第65卷第6期 数学学报中文版 Vol.65, No.6
2022年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2022

DOI: 10.12386/A20190057 **文献标识码: A**

矩阵型截面数据时间序列自回归模型

吴述金 华 楠

统计与数据科学前沿理论及应用教育部重点实验室
华东师范大学经济与管理学部统计学院 上海 200062
E-mail : sjwu@stat.ecnu.edu.cn; 13262785518@163.com

摘 要 矩阵型截面数据时间序列的优点在于可以同时刻画多个对象的多个属性. 本文重点研究了矩阵型截面数据时间序列的自回归模型, 给出了该模型的参数估计、模型识别、白噪声检验三个方面的理论结果. 最后再利用矩阵型截面数据时间序列自回归模型, 对两支银行股的日收益率序列和日成交量变化率序列进行建模分析.

关键词 矩阵型截面数据时间序列; 参数估计; 似然比检验; 白噪声检验
MR(2010) 主题分类 37M10, 62M10
中图分类 O211.61

Autoregression Model of Time Series with Matrix Cross-Section Data

Shu Jin WU Nan HUA

Key Laboratory of Advanced Theory and Application in Statistics and Data Science-MOE,
School of Statistics, East China Normal University,
Shanghai 200062*, P. R. China*
E-mail: *sjwu@stat.ecnu.edu.cn*; 13262785518@163.*com*

Abstract The advantage of time series with matrix cross-section data is that multiple attributes of multiple objects can be characterized simultaneously. This paper focuses on autoregression model of time series with matrix cross-section data and presents the methods of parameter estimation, model identification and white noise test. Finally, the daily yield series and daily volume change rate series of two bank stocks are analyzed by this model.

Keywords time series with matrix cross-section data; parameter estimation; likelihood ratio test; white noise test
MR(2010) Subject Classification 37M10, 62M10
Chinese Library Classification O211.61

1 引言

时间序列分析已被广泛地应用于各个领域之中, 比如国民经济宏观控制、区域综合发展规划、

收稿日期: 2019-05-14; 接受日期: 2022-03-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471120)
通讯作者: 吴述金

企业经营管理、气象预报、水文预报、地震前兆预报、农作物病虫灾害预报、环境污染控制、生态平衡、天文学和海洋学等. 人们最初研究的是单变量的时间序列, Yule (1927) 和 Walker (1933) 首先提出 AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型, 这些模型仅仅适用于平稳的时间序列 [11, 15]. 此后 Box 和 Jenkins (1970) 提出了 ARIMA 模型以分析非平稳的时间序列 [3]. AR、MA、ARMA 和 ARIMA 模型都需要对残差项做方差齐性假设. Engle (1982) 和 Bollerslev (1985) 提出了 ARCH、GARCH 等模型处理异方差情形 [2, 4], 进一步完善了对单变量时间序列的刻画.

由于单变量时间序列模型在应用上的局限性,统计学家们开始进行对多变量时间序列分析方法的研究. Tiao 和 Box (1981) 提出了对多维时间序列分析并建模的方法, 并探讨了一类 VARMA 模型的性质 [10]. Granger (1987) 提出了协整理论, 使得在对多变量时间序列建模的过程中, 不再需要每个变量都平稳 [5].

另一方面, 在经济、工业、生物、医药等多个领域中都存在由多个多维时间序列构成的截面数据为矩阵的时间序列, 简称矩阵型截面数据时间序列. 比如, 在研究美国宏观经济时, 需要同时观察美国多个州的不同工业部门的就业统计数据 [14], 或者在研究 FRMI 时, 需要同时观察不同个体的不同大脑区域在受到不同刺激时的血氧水平 [1]. 由于矩阵型截面数据时间序列广泛存在, 而传统的时间序列模型又无法对它进行良好刻画, 因此, 近年来逐渐有学者开始关注或研究矩阵型截面数据时间序列, 但是该方面的研究成果依然很少. Walden (2002) 利用小波分析方法研究了矩阵型截面数据时间序列模型, 构造了多种不同的正交离散矩阵型小波变换, 并将其中的一种应用于 2×2 维的债券日收益率序列中, 研究发现, 只需要保留一小部分系数矩阵就能够让逼近精度达到很高 [12]. Wang, Liu 和 Chen (2019) 首次提出了高维矩阵型截面数据时间序列的因子模型, 给出了该模型的参数估计方法, 并且在一定的假设条件下研究了该估计量的渐近性质 [13].

对于矩阵型截面数据时间序列, 也有少量文献研究其自回归模型问题. Samadi (2014) 首先提出了矩阵型截面数据时间序列 AR(1) 模型 (简记为 MAR(1) 模型), 通过把 MAR(1) 模型转换成移动平均模型的形式, Samadi 给出了 MAR(1) 模型的自协方差函数和自相关系数. 然后将 MAR(1) 模型推广至矩阵型截面数据时间序列 AR(p) 模型 (简记为 MAR(p) 模型). 由于 MAR(p) 模型可以转化成 MAR(1) 模型, 因此 MAR(p) 模型的移动平均表达形式、自协方差函数和自相关系数也可以类似的得到. 最后, Samadi 又给出了通过最小二乘法、广义最小二乘法和极大似然估计法对模型的系数矩阵进行估计的方法 [9]. 为了同时对多只股票的多个属性进行建模分析, 傅开波 (2018) 提出了比 MAR(p) 模型更为简洁明了的矩阵型截面数据时间序列广义 AR(p) 模型. 值得注意的是, 傅开波定义的矩阵型截面白噪声并非 Samadi 所提出的矩阵型截面白噪声. 除此之外, Samadi 与傅开波定义的自协方差函数也不同, 通过对 Samadi 所定义的自协方差函数分块之后, 对角线上的分块矩阵为矩阵型截面数据时间序列中各列向量的方差, 而非对角线上的分块矩阵为不同列向量之间的协方差. 傅开波所定义的自协方差函数则为将矩阵型截面数据时间序列按列向量化处理后, 再对该向量求协方差矩阵. 通过把矩阵型截面数据时间序列广义 AR(p) 模型转换成向量自回归模型, 之后再进一步的转换成多维时间序列 AR(1) 模型, 傅开波借助于向量值时间序列 AR(1) 模型得到了该模型的平稳性条件. 通过对相应的向量自回归模型的系数矩阵进行变换, 然后利用奇异值分解估计出了该模型的系数矩阵 [6].

对于傅开波提出的系数矩阵估计的方法: 一方面, 当维度增加时其对应的向量自回归模型的系数矩阵难以估计; 另一方面, 分两个步骤进行参数估计, 可能会损失部分有效信息. 此外, 仅仅

有该模型的平稳性条件和参数估计方法是不够的, 类似于传统的时间序列模型, 我们还需要了解该模型的模型识别方法、白噪声检验等. 因此, 本文将给出另一种估计矩阵型截面数据时间序列广义 AR(p) 模型系数矩阵的方法, 并且对该模型的模型识别和矩阵型截面数据时间序列的白噪声检验两个方面进行探讨.

2 矩阵型截面数据时间序列 AR(p) 模型

矩阵型截面数据时间序列存在于经济、金融、生物、医药等多个领域. 为了同时研究多只股票的多个属性, 傅开波给出了矩阵型截面数据时间序列的定义如下:

定义 2.1 [6](矩阵型截面数据时间序列) 令 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)\ldots,\vec{x}_m(t)$ 为 m 个 n 维时间序列, 则称

$$X_t=\begin{pmatrix}\vec{x}_1(t)^{\mathrm{T}}\\ \vec{x}_2(t)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \vec{x}_m(t)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t)\end{pmatrix},\quad t\geq 0 \tag{2.1}$$

为 $m\times n$ 维矩阵型截面数据时间序列, 其中 $x_{ij}(t)$ 表示第 i 个对象第 j 个属性的时间序列, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

对于矩阵型截面数据时间序列 $\{X_t,t\geq 0\}$, 则其均值函数和协方差函数定义如下:

定义 2.2 [6](均值函数矩阵) 令 $\{X_t,t\geq 0\}$ 为 (2.1) 定义的矩阵型截面数据时间序列, 则该时间序列的均值函数矩阵为

$$\mu_t=\mathbb{E}[X_t]=\begin{pmatrix}\mathbb{E}[x_{11}(t)] & \mathbb{E}[x_{12}(t)] & \cdots & \mathbb{E}[x_{1n}(t)]\\ \mathbb{E}[x_{21}(t)] & \mathbb{E}[x_{22}(t)] & \cdots & \mathbb{E}[x_{2n}(t)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{E}[x_{m1}(t)] & \mathbb{E}[x_{m2}(t)] & \cdots & \mathbb{E}[x_{mn}(t)]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{11}(t) & \mu_{12}(t) & \cdots & \mu_{1n}(t)\\ \mu_{21}(t) & \mu_{22}(t) & \cdots & \mu_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{m1}(t) & \mu_{m2}(t) & \cdots & \mu_{mn}(t)\end{pmatrix}.$$

定义 2.3 [6](协方差函数矩阵) 令 $\{X_t,t\geq 0\}$ 为 (2.1) 定义的矩阵型截面数据时间序列, 对 X_t 和 μ_t 按列拉长, 得到

$$\widetilde{X}_t=\begin{pmatrix}x_{11}(t) & \cdots & x_{m1}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{m2}(t) & \cdots & x_{1n}(t) & \cdots & x_{mn}(t)\end{pmatrix}^T,$$
$$\widetilde{\mu}_t=\begin{pmatrix}\mu_{11}(t) & \cdots & \mu_{m1}(t) & \mu_{12}(t) & \cdots & \mu_{m2}(t) & \cdots & \mu_{1n}(t) & \cdots & \mu_{mn}(t)\end{pmatrix}^T.$$

经过重构后得到的 $mn\times mn$ 维协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\Gamma(t+s,t)&=\mathbb{E}((\widetilde{X}_{t+s}-\widetilde{\mu}_{t+s})(\widetilde{X}_t-\widetilde{\mu}_t)^T)\\ &=\mathbb{E}\begin{pmatrix}x_{11}(t+s)-\mu_{11}(t+s)\\ \vdots\\ x_{m1}(t+s)-\mu_{m1}(t+s)\\ \vdots\\ x_{1n}(t+s)-\mu_{1n}(t+s)\\ \vdots\\ x_{mn}(t+s)-\mu_{mn}(t+s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}(t)-\mu_{11}(t)\\ \vdots\\ x_{m1}(t)-\mu_{m1}(t)\\ \vdots\\ x_{1n}(t)-\mu_{1n}(t)\\ \vdots\\ x_{mn}(t)-\mu_{mn}(t)\end{pmatrix}^T\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(x_{11}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{11}(t+s), x_{mn}(t)) \\ \operatorname{cov}(x_{21}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{21}(t+s), x_{mn}(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_{mn}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{mn}(t+s), x_{mn}(t)) \end{pmatrix}.$$

定义 2.4 [6](平稳矩阵型截面数据时间序列) 令 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为 (2.1) 定义的矩阵型截面数据时间序列. 若其均值函数矩阵 μ_t 与协方差函数矩阵 $\Gamma(t+s,t)$ 都和时间 t 无关, 那么称 X_t 为平稳矩阵型截面数据时间序列.

本文用记号

$$\mu \triangleq \mathbb{E}X_t = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \mathbb{E}\big((\widetilde{X}_{t+s} - \widetilde{\mu})(\widetilde{X}_t - \widetilde{\mu})^T\big) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(x_{11}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{11}(t+s), x_{mn}(t)) \\ \operatorname{cov}(x_{21}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{21}(t+s), x_{mn}(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_{mn}(t+s), x_{11}(t)) & \cdots & \operatorname{cov}(x_{mn}(t+s), x_{mn}(t)) \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \gamma_{11,11}(s) & \gamma_{11,21}(s) & \cdots & \gamma_{11,mn}(s) \\ \gamma_{21,11}(s) & \gamma_{21,21}(s) & \cdots & \gamma_{21,mn}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{mn,11}(s) & \gamma_{mn,21}(s) & \cdots & \gamma_{mn,mn}(s) \end{pmatrix} \\ &\triangleq \big(\gamma_{ij,k\ell}(s)\big)_{i,k=1,2,\ldots,m;\ j,\ell=1,2,\ldots,n} \end{aligned}$$

表示平稳矩阵型截面数据时间序列的均值矩阵和在时滞 s 处的协方差矩阵, 其中

$$\widetilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11}(t) & \cdots & \mu_{m1}(t) & \mu_{12}(t) & \cdots & \mu_{m2}(t) & \cdots & \mu_{1n}(t) & \cdots & \mu_{mn}(t) \end{pmatrix}^T.$$

在一维时间序列分析中, 白噪声序列是最基本的平稳时间序列. 类似地, 在矩阵型截面数据时间序列中, 也可以定义矩阵型截面数据白噪声.

定义 2.5 [6](矩阵型截面数据白噪声) 若平稳矩阵型截面数据时间序列 $\{E_t, t \geq 0\}$ 满足均值函数矩阵为 $\mathbf{0}_{m\times n}$, 协防差函数矩阵为 $\Gamma(s)$, 则称 $\{E_t, t \geq 0\}$ 为矩阵型截面数据白噪声, 记作 $E_t \sim WN(\mathbf{0}, \Gamma(s))$, 其中

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(s) = \begin{cases} \Sigma_{mn\times mn}, & s = 0, \\ \mathbf{0}, & s \neq 0, \end{cases}$$

这里

$$\Sigma_{mn\times mn}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{21}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{m1}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{22}^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{(m-1)n}^2 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{mn}^2\end{pmatrix}.$$

我们知道, 自回归模型是时间序列分析中最基本最重要的模型之一. 下面, 我们将给出矩阵型截面数据时间序列自回归模型.

定义 2.6 [6] (矩阵型截面数据时间序列自回归模型) 若 $\{X_t, t\geq 0\}$ 是平稳矩阵型截面数据时间序列, 并且对任意的 $t\geq 0$ 都有

$$X_t=\Phi_1X_{t-1}\Theta_1+\Phi_2X_{t-2}\Theta_2+\cdots+\Phi_pX_{t-p}\Theta_p+E_t, \tag{2.2}$$

则称 $\{X_t, t=0,1,\cdots\}$ 是均值为 $\mathbf{0}$ 的矩阵型截面数据时间序列 AR(p) 模型 (简记为 MAR(p) 模型), 其中 $\{E_t, t\geq 0\}$ 为矩阵型截面数据白噪声, 并且满足 $\mathbb{E}(\widetilde{X}_s\widetilde{E}_t^T)=\mathbf{0}_{mn\times mn}$ 对任意 $s<t$ 均成立, 这里 $\widetilde{X}_s$、$\widetilde{E}_t$ 分别为 X_s、E_t 按列向量化得到的随机向量; Φ_j 和 Θ_j 分别是 $m\times m$ 和 $n\times n$ 维回归系数矩阵, $j=1,2,\dots,p$.

本文将首先研究 MAR(p) 模型的模型识别、白噪声检验和参数估计, 最后再通过中国工商银行 (601398.SH) 和中国农业银行 (601288.SH) 两只股票的日收益率序列和日成交量变化率序列进行实证检验.

3 MAR(p) 模型的定阶

对时间序列建模的第一步就是进行模型识别, 在传统的时间序列模型中, 可以通过时间序列的自相关系数、偏相关系数或者 AIC、BIC 等指标进行模型的识别和定阶. 对于 MAR(p) 模型, 通过把矩阵按列向量化处理的方式将其转化成向量自回归模型. 我们可以借助向量自回归模型的模型识别方法对 MAR(p) 模型进行定阶.

定理 3.1 [6] 模型 (2.2) 等价于模型

$$\widetilde{X}_t=\Theta_1^T\otimes\Phi_1\widetilde{X}_{t-1}+\Theta_2^T\otimes\Phi_2\widetilde{X}_{t-2}+\cdots+\Theta_p^T\otimes\Phi_p\widetilde{X}_{t-p}+\widetilde{E}_t, \tag{3.1}$$

其中

$$\mathrm{vec}(X_t)=\widetilde{X}_t=\big(x_{11}(t)\quad\cdots\quad x_{m1}(t)\quad x_{12}(t)\quad\cdots\quad x_{m2}(t)\quad\cdots\quad x_{1n}(t)\quad\cdots\quad x_{mn}(t)\big)^T,$$
$$\mathrm{vec}(E_t)=\widetilde{E}_t=\big(\epsilon_{11}(t)\quad\cdots\quad \epsilon_{m1}(t)\quad \epsilon_{12}(t)\quad\cdots\quad \epsilon_{m2}(t)\quad\cdots\quad \epsilon_{1n}(t)\quad\cdots\quad \epsilon_{mn}(t)\big)^T.$$

证明 事实上, 我们只需要证明以下矩阵等式等价即可

$$A=B+C\Leftrightarrow \mathrm{vec}(A)=\mathrm{vec}(B)+\mathrm{vec}(C),$$
$$Y_{m\times q}=A_{m\times n}B_{n\times p}C_{p\times q}\Leftrightarrow \mathrm{vec}(Y)=(C^T\otimes A)\mathrm{vec}(B),$$

其中 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 表示对矩阵 $(\cdot)$ 按列拉长.

第一个矩阵等式的等价性, 按照对矩阵按列拉长的定义可知显然成立. 下面将证明第二个矩阵等式的等价性.

将矩阵 B 分块为 $B=(b_1,b_2,\dots,b_p)$, 其中 b_i $(i=1,2,\dots,p)$ 为 $n\times 1$ 维向量, 那么

$$ABC=(Ab_1,Ab_2,\dots,Ab_p)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{p} c_{i1}Ab_i, \sum_{i=1}^{p} c_{i2}Ab_i, \dots, \sum_{i=1}^{p} c_{iq}Ab_i\right),$$

则

$$\mathrm{vec}(ABC)=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} c_{i1}Ab_i \\ \sum_{i=1}^{p} c_{i2}Ab_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} c_{iq}Ab_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}A & c_{21}A & \cdots & c_{p1}A \\ c_{12}A & c_{22}A & \cdots & c_{p2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1q}A & c_{2q}A & \cdots & c_{pq}A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}=(C^T\otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

反之亦然, 因此第二个矩阵等式的等价性成立. 证毕.

注 3.2 傅开波 [6] 已经给出了定理 3.1 的证明, 但是本文给出了更加直观的证明.

3.1 MAR(p) 模型的似然比检验

本小节将给出对 MAR(p) 模型 (2.2) 进行定阶的似然比检验方法.

原假设 H_0: $\{X_t, t\geq 0\}$ 服从 MAR(p_0) 模型;

备择假设 H_1: $\{X_t, t\geq 0\}$ 服从 MAR(p_1) 模型, 其中 $p_1>p_0$.

根据定理 3.1 可知, MAR(p) 模型可以通过把矩阵按列向量化处理的方式转化成向量自回归模型. 因此, 可以借助向量自回归模型来对模型 MAR(p) 进行定阶.

定理 3.3 假设 $\mathrm{vec}(E_t)=\widetilde{E}_t\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mathbf{0},\Omega)$, 构造统计量

$$\chi^2=T\cdot\log\left(\frac{|\hat{\Omega}_0|}{|\hat{\Omega}_1|}\right),$$

其中 T 为序列长度, $\hat{\Omega}_0$ 为原假设 H_0 成立时残差 $\widetilde{E}_t$ 的协方差矩阵的极大似然估计, $\hat{\Omega}_1$ 为备择假设 H_1 成立时残差 $\widetilde{E}_t$ 的协方差矩阵的极大似然估计, 则当 H_0 成立时, χ^2 渐近服从自由度为 $m^2n^2(p_1-p_0)$ 的卡方分布.

证明 因为 MAR(p) 模型可以转化成向量自回归模型, 所以该假设等价于:

原假设 $\widetilde{H}_0$: $\{\widetilde{X}_t, t\geq 0\}$ 服从 $VAR(p_0)$ 模型;

备择假设 $\widetilde{H}_1$: $\{\widetilde{X}_t, t\geq 0\}$ 服从 $VAR(p_1)$ 模型, 其中 $p_1>p_0$.

对于上述关于向量自回归模型定阶的假设, 通过极大似然估计可以构造统计量 $\chi^2=T\cdot\log\left(\frac{|\hat{\Omega}_0|}{|\hat{\Omega}_1|}\right)$, 其中 T 为序列长度, $\hat{\Omega}_0$ 为原假设 $\widetilde{H}_0$ 成立时残差 $\widetilde{E}_t$ 的协方差矩阵的极大似然估计, $\hat{\Omega}_1$ 为备择假设 $\widetilde{H}_1$ 成立时残差 $\widetilde{E}_t$ 的协方差矩阵的极大似然估计, 且当 $\widetilde{H}_0$ 成立时统计量 χ^2 渐近服从自由度为 $m^2n^2(p_1-p_0)$ 的卡方分布 [7]. 证毕.

3.2 MAR(p) 模型的其他定阶准则

除了似然比检验之外, 也可类似地给出 MAR(p) 模型的 AIC 准则、HQ 准则和 SC 准则.

定理 3.4 对于 MAR(p) 模型 (2.2), 其 AIC 准则, HQ 准则和 SC 准则分别为

$$
\begin{aligned}
AIC(p) &= \log|\hat{\Omega}(p)| + \frac{2}{T}pm^2n^2,\\
HQ(p) &= \log|\hat{\Omega}(p)| + \frac{2\ln T}{T}pm^2n^2,\\
SC(p) &= \log|\hat{\Omega}(p)| + \frac{\ln T}{T}pm^2n^2,
\end{aligned}
$$

其中 T 为序列长度, $\hat{\Omega}(p)$ 为残差 $\widetilde{E}_t$ 的协方差矩阵的极大似然估计, p 为模型的阶数.

证明 根据定理 3.1 将 MAR(p) 模型转化成向量自回归模型, 再结合向量自回归模型的 AIC 准则、HQ 准则和 SC 准则 [8], 可知定理 3.4 成立. 证毕.

4 MAR(p) 模型的参数估计

在时间序列分析的参数估计过程中, 常见的参数估计方法有最小二乘估计、极大似然估计和 Yule–Walker 矩估计. 由于 Yule–Walker 矩估计的估计精度一般不如另外两种估计方法, 而极大似然估计需要对时间序列的分布进行假设. 因此, 人们在实际应用中常常使用最小二乘法来估计模型的参数. 本节接下来研究 MAR(p) 模型参数的最小二乘估计法.

选用 Frobenius 范数刻画矩阵之间的距离, 则模型 (2.2) 残差的 Frobenius 范数平方和为

$$
J(\Phi_1,\dots,\Phi_p,\Theta_1,\dots,\Theta_p) = \frac{1}{N-p}\sum_{t=p+1}^{N}\left\|X_t - \sum_{k=1}^{p}\Phi_k X_{t-k}\Theta_k\right\|_F^2. \tag{4.1}
$$

以最小化目标函数 $J(\Phi_1,\dots,\Phi_p,\Theta_1,\dots,\Theta_p)$ 为目的, 可以对 $\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_p$ 和 $\Theta_1,\Theta_2,\dots,\Theta_p$ 进行参数估计.

定理 4.1 对于任意的 $k=1,2,\dots,p$, 若 $\hat{\Phi}_k$ 和 $\hat{\Theta}_k$ 满方程组

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\left(-2X_t\Theta_k^TX_{t-k}^T + \sum_{i=1}^{p}\Phi_iX_{t-i}\Theta_i\Theta_k^TX_{t-k}^T + \Theta_k^TX_{t-k}^T\Phi_kX_{t-k}\Theta_k\right) = 0,\\
\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\left(-2X_{t-k}^T\Phi_k^TX_t + \sum_{i=1}^{p}X_{t-k}^T\Phi_k^T\Phi_iX_{t-i}\Theta_i + \Phi_kX_{t-k}\Theta_kX_{t-k}^T\Phi_k^T\right) = 0,
\end{cases}
$$

则 $\hat{\Phi}_k$ 和 $\hat{\Theta}_k$ 为模型 (2.2) 的系数矩阵 Φ_k 和 Θ_k 的估计, $k=1,2,\dots,p$.

证明 对于 MAR(p) 模型残差的 Frobenius 范数平方和

$$
\begin{aligned}
J(\Phi_1,\dots,\Phi_p,\Theta_1,\dots,\Theta_p) &= \frac{1}{N-p}\sum_{t=p+1}^{N}\left\|X_t - \sum_{k=1}^{p}\Phi_kX_{t-k}\Theta_k\right\|_F^2\\
&= \frac{1}{N-p}\sum_{t=p+1}^{N}\mathrm{tr}\Bigg(X_t^TX_t - \sum_{k=1}^{p}X_t^T\Phi_kX_{t-k}\Theta_k\\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{p}\Theta_k^TX_{t-k}^T\Phi_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{p}\Phi_kX_{t-k}\Theta_k\right)\Bigg) - \sum_{k=1}^{p}\Theta_k^TX_{t-k}^T\Phi_k^TX_t.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
Q_t &= \mathrm{tr}\bigg(X_t^T X_t - \sum_{k=1}^{p} X_t^T \Phi_k X_{t-k} \Theta_k - \sum_{k=1}^{p} \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k^T X_t \\
&\quad + \bigg(\sum_{k=1}^{p} \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k^T\bigg)\bigg(\sum_{k=1}^{p} \Phi_k X_{t-k} \Theta_k\bigg)\bigg) \\
&= \mathrm{tr}(X_t^T X_t) - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{tr}(X_t^T \Phi_k X_{t-k} \Theta_k) - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{tr}(\Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k^T X_t) \\
&\quad + \mathrm{tr}\bigg(\sum_{k=1}^{p} \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k^T\bigg)\bigg(\sum_{k=1}^{p} \Phi_k X_{t-k} \Theta_k\bigg),
\end{aligned}
$$

则 Q_t 分别关于 Φ_k 和 Θ_k $(k=1,2,\ldots,p)$ 求二阶偏导数得:

$$
\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \Phi_k^2} = 2X_{t-k}\Theta_k\Theta_k^T X_{t-k}^T, \quad \frac{\partial^2 Q_t}{\partial \Theta_k^2} = 2X_{t-k}^T \Phi_k^T \Phi_k X_{t-k}.
$$

因此, $\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \Phi_k^2}$ 和 $\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \Theta_k^2}$ 都是半正定矩阵. 由于 $J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p) = \frac{1}{N-P}\sum_{t=p+1}^{N} Q_t$, 所以其对系数矩阵的二阶偏导数也是半正定矩阵, 残差的 Frobenius 范数平方和 J 关于 Φ_k 和 Θ_k 存在极小值. 以最小化 J 为目标, 对 Φ_k 和 Θ_k 进行参数估计的结果, 就是残差函数对这些参数求一阶偏导为零的解. 由于

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial Q_t}{\partial \Phi_k} = -2X_t\Theta_k^T X_{t-k}^T + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i}\Theta_i\Theta_k^T X_{t-k}^T + \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k X_{t-k}\Theta_k, \\
\dfrac{\partial Q_t}{\partial \Theta_k} = -2X_{t-k}^T \Phi_k^T X_t + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_{t-k}^T \Phi_k^T \Phi_i X_{t-i}\Theta_i + \Phi_k X_{t-k}\Theta_k X_{t-k}^T \Phi_k^T,
\end{cases}
$$

其中 $k=1,2,\ldots,p$, 所以我们只需要解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{N-p}\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\bigg(-2X_t\Theta_k^T X_{t-k}^T + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i}\Theta_i\Theta_k^T X_{t-k}^T + \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k X_{t-k}\Theta_k\bigg) = 0, \\
\dfrac{1}{N-p}\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\bigg(-2X_{t-k}^T \Phi_k^T X_t + \sum_{i=1}^{p} X_{t-k}^T \Phi_k^T \Phi_i X_{t-i}\Theta_i + \Phi_k X_{t-k}\Theta_k X_{t-k}^T \Phi_k^T\bigg) = 0,
\end{cases}
$$

其中 $k=1,2,\ldots,p$, 即

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\bigg(-2X_t\Theta_k^T X_{t-k}^T + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i}\Theta_i\Theta_k^T X_{t-k}^T + \Theta_k^T X_{t-k}^T \Phi_k X_{t-k}\Theta_k\bigg) = 0, \\
\displaystyle\sum_{t=p+1}^{N}\bigg(-2X_{t-k}^T \Phi_k^T X_t + \sum_{i=1}^{p} X_{t-k}^T \Phi_k^T \Phi_i X_{t-i}\Theta_i + \Phi_k X_{t-k}\Theta_k X_{t-k}^T \Phi_k^T\bigg) = 0.
\end{cases}
$$

证毕.

注 4.2 定理 4.1 中方程组的解不唯一. 事实上, 如果 $\{(\Phi_k,\Theta_k), k=1,2,\ldots,p\}$ 为方程组的一个解, 则对任意 $\ell \neq 0$, $\{(\ell\Phi_k, \frac{1}{\ell}\Theta_k), k=1,2,\ldots,p\}$ 也是方程组的解, 不过这些解对应的 MAR(p) 模型相同.

把模型 (2.2) 转换成向量自回归模型, 得到向量自回归模型残差的 Frobenius 范数平方和, 定理 4.1 通过最小化向量自回归模型残差的 Frobenius 范数平方和得到 Φ_k 和 Θ_k 满足的方程组.

由于定理 4.1 中方程组结构非常复杂, 难以直接给出 Φ_k 和 Θ_k 的精确解. 因此, 接下来考虑利用梯度下降算法估计 Φ_k 和 Θ_k $(k=1,2,\ldots,p)$, 具体步骤如下:

1. 初始化参数 Φ_k 和 Θ_k $(k=1,2,\ldots,p)$、终止距离 ε 和步长 ℓ.
2. 确定当前位置的残差的梯度

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_k(i,j)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p),\quad \frac{\partial}{\partial\Theta_k(s,t)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p),$$

   其中 $\Phi_k(i,j)$ 为矩阵 Φ_k 的 (i,j) 元素, $i,j=1,2,\ldots,m$; $\Theta_k(s,t)$ 为矩阵 Θ_k 的 (s,t) 元素, $s,t=1,2,\ldots,n$.
3. 用步长乘以残差的梯度, 得到当前位置参数需要下降的距离, 即

$$\ell\frac{\partial}{\partial\Phi_k(i,j)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p),\quad \ell\frac{\partial}{\partial\Theta_k(s,t)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p).$$

4. 计算所有的参数下降的距离之和. 如果小于 ε, 则算法终止, 当前所有的 $\Phi_k(i,j)$ 和 $\Theta_k(s,t)$ 就是最终的参数. 否则进入步骤 5.
5. 根据下式更新参数 $\Phi_k(i,j)$ 和 $\Theta_k(s,t)$:

$$\begin{aligned}\Phi_k(i,j)&=\Phi_k(i,j)-\ell\frac{\partial}{\partial\Phi_k(i,j)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p),\\ \Theta_k(s,t)&=\Theta_k(s,t)-\ell\frac{\partial}{\partial\Theta_k(s,t)}J(\Phi_1,\ldots,\Phi_p,\Theta_1,\ldots,\Theta_p).\end{aligned}$$

   更新后转入步骤 2.

注 4.3 本文将在实际应用部分利用梯度下降算法估计模型的系数矩阵.

5 MAR(p) 模型残差的白噪声检验

在时间序列分析中, 估计出时间序列模型参数之后需要对该模型的残差进行白噪声检验. 若残差不为白噪声序列, 则意味着该模型没有把数据中的信息提取完全, 因此需要考虑重新建模. 因此, 在对矩阵型截面数据时间序列建模之后, 也需要对其进行白噪声检验.

根据定义 2.5 可知, 对于平稳矩阵型截面数据时间序列

$$E_t=\begin{pmatrix}\epsilon_{11}(t)&\cdots&\epsilon_{1n}(t)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \epsilon_{m1}(t)&\cdots&\epsilon_{mn}(t)\end{pmatrix},$$

$\{E_t,t\geq 0\}$ 为白噪声需要满足两个条件:

条件 1 该矩阵型截面数据时间序列的期望满足

$$\mathbb{E}(E_t)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n};$$

条件 2 该矩阵型截面数据时间序列的协方差函数矩阵满足

$$\Gamma(s)=\begin{cases}\Sigma, & s=0,\\ \mathbf{0}, & s\neq 0,\end{cases}\quad \Sigma_{mn\times mn}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_{21}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{m1}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{12}^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{22}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{mn}^2\end{pmatrix}.$$

检验 $\{E_t,t\geq 0\}$ 是否满足第一个条件, 即等价于检验 $\epsilon_{ij}(t)$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 是否都为零均值序列. 我们可以根据 z 统计量或者 t 统计量对此进行检验.

因为 $\{E_t,t\geq 0\}$ 为平稳矩阵型截面数据时间序列, 根据定义 2.3 可知 $\{E_t,t\geq 0\}$ 的 s 阶协方差矩阵为

$$\Gamma(s)=\begin{pmatrix}\gamma_{11,11}(s) & \gamma_{11,21}(s) & \cdots & \gamma_{11,mn}(s)\\ \gamma_{21,11}(s) & \gamma_{21,21}(s) & \cdots & \gamma_{21,mn}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{mn,11}(s) & \gamma_{mn,21}(s) & \cdots & \gamma_{mn,mn}(s)\end{pmatrix}.$$

假设 ϵ_{pq} 与 ϵ_{kl} 之间相互独立, 意味着 $\gamma_{pq,kl}(t)$ 恒为 0, 这里 $p\neq k$ 或者 $q\neq l$. 此时 $\{E_t,t\geq 0\}$ 为矩阵型截面数据白噪声所要满足的第二个条件等价于

$$\gamma_{ij,ij}(s)=\begin{cases}\sigma_{ij}^2, & s=0,\\ 0, & s\neq 0,\end{cases}\quad i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n,$$

即 ϵ_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 均为一维白噪声序列. 因此可以利用 LB 统计量检验 ϵ_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 是否为一维白噪声. 如果 ϵ_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 都是一维白噪声, 那么 $\{E_t,t\geq 0\}$ 满足第二个条件.

综上可知, 假设 ϵ_{pq} 与 ϵ_{kl} $(p\neq k$ 或者 $q\neq l)$ 之间相互独立, 我们可以首先通过 z 统计量或者 t 统计量检验 ϵ_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 的期望是否为 0, 再利用 LB 统计量检验其是否为一维白噪声序列. 如果 ϵ_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 均为一维白噪声序列, 则 E_t 为矩阵型截面数据白噪声.

6 实际应用

本节将对中国工商银行 (股票代码: 601398.SH, 简称: 工行) 和中国农业银行 (股票代码: 601288.SH, 简称: 农行) 的日收益率序列和日成交量变化率序列进行建模, 时间窗口为 2017 年 1 月 1 日至 2019 年 1 月 1 日, 分别用梯度下降算法和奇异值分解 [6] 来得到 MAR(p) 模型的系数矩阵, 并且比较这两种方法所得到的模型的优劣.

6.1 数据的预处理及相关检验

首先对中国工商银行 (601398.SH) 和中国农业银行 (601288.SH) 的日收益率序列和日成交量变化率序列作如下假设:

原假设 H_0: 序列的均值为 0; 备择假设 H_1: 序列的均值不为 0.

再利用单样本 t 检验来判断是否需要拒绝原假设, 表 1 为 t 检验的 p 值. 由表 1 可知, 两只股票的日收益率序列都可接受均值为 0, 但是两只股票的日成交量变化率序列的均值都显著不为 0. 因此, 本文将其进行标准化处理.

变量	工行收益率	工行成交量变化率	农行收益率	农行成交量变化率
p 值	0.465	4.24e-05	0.513	4.22e-05

表 1 两只股票的日收益率序列和日成交量变化率序列的均值检验

利用 ADF 单位根检验和 Ljung-Box Q 检验, 来判断两只银行股票的日收益率序列和日成交量变化率序列的平稳性及其是否为白噪声. 表 2 为 ADF 单位根检验的 p 值, 表 3 为 Ljung-Box Q 检验的 p 值. 由表 2 和表 3 可以看出, 它们均为平稳的非白噪声序列, 因此可以对其建模.

变量	工行收益率	工行成交量变化率	农行收益率	农行成交量变化率
p 值	5.73e-11	6.37e-17	4.36e-21	2.49e-30

表 2 两只股票的日收益率序列和日成交量变化率序列的平稳性检验

变量	工行收益率	工行成交量变化率	农行收益率	农行成交量变化率
p 值	7.65e-04	1.87e-06	1.59e-04	1.64e-05

表 3 两只股票的日收益率序列和日成交量变化率序列的白噪声检验

6.2 MAR(p) 模型的定阶及建模

根据定理 3.1 和定理 3.4 可知, MAR(p) 模型的定阶等价于对应的向量自回归模型的定阶. 因此, 本文首先建立向量自回归模型

$$\widetilde{X}(t)=\Pi_1\widetilde{X}(t-1)+\Pi_2\widetilde{X}(t-2)+\cdots+\Pi_p\widetilde{X}(t-p)+\widetilde{E}(t),$$

其中

$$\widetilde{X}(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\x_{12}(t)\\x_{22}(t)\end{pmatrix},$$

这里 $x_{11}(t)$ 为中国工商银行的日收益率序列, $x_{21}(t)$ 为中国农业银行的日收益率序列, $x_{12}(t)$ 为中国工商银行的日成交量变化率序列, $x_{22}(t)$ 为中国农业银行的日成交量变化率序列.

分别利用 AIC 准则、HQ 准则和 SC 准则对向量自回归模型定阶 (表 4):

准测名称	AIC 准则	HQ 准则	SC 准则
阶数	2	1	1

表 4 向量自回归模型定阶

考虑到本文中时间序列长度较长, 采用 HQ 准则和 SC 准则所确认的阶数作为最终模型的阶数, 即建立一阶向量自回归模型

$$\widetilde{X}(t)=\Pi_1\widetilde{X}(t-1)+\widetilde{E}_t. \tag{6.1}$$

这意味着, 对于中国工商银行 (601398.SH) 和中国农业银行 (601288.SH) 的日收益率序列和日成交量变化率序列, 我们需要建立 MAR(1) 模型

$$X(t)=\Phi_1X(t-1)\Theta_1+E(t), \tag{6.2}$$

其中

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{pmatrix}.$$

以最小化残差的 Frobenius 范数平方和为目标, 利用梯度下降算法, 可以估计出模型 (6.2) 中的系数矩阵 Φ_1 和 Θ_1 如下:

$$\Phi_1=\begin{pmatrix}0.512 & -0.046\\ 0.112 & 0.373\end{pmatrix},\quad \Theta_1=\begin{pmatrix}0.181 & -0.045\\ -0.031 & -0.62\end{pmatrix}.$$

将系数矩阵 Φ_1 和 Θ_1 代入模型 (6.2), 再通过计算可以求出该模型中各序列的残差平方和为 2419.26.

另一方面, 我们可以先估计出模型 (6.1) 的系数矩阵 Π_1, 通过对系数矩阵 Π_1 变换后进行奇异值分解 [6], 可以得到系数矩阵 Φ_1^* 和 Θ_1^*,

$$\Phi_1^*=\begin{pmatrix}-0.698 & 0.365\\ -0.604 & 0.126\end{pmatrix},\quad \Theta_1^*=\begin{pmatrix}-0.432 & -0.043\\ -0.033 & 0.184\end{pmatrix}.$$

将系数矩阵 Φ_1^* 和 Θ_1^* 代入模型 (6.2), 再通过计算可以求出该模型中各序列的残差平方和为 2482.56.

由此可见, 从模型的拟合效果来看, 以梯度下降法估计系数矩阵所得到的模型要更优.

参 考 文 献

[1] Antognini J. F., Buonocore M. H., Disbrow E. A., et al., Isoflurane anesthesia blunts cerebral responses to noxious and innocuous stimuli: a fMRI study, *Life Sciences*, 1997, **61**(24): 349–54.

[2] Bollerslev T., Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Eeri Research Paper*, 1986, **31**(3): 307–327.

[3] Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, 1970.

[4] Engle R. F., Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 1982, **50**(4): 987–1007.

[5] Engle R. F., Granger C. W. J., Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, *Econometrica*, 1987, **55**(2): 251–276.

[6] Fu K. B., Study on the Theory and Applications of AR(p) Model for Matrix Cross-Section Data Time Series (in Chinses), East China Normal University, Shanghai, 2018.

[7] Hamilton J. D., Time Series Analysis (in Chinese), Xia Xiaohua, Translator, China Renmin University Press, Beijing, 2015.

[8] Lütkepohl H., Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer, Berlin, 2014.

[9] Samadi Yaser S., Matrix Time Series Analysis, Ph.D. Dissertation, Athens, GA: The University of Georgia, 2014.

[10] Tiao G. C., Box G. E. P., Modeling multiple times series with applications, *Journal of the American Statistical Association*, 1981, **76**(376): 802–816.

[11] Walker G. T., Seasonal weather and its prediction, *Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 1933, **103**: 25–44.

[12] Walden A., Serroukh A., Wavelet analysis of matrix-valued time series, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2002, **458**: 157–179.

[13] Wang D., Liu X. L., Chen R., Factor models for matrix-valued high-dimensional time series, *Journal of Econometrics*, 2019, **208**(1): 231–248.

[14] Wang H., West M., Bayesian analysis of matrix normal graphical models, *Biometrika*, 2009, **96**(4): 821–834.

[15] Yule G. U., On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1927, **226**: 267–298.