896, **24**: 199–220.

[5] Kadison R., Ringrose J., Fundamentals of the Operator Algebras, vols. I and II, Academic Press, Orlando, 1983 and 1986.

[6] Li X., The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis, *J. Number Theory*, 1997, **65**: 325–333.

[7] Von Mangoldt H., Zu Riemanns Abhandlung Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *J. Reine Angew Math.*, 1895, **114**: 255–305.

[8] Riemann B., Über die Anzahl der Primzahlen unter Einer Gegebenen Grösse, Monatsber, Berlin Akad, 1859: 671–680.

[9] Rudin W., Real and Complex Analysis (3rd ed), McGraw-Hill, New York, 1987.

[10] Vallée-Poussin C. J., Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers, *Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles*, 1896, **20**: 183–256, 281–352, 363–397; 1896, **21**: 351–368.