第62卷第4期 数学学报中文版 Vol.62, No.4
2019年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)04-0641-06 **文献标识码:** A

Suzuki-Ree 群的自同构群的阶分量刻画

陈彦恒 贾松芳

重庆三峡学院数学与统计学院 重庆 404100
E-mail: math_yan@126.com; jiasongfang@163.com

摘 要 在《数学学报》2013 年第 56 卷第 4 期中, "Suzuki-Ree 群的自同构群的一个新刻画" 一文证明了 $\mathrm{Aut}(^2F_4(q))$, $q=2^f$ 和 $\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$, $q=3^f$, 可由其阶分量刻画, 其中 $f=3^s, s$ 为正整数. 本文证明了 $\mathrm{Aut}(^2B_2(q))$, $q=2^f$ 和 $\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$, $q=3^f$, 也可由其阶分量刻画, 其中 f 为奇素数. 结合二者得到结论: Suzuki-Ree 单群的所有的素图不连通的自同构群皆可由其阶分量刻画.

关键词 Suzuki-Ree 群; 自同构群; 群的阶; 阶分量
MR(2010) 主题分类 20D06, 20D45, 20D60
中图分类 0152.1

Automorphism Groups of Suzuki-Ree Groups Can Be Characterized by Their Order Components

Yan Heng CHEN Song Fang JIA

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 400410, *P. R. China*
E-mail: *math_yan@126.com*; *jiasongfang@163.com*

Abstract The paper [A new characterization of automorphism groups of Suzuki-Ree groups, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2013, **56**(4), 545–552] proved that $\mathrm{Aut}(^2F_4(q))$, $q=2^f$ and $\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$, $q=3^f$ can be characterized by their order components, where $f=3^s, s$ is a positive integer. We proved that $\mathrm{Aut}(^2B_2(q))$, $q=2^f$ and $\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$, $q=3^f$ also can be characterized by their order components, where f is a odd prime. Combining both, we can obtain that the automorphism groups of the Suzuki-Ree simple groups whose prime graphs are not connected can be characterized by their order components.

Keywords Suzuki-Ree groups; automorphism groups; group order; order component
MR(2010) Subject Classification 20D06, 20D45, 20D60
Chinese Library Classification 0152.1

收稿日期: 2018-07-20; 接受日期: 2019-02-18
基金项目: 重庆市教委科研项目 (KJ1710254); 重庆三峡学院重大培育项目 (18ZDPY07) 及重点项目 (14ZD16)

1 引言

本文所提及的群皆为有限群, 单群均为非交换单群, 所有符号和术语与文献 [6] 保持一致.

众所周知, Suzuki-Ree 群有三族无限序列群构成, 即

$$^2B_2(q),\ q=2^d;\ \ ^2G_2(q),\ q=3^d;\ \ ^2F_4(q),\ q=2^d,$$

其中 d 是大于零的奇数. 除去 $d=1$ 的情形外, 它们都是单群. 对于这些 Suzuki-Ree 单群, 由文 [2, 3] 知, 它们的素图不连通的自同构群有:

(I) $\mathrm{Aut}(^2F_4(q)) = {}^2F_4(q):f,\ q=2^f,\ f=3^s,\ s$ 为正整数;

(II) $\mathrm{Aut}(^2G_2(q)) = {}^2G_2(q):f,\ q=3^f,\ f=3^s,\ s$ 为正整数;

(III) $\mathrm{Aut}(^2B_2(q)) = {}^2B_2(q):f,\ q=2^f,\ f$ 为奇素数;

(IV) $\mathrm{Aut}(^2G_2(q)) = {}^2G_2(q):f,\ q=3^f,\ f$ 为奇素数.

文 [6] 证明了 (I), (II) 两个系列及 Tis 单群 $^2F_4(2)'$ 的自同构群可被阶分量刻画, 得到下面定理:

定理 A (文 [6, 定理 2.1]) 设 G 是一个群, M 是 Suzuki-Ree 群 $^2F_4(q)$, $q=2^f$; $^2G_2(q)$, $q=3^f$ 及 Tis 单群 $^2F_4(2)'$, 其中 $f=3^s, s$ 为正整数, 则

$$G\cong \mathrm{Aut}(M) \ \text{当且仅当}\ \mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M)).$$

但遗漏了 (III), (IV) 两个系列, 这篇短文对此进行了补充, 证明了 (III), (IV) 两个系列群也可以被阶分量刻画, 得到本文的主要结论:

定理 B 设 G 是一个群, M 是 Suzuki-Ree 群 $^2B_2(q)$, $q=2^f$; $^2G_2(q)$, $q=3^f$, 其中 f 为奇素数, 则

$$G\cong \mathrm{Aut}(M) \ \text{当且仅当}\ \mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M)).$$

由定理 A 和 B 可得下面的推论:

推论 Suzuki-Ree 单群的素图不连通的自同构群皆可由其阶分量刻画.

为了方便, 根据文 [2, 3], 在表 1 中列出 (III), (IV) 两个系列群的阶分量.

(III), (IV)	条件	m_1	m_2	m_3
$\mathrm{Aut}(^2B_2(q))$	$q=2^f$, f 为奇素数 且 $f\equiv 1,7 \pmod 8$	$f\cdot q^2(q+\sqrt{2q}+1)$	$q-1$	$q-\sqrt{2q}+1$
$\mathrm{Aut}(^2B_2(q))$	$q=2^f$, f 为奇素数 且 $f\equiv 3,5 \pmod 8$	$f\cdot q^2(q-\sqrt{2q}+1)$	$q-1$	$q+\sqrt{2q}+1$
$\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$	$q=3^f$, f 为奇素数 且 $f\equiv 1,11 \pmod{12}$	$f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)$	$q-\sqrt{3q}+1$	—
$\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$	$q=3^f$, f 为奇素数 且 $f\equiv 5,7 \pmod{12}$	$f\cdot q^3(q^2-1)(q-\sqrt{3q}+1)$	$q+\sqrt{3q}+1$	—

表 1 (III), (IV) 两个系列群的阶分量

2 预备引理

文 [6, 引理 1.1–1.4] 都是证明定理 B 需要的预备引理, 但为了避免重复, 此处不再赘述. 在下面引理 2.1, 2.2 中分别给出了 $^2B_2(q)$ 和 $\mathrm{Aut}(^2G_2(q))$ 的阶的一个特性. 在引理 2.3 利用单群

分类定理给出 Sylow 2- 子群的阶数 ≤ 8 的单群的分类. 这些引理能简化定理 B 的证明过程.

引理 2.1 (1) 设 $q=2^d$, d 为正奇数, 则 ${}^2B_2(q)$ 的阶不被 3 整除.

(2) 设 M 是一个单群. 若 $3\nmid|M|$, 则 $M\cong{}^2B_2(q)$, 其中 $q=2^d$, d 为大于 1 的奇数.

证明 (1) 由于 $q=2^d$, d 为奇数, 所以 $q^2,q-1,q^2+1$ 均不被 3 整除. 既然 $|{}^2B_2(q)|=q^2(q-1)(q^2+1)$, 那么 $3\nmid|{}^2B_2(q)|$.

(2) 根据单群分类定理逐项检查, M 只能同构于 ${}^2B_2(q)$ 其中 $q=2^d$, d 为大于 1 的奇数. 证毕.

引理 2.2 设 M 是一个单群, 且 $\max\pi(M)=13$. 若 M 的 Sylow 3- 子群的阶数 ≤ 3, 则 M 同构于下列单群之一: $L_2(4),L_2(7),L_2(11),L_2(13),L_2(25),{}^2B_2(8),L_2(49),U_3(4)$.

证明 对文 [4] 中表 1 的群逐个检查, 可立得引理结论. 证毕.

引理 2.3 设 $q=3^d$, d 为正奇数, 则 $\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$ 的 Sylow 2- 子群是 8 阶群.

证明 由于 $\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))={}^2G_2(q):d$, 所以 $|\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))|=|{}^2G_2(q):d|=d\cdot q^3(q+1)(q-1)(q+\sqrt{3q}+1)(q-\sqrt{3q}+1)$. 既然 $q=3^d$, d 为奇数, 从而 $q^3,q+\sqrt{3q}+1$, $q-\sqrt{3q}+1$ 也是奇数, 且 $2^2\parallel(q+1)$, $2\parallel(q-1)$. 于是 $\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$ 的 Sylow 2- 子群是 8 阶群. 证毕.

引理 2.4 设 M 是一个单群. 若 M 的 Sylow 2- 子群的阶数 ≤ 8, 则 M 同构于下列单群之一:

(1) $L_2(8),A_7,J_1$;

(2) $L_2(q)$, 其中 $q\equiv 3,5\ (\mathrm{mod}\ 8)$;

(3) $L_2(q)$, 其中 $q\equiv 7,9\ (\mathrm{mod}\ 16)$;

(4) ${}^2G_2(q)$, 其中 $q=3^d,d$ 为正奇数.

证明 根据阶数 ≤ 8 的 2- 群的分类和单群分类定理, 该引理易证. 证毕.

3 定理 B 的证明

下面依据表 1 中的群将定理 B 的充分性证明分为下面四个命题完成.

命题 3.1 设 G 是一个群, $M={}^2B_2(q)$, 其中 $q=2^f,f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 1,7\ (\mathrm{mod}\ 8)$. 若 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$, 则 $G\cong\mathrm{Aut}(M)$.

证明 由假设 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$ 及表 1 知, $\mathrm{OC}(G)=\{m_1,m_2,m_3\}$, 其中 $m_1=f\cdot q^2(q+\sqrt{2q}+1)$, $m_2=q-1$, $m_3=q-\sqrt{2q}+1$, 从而 $\Gamma(G)=3$. 由文 [6, 引理 1.2] 知, G 不是 Frobenius 群也不是 2-Frobenius 群. 再由文 [6, 引理 1.1 及 1.3], G 有一个正规群列 $1\subseteq H\subseteq K\subseteq G$, 使得 K/H 是一个单群, H 是一个幂零 π_1- 群, G/K 是 π_1- 群且 $K/H\leq G/H\leq\mathrm{Aut}(K/H)$, 同时 $\Gamma(K/H)\geq 3$, m_2,m_3 是 K/H 的奇阶分量中的两个. 既然 $q=2^f,f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 1,7\ (\mathrm{mod}\ 8)$, 那么 $f,q-1,q^2,q+\sqrt{2q}+1$, $q-\sqrt{2q}+1$ 皆不被 3 整除, 从而 G 的阶也不被 3 整除. 于是单群 K/H 的阶也不被 3 整除, 从而由引理 2.1 知, K/H 只可能同构于 ${}^2B_2(q')$, 其中 $q'=2^d,d$ 为大于 1 的奇数. 根据文 [1], ${}^2B_2(q')$ 有三个奇阶分量且分别是 $q'-\sqrt{2q'}+1$, $q'-1$, $q'+\sqrt{2q'}+1$. 不妨设 $f=2m+1$, $d=2m'+1$, 其中 m,m' 是正整数.

当 $q-1=q'+\sqrt{2q'}+1$, $q-\sqrt{2q}+1=q'-1$ 时, 有 $2q-\sqrt{2q}=2q'+\sqrt{2q'}$, 从而 $2^{m+1}(2^{m+1}-1)=2^{m'+1}(2^{m'+1}+1)$. 于是 $m=m'$, 从而 $q=q'$, 得到矛盾式

$$\sqrt{2q}=-2.$$

当 $q-1=q'+\sqrt{2q'}+1$, $q-\sqrt{2q}+1=q'-\sqrt{2q'}+1$ 时, 有 $q-\sqrt{2q}=q'-\sqrt{2q'}$, 从而

$2^{m+1}(2^m-1)=2^{m'+1}(2^{m'}-1)$. 于是 $m=m'$, 从而 $q=q'$, 得到矛盾式

$$\sqrt{2q}=-2.$$

综上, $q-1=q'-1$, $q-\sqrt{2q}+1=q'-\sqrt{2q'}+1$, 从而 $q=q'$, 即 K/H 同构于 ${}^2B_2(q)$, 其中 $q=2^f, f$ 为奇素数. 鉴于 $K/H\leq G/H\leq \mathrm{Aut}(K/H)$ 和 $\mathrm{Aut}(K/H)\cong {}^2B_2(q):f$, 所以 $G/H\cong {}^2B_2(q)$ 或者 ${}^2B_2(q):f$. 当 $G/H\cong {}^2B_2(q)$ 时, 比较阶得 $|H|=f$, 从而由文 [6, 引理 1.4] 知 $(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)\,|\,(f-1)$. 但

$$(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)>q-1=2^f-1>f-1,$$

矛盾. 因此 $G/H\cong {}^2B_2(q):f$, 比较阶得 $H=1$, 从而 $G\cong {}^2B_2(q):f=\mathrm{Aut}({}^2B_2(q))$, 其中 $q=2^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 1,7 \pmod 8$. 证毕.

命题 3.2 设 G 是一个群, $M={}^2B_2(q)$, 其中 $q=2^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 3,5 \pmod 8$. 若 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$, 则 $G\cong \mathrm{Aut}(M)$.

证明 当 $f\neq 3$ 时, 证明过程与命题 3.1 基本一致, 不在重复叙述.

当 $f=3$ 时, $M={}^2B_2(8)$, 从而由题设及表 1 知 $\mathrm{OC}(G)=\{m_1,m_2,m_3\}$, 其中 $m_1=2^6\cdot 3\cdot 5$, $m_2=7$, $m_3=13$, 从而 $\Gamma(G)=3$. 由文 [6, 引理 1.2] 知, G 不是 Frobenius 群也不是 2-Frobenius 群. 再由文 [6, 引理 1.1 及 1.3], G 有一个正规群列 $1\subseteq H\subseteq K\subseteq G$, 使得 K/H 是一个单群, H 是一个幂零 π_1- 群, G/K 是 π_1- 群且 $K/H\leq G/H\leq\mathrm{Aut}(K/H)$, 同时, $\Gamma(K/H)\geq 3$, m_2, m_3 是 K/H 的奇阶分量中的两个. 于是 $\{7,13\}\subseteq\pi(K/H)\subseteq\{2,3,5,7,13\}$, 从而由引理 2.2 知, K/H 只可能同构于 $L_2(13)$, ${}^2B_2(8)$. 当 $K/H\cong L_2(13)$ 时, 由于 $K/H\leq G/H\leq \mathrm{Aut}(K/H)$ 和 $\mathrm{Aut}(K/H)\cong L_2(13):2$, 所以 $5\,|\,|H|$, 从而由文 [6, 引理 1.4] 知 $7\cdot 13\,|\,(5-1)$, 矛盾. 于是 K/H 同构于 ${}^2B_2(8)$. 再由 $K/H\leq G/H\leq\mathrm{Aut}(K/H)$ 和 $\mathrm{Aut}(K/H)\cong {}^2B_2(8):3$ 知, $G/H\cong {}^2B_2(8)$ 或者 ${}^2B_2(8):3$. 当 $G/H\cong {}^2B_2(8)$ 时, 比较阶得 $|H|=3$, 从而由文 [6, 引理 1.4] 知, $7\cdot 13\,|\,(3-1)$, 矛盾. 因此 $G/H\cong {}^2B_2(8):3$, 比较阶得 $H=1$, 从而 $G\cong {}^2B_2(8):3=\mathrm{Aut}({}^2B_2(8))$. 证毕.

命题 3.3 设 G 是一个群, $M={}^2G_2(q)$, 其中 $q=3^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 1, 11 \pmod{12}$. 若 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$, 则 $G\cong\mathrm{Aut}(M)$.

证明 由假设 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$ 及表 1 知 $\mathrm{OC}(G)=\{m_1,m_2\}$, 其中 $m_1=f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)$, $m_2=q-\sqrt{3q}+1$, 从而 $\Gamma(G)=2$. 下面按照文 [6, 引理 1.1] 进行讨论.

当 G 是 Frobenius 群时, G 存在核 H, 补 K, 使得 $|K|\,|\,(|H|-1)$, 且 $\mathrm{OC}(G)=\{|H|,|K|\}$. 如果 $|H|=m_1=f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)$, 那么 $|K|=m_2=q-\sqrt{3q}+1$. 鉴于 $q=3^f, f$ 为奇素数, 所以 H 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶数 $|H_2|=2^3$. 由核 H 的幂零性知, $|K|\,|\,(2^3-1)$, 即 $(q-\sqrt{3q}+1)\,|\,7$, 从而 $q-\sqrt{3q}+1=7$. 经计算得 $q=3$, 从而 $f=1$, 矛盾. 如果 $|H|=m_2=q-\sqrt{3q}+1$, 那么 $|K|=m_1=f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)$. 于是 $f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)\,|\,(q-\sqrt{3q})$, 从而 $q^3\,|\,(q-\sqrt{3q})$, 这是不可能的. 因此 G 不是一个 Frobenius 群.

当 G 是一个 2-Frobenius 群时, G 有一个正规群列 $1\subseteq H\subseteq K\subseteq G$, 使得 K 和 G/H 是 Frobenius 群, 且 H 和 K/H 分别是它们的核. 在由文 [6, 引理 1.2] 知 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$, $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$, 且 $|G/K|\,|\,(|K/H|-1)$, 从而 $m_1=|H||G/K|=f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1)$, $m_2=|K/H|=q-\sqrt{3q}+1$, 且 $|G/K|\,|\,(q-\sqrt{3q})$. 由 $q=3^f, f$ 为奇素数知, $|G/K|_2=2$ 或 2^2, 从而由引理 2.3 知, $|H_2|=2$ 或 2^2. 由于 K/H 可以无不动点作用于 H_2, 所以 $|K/H|\,|\,(|H_2|-1)$,

即 $(q-\sqrt{3q}+1)\,|\,(2^s-1)$, $s=1,2$. 由于 $m_2=|K/H|=q-\sqrt{3q}+1\neq 1$, 所以 $s\neq 1$, 从而 $s=2$, 即 $q-\sqrt{3q}+1=3$, 矛盾于 $q=3^f, f$ 为奇素数. 因此 G 也不是一个 2-Frobenius 群.

现在, 由文 [6, 引理 1.1 及 1.3] 知, G 有一个正规群列 $1\subseteq H\subseteq K\subseteq G$, 使得 K/H 是一个单群, H 是一个幂零 π_1- 群, G/K 是 π_1- 群且 $K/H\leq G/H\leq \mathrm{Aut}(K/H)$, 同时 $\Gamma(K/H)\geq 2$, m_2 是 K/H 的奇阶分量中的一个. 鉴于 $q=3^f, f$ 为奇素数及引理 2.3, $2^3\,\|\,|G|$, 从而 K/H 的 Sylow2- 子群的阶 ≤ 8. 据引理 2.4, K/H 只可能同构于下列单群: $L_2(8); A_7; J_1$; $L_2(q')$, 其中 $q'\equiv 3,5 \pmod 8$; $L_2(q')$, 其中 $q'\equiv 7,9 \pmod{16}$; ${}^2G_2(q')$, 其中 $q'=3^d, d$ 为正奇数. 鉴于 $q=3^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 1, 11 \pmod{12}$, 那么 $7\,|\,(q+\sqrt{3q}+1)$, 但是 $7\nmid(q-\sqrt{3q}+1)$.

(a) 若 $K/H\cong L_2(8)$, 则由 $\mathrm{OC}(L_2(8))=\{2^3,3^2,7\}$ 及 $7\nmid(q-\sqrt{3q}+1)$ 知, $m_2=q-\sqrt{3q}+1=3^2$, 矛盾. 因此 K/H 不同构于 $L_2(8)$.

(b) 若 $K/H\cong A_7$, 则由 $\mathrm{OC}(A_7)=\{2^3\cdot 3^2,5,7\}$ 及 $7\nmid(q-\sqrt{3q}+1)$ 知, $m_2=q-\sqrt{3q}+1=5$, 矛盾. 因此 K/H 不同构于 A_7.

(c) 若 $K/H\cong J_1$, 则由 $\mathrm{OC}(J_1)=\{2^3\cdot 3\cdot 5,7,11,19\}$ 及 $7\nmid(q-\sqrt{3q}+1)$ 知, $m_2=q-\sqrt{3q}+1=11$ 或 19. 当 $q-\sqrt{3q}+1=11$ 时, $q-\sqrt{3q}=10$, 矛盾. 当 $q-\sqrt{3q}+1=19$ 时, 经计算得 $f=3$, 矛盾于 $f\equiv 1, 11 \pmod{12}$. 因此 K/H 不同构于 J_1.

下面为了方便, 不妨设 $f=2m+1$, $d=2m'+1$, 其中 m,m' 是正整数.

(d) 若 $K/H\cong L_2(q')$, $q'\equiv 3 \pmod 8$, 则 $q'\equiv -1 \pmod 4$. 由文 [5] 知, $\mathrm{OC}(L_2(q'))=\{q'+1,q',\frac{q'-1}{2}\}$, $m_2=q-\sqrt{3q}+1=q'$ 或 $\frac{q'-1}{2}$.

当 $q-\sqrt{3q}+1=\frac{q'-1}{2}$ 时, $q'=2q-2\sqrt{3q}+3$, 从而 $3\,|\,q'$ 且 $q'=3$. 于是 $f=1$, 与 f 为奇素数矛盾.

当 $q-\sqrt{3q}+1=q'$ 时, $q'-1=q-\sqrt{3q}\,|\,(f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1))$. 由于 $q'+1\equiv 0 \pmod 4$ 知, m 是正奇数. 于是经计算可得 $q-\sqrt{3q}=3^{m+1}(3^m-1)$, 且 $(3^m-1,q+\sqrt{3q}+1)=1$, $(3^m-1,q^2-1)=2$, $(3^m-1,q^3)=1$, 从而 $\frac{3^m-1}{2}\,|\,f$. 由 f 为奇素数知, $\frac{3^m-1}{2}=1$ 或 f. 若 $\frac{3^m-1}{2}=1$ 时, 经计算得 $m=1$, 从而 $f=3$, 矛盾于 $f\equiv 1,11 \pmod{12}$. 若 $\frac{3^m-1}{2}=f$ 时, 经计算得 $3^m=2f+1=4m+3$, 从而 $3(3^{m-1}-1)=4m$. 由 m 是正奇数知, $8\,|\,(3^{m-1}-1)$, 但同时 $8\nmid 4m$, 矛盾. 因此 K/H 不同构于 $L_2(q')$, $q'\equiv 3 \pmod 8$.

(e) 若 $K/H\cong L_2(q')$, $q'\equiv 7 \pmod{16}$, 类似 (d) 的情形可得出矛盾, 从而 K/H 不同构于 $L_2(q')$, $q'\equiv 7 \pmod{16}$.

(f) 若 $K/H\cong L_2(q')$, $q'\equiv 5 \pmod 8$, 则 $q'\equiv 1 \pmod 4$. 于是由文 [5] 知, $\mathrm{OC}(L_2(q'))=\{q'-1,q',\frac{q'+1}{2}\}$, $m_2=q-\sqrt{3q}+1=q'$ 或 $\frac{q'+1}{2}$.

当 $q-\sqrt{3q}+1=\frac{q'+1}{2}$ 时, $q'-1=2q-2\sqrt{3q}=2\cdot 3^{m+1}(3^m-1)\,|\,(f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1))$. 若 m 是正偶数, $2^3\,|\,(3^m-1)$, 从而 $2^3\,|\,(q'-1)$ 与 $q'\equiv 5 \pmod 8$ 矛盾. 因此 m 是正奇数. 于是经计算可得 $(3^m-1,q+\sqrt{3q}+1)=1$, $(3^m-1,q^2-1)=2$, $(3^m-1,q^3)=1$, 从而 $\frac{3^m-1}{2}\,|\,f$. 由 f 为奇素数知, $\frac{3^m-1}{2}=1$ 或 f. 若 $\frac{3^m-1}{2}=1$ 时, 经计算得 $m=1$, 从而 $f=3$, 矛盾于 $f\equiv 1,11 \pmod{12}$. 若 $\frac{3^m-1}{2}=f$ 时, 经计算得 $3^m=2f+1=4m+3$, 从而 $3(3^{m-1}-1)=4m$. 由 m 是正奇数知, $8\,|\,(3^{m-1}-1)$, 但同时 $8\nmid 4m$, 矛盾.

当 $q-\sqrt{3q}+1=q'$ 时, $q'+1=q-\sqrt{3q}+2\,|\,(f\cdot q^3(q^2-1)(q+\sqrt{3q}+1))$, 从而 $q'+1=q-\sqrt{3q}+2=3^{m+1}(3^m-1)+2$. 又由 $q'\equiv 1 \pmod 4$ 知, m 是正偶数. 于是经计算可得

$(q'+1, q+\sqrt{3q}+1)=1$, $(q'+1, q^2-1)=2$, $(q'+1, q^3)=1$, 从而 $\frac{q'+1}{2}\,|\,f$. 由 f 为奇素数知, $\frac{q'+1}{2}=1$ 或 f. 如若 $\frac{q'+1}{2}=1$, 经计算得 $m=0$, 从而 $f=1$, 矛盾. 如若 $\frac{q'+1}{2}=f$, 经计算得 $3^{m+1}(3^m-1)=4m$, 从而 $3^{m+1}\,|\,m$, 这是不可能的. 因此 K/H 不同构于 $L_2(q')$, $q'\equiv 5 \pmod 8$.

(g) 若 $K/H\cong L_2(q')$, $q'\equiv 9 \pmod{16}$, 类似 (f) 的情形可得出矛盾, 从而 K/H 不同构于 $L_2(q')$, $q'\equiv 9 \pmod{16}$.

(h) 若 $K/H\cong {}^2G_2(q')$, 其中 $q'=3^d, d$ 为大于 1 的奇数. 根据文 [5], ${}^2G_2(q')$, 有两个奇阶分量且分别是 $q'-\sqrt{3q'}+1$, $q'+\sqrt{3q'}+1$, 从而 $m_2=q-\sqrt{3q}+1=q'-\sqrt{3q'}+1$ 或 $q'+\sqrt{3q'}+1$.

当 $q-\sqrt{3q}+1=q'+\sqrt{3q'}+1$ 时, 有 $q-\sqrt{3q}=q'+\sqrt{3q'}$, 从而 $3^{m+1}(3^m-1)=3^{m'+1}(3^{m'}+1)$. 于是 $m=m'$, 从而 $q=q'$, 得到矛盾式 $\sqrt{3q}=0$.

当 $q-\sqrt{3q}+1=q'-\sqrt{3q'}+1$ 时, 有 $q=q'$, 即 K/H 同构于 ${}^2G_2(q)$, 其中 $q=3^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 3,5 \pmod 8$. 鉴于 $K/H\leq G/H\leq \mathrm{Aut}(K/H)$ 和 $\mathrm{Aut}(K/H)\cong {}^2G_2(q):f$, 所以 $G/H\cong {}^2G_2(q)$ 或者 ${}^2G_2(q):f$. 当 $G/H\cong {}^2G_2(q)$ 时, 比较阶得 $|H|=f$, 故由文 [6, 引理 1.4] 知 $q-\sqrt{2q}+1\,|\,(f-1)$. 但 $q-\sqrt{3q}+1=3^{m+1}(3^m-1)+1>3^{m+1}>f-1$, 矛盾. 因此 $G/H\cong {}^2G_2(q):f$, 比较阶得 $H=1$, 从而 $G\cong {}^2G_2(q):f=\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$, 其中 $q=3^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 3,5 \pmod 8$. 证毕.

命题 3.4 设 G 是一个群, $M={}^2G_2(q)$, 其中 $q=3^f, f$ 为奇素数, 且 $f\equiv 5$, $7 \pmod{12}$. 若 $\mathrm{OC}(G)=\mathrm{OC}(\mathrm{Aut}(M))$, 则 $G\cong \mathrm{Aut}(M)$.

证明 类似命题 3.3 证明过程, 仅在稍微细节处理的不一致, 不在重复叙述. 证毕.

定理 B 的证明 定理 B 的必要性证明是显然的, 充分性可由命题 3.1–3.4 得到, 因此定理 B 已证.

致谢 对审稿人表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Iiyori N., Yamaki H., Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, *J. Algebra*, 1993, **155**(2): 335–343.
[2] Lucido M. S., Prime graph components of finite almost simple groups, *Rend. Sem. Univ. Padova*, 1999, **102**: 1–22.
[3] Lucido M. S., Addendum to "Prime graph components of finite almost simple groups", *Rend. Sem. Univ. Padova*, 2002, **107**: 189–190.
[4] Vasil'ev A. V., On recognition of all finite nonabelian simple groups With orders having prime divisors at most 13, *Math. Sb.*, 2005, **46**(2): 246–253.
[5] Williams J. S., Prime graph components of finite groups, *J. Algebra*, 1981, **69**: 487–513.
[6] Xiao F. F., Cao H. P., Chen G. Y., A new characterization of the automorphism groups of Suzuki-Ree groups, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2013, **56**(4): 545–552.