第62卷第4期 数学学报中文版 Vol.62, No.4
2019年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)04-0605-08 **文献标识码: A**

Brown 运动增量在 Hölder 范数下的局部泛函 Chung 重对数律

刘永宏 王为娜

桂林电子科技大学数学与计算科学学院
广西高校数据分析与计算重点实验室 桂林 541004
E-mail: 1286391997@qq.com; 1244651622@qq.com

摘 要 本文利用 Brown 运动在 Hölder 范数下的大偏差和小偏差, 得到了 Brown 运动增量在 Hölder 范数下的局部泛函 Chung 重对数律.

关键词 Brown 运动; 增量; 局部泛函 Chung 重对数律; Hölder 范数
MR(2010) 主题分类 60J65, 60F17, 60F15
中图分类 O211.4

Local Functional Chung's Law of the Iterated Logarithm for Increments of a Brownian Motion in Hölder Norm

Yong Hong LIU Wei Na WANG

School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology
Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation,
Guilin 541004*, P. R. China*
E-mail: 1286391997*@qq.com*; 1244651622*@qq.com*

Abstract Using large deviation and small deviation of Brownian motion in Hölder norm, local functional Chung's law of the iterated logarithm for increments of a Brownian motion in Hölder norm can be obtained.

Keywords Brownian motion; increments; local functional Chung's law of the iterated logarithm; Hölder norm
MR(2010) Subject Classification 60J65, 60F17, 60F15
Chinese Library Classification O211.4

1 引言与主要结果

Brown 运动及其增量的 Chung 极限定理是一类很重要的极限定理, 许多文献从各个方面对这一问题进行了研究. 例如, Baldi 和 Roynette 得到了 Brown 运动在 Hölder 范数下的泛函

收稿日期: 2017-12-15; 接受日期: 2019-01-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11661025)

Chung 重对数律, 见文 [3, 定理 5.1]. 高付清与王清华在文 [4] 中研究的 Brown 运动增量的泛函极限收敛速率. 文 [5] 证明了 Brown 运动增量在 Hölder 范数下的泛函收敛速度. 对局部情形 Chung 极限定理, 人们也有研究, 在文 [1] 中, De Acosta 得到了在一致范数下的 Brown 运动连续模的收敛速度. Lucas 在文 [6] 中得到了另一种情形的一致范数下 Brown 运动连续模的 Chung 对数律. Lucas 和 Thilly [7] 对 Hölder 范数下的 Brown 运动连续模的 Chung 对数律进行了研究, 得到了 Brown 运动连续模在 Hölder 范数下的局部 Chung 对数律的泛函版本. 本文研究 Brown 运动 C-R 型增量的局部极限定理, 得到了 Brown 运动增量在 Hölder 范数下的局部泛函 Chung 重对数律.

设 $w=\{(w_t^1,\dots,w_t^d):t\ge 0\}$ 是 d- 维标准 Brown 运动, $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)=\{f;f:[0,1]\to\mathbb{R}^d,$ f 连续$\}$, 赋予范数 $\|f\|:=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$. 设 $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)=\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^d):f(0)=0\}$,

$$H(\mathbb{R}^d)=\left\{h\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d):h\ \text{绝对连续},\ \|h\|^2_{H(\mathbb{R}^d)}=\int_0^1|\dot h(t)|^2dt<\infty\right\}.$$

考虑两个 Banach 空间:

$$\mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)=\left\{f\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d):\|f\|_\alpha=\sup_{s,t\in[0,1],\ s\ne t}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}<\infty\right\},$$

$$\mathscr{C}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^d)=\left\{f\in\mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}^d):\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\0<|t-s|<\delta}}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}=0\right\},$$

其中 $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

定义映射 $I:\mathscr{C}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^d)\to[0,\infty]$,

$$I(h)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|\dot h(t)|^2dt, & h\in H(\mathbb{R}^d),\\ +\infty, & \text{否则},\end{cases}$$

$K=\{f\in H(\mathbb{R}^d);\ I(f)\le 1\}$.

全文, 设 a_u,b_u 是两个从 $(0,1)$ 到 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 的非减连续函数, 满足

(i) $a_u\le b_u$ 对任何 $u\in(0,1)$ 成立, 且 $\lim_{u\to 0}a_u=0$;

(ii) $\frac{b_u}{a_u}$ 非增;

(iii) $\lim_{u\to 0}\frac{\log(b_u/a_u)}{\log\log b_u^{-1}}=+\infty$.

令 $\ell_u=\log\frac{b_u\log b_u^{-1}}{a_u}$, $\beta_u=(a_u\ell_u)^{-\frac{1}{2}}$. $\Delta(t,u)$ 记轨道 $s\to w(t+a_us)-w(t)$, $s\in[0,1]$, $t\in[0,b_u-a_u]$. 文 [3] 证明存在常数 $k(\alpha)>0$, 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2/(1-2\alpha)}\log P\{\|w\|_\alpha\le\varepsilon\}=-k(\alpha). \tag{1.1}$$

而且, 对任何 $f\in K$, $r>0$ 和 $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/\gamma}\log P\left(\left\|w-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le r\varepsilon\right)=-I(f)-\frac{k(\alpha)}{r^{1/\gamma}}. \tag{1.2}$$

本文主要结果陈述如下:

定理 1.1 如果条件 (i) 和 (ii) 成立, 那么, 对任何 $f\in K$ 且 $I(f)<1$, 有

$$\liminf_{u\to 0}\ell_u^{1-\alpha}\inf_{t\in[0,b_u-a_u]}\|\beta_u\Delta(t,u)-f\|_\alpha=b(f),\quad \text{a.s.},$$

其中 $b(f)=(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})^\gamma$, $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$, 正常数 $k(\alpha)$ 如 (1.1) 定义.

定理 1.2 如果条件 (i), (ii) 和 (iii) 都成立, 那么, 对任何 $f\in K$ 且 $I(f)<1$, 有

$$\lim_{u\to 0}\ell_u^{1-\alpha}\inf_{t\in[0,b_u-a_u]}\|\beta_u\Delta(t,u)-f\|_\alpha=b(f),\quad \text{a.s.},$$

其中 $b(f)=(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})^\gamma$, $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$, 正常数 $k(\alpha)$ 如 (1.1) 定义.

注 1.3 当 $b_u=\mathrm{e}^{-2}$, $a_u=u$ 时, 上述定理即是 Brown 运动连续模的收敛速度. 文 [8] 中的有关结果也可作为上述定理的推论.

2 定理 1.1 的证明

引理 2.1 对任何 Borel 子集 $A\subset\mathscr{C}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log P(\varepsilon w\in A)\le-\Lambda(\bar{A}),\quad \liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log P(\varepsilon w\in A)\ge-\Lambda(\mathring{A}),$$

其中 $\Lambda(A)=\inf_{h\in A}I(h)$.

证明 见文 [2, 定理 2.1]. 证明从略.

引理 2.2 设 $c_n>2$, 对任意小的 $\eta>0$, 有

$$\begin{aligned}&P\bigg(\sup_{0\le T\le 1}\sup_{0\le s<t\le c_n}\frac{|w(T+t)-w(t)-(w(T+s)-w(s))|}{|t-s|^\alpha}\ge\eta\bigg)\\&\quad\le 3c_nP\bigg(\sup_{0\le T\le 1}\|w(T+\cdot)-w(\cdot)\|_\alpha\ge\frac{\eta}{2}\bigg)+c_n^2P\bigg(\sup_{0\le s\le 1}\|w(s+\cdot)-w(s)\|\ge\frac{\eta}{2}\bigg).\end{aligned}$$

证明 见文 [5, 引理 2.2]. 证明从略.

引理 2.3 对任意 $f\in K$ 且 $I(f)<1$, 有

$$\liminf_{u\to 0}\ell_u^{1-\alpha}\inf_{t\in[0,b_u-a_u]}\|\beta_u\Delta(t,u)-f\|_\alpha\ge b(f),\quad \text{a.s.}$$

证明 (I) 若 $\limsup_{u\to 0}\frac{\log(b_u/a_u)}{\log\log b_u^{-1}}<\infty$, 那么存在 $0<M<\infty$, 使得 $\frac{b_u}{a_u}\le(\log b_u^{-1})^M$, 推出

$$\log\frac{b_u\log b_u^{-1}}{a_u}\le(M+1)\log\log b_u^{-1}.\tag{2.1}$$

令 $l(u)=a_u(\log\frac{b_u\log b_u^{-1}}{a_u})^{-\frac{2}{1-2\alpha}}$, $a_{u_n}=\exp(-\frac{n}{(\log n)^3})$. 进一步设 $k_n=[\frac{b_{u_n}}{l(u_{n+1})}]$. 对 $t_i=il(u_{n+1})$, $i=0,1,2,\dots,k_n$, 有

$$\begin{aligned}&\min_{0\le i\le k_n}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i))-f\|_\alpha\\&\quad\le\max_{0\le i\le k_n}\sup_{0\le s\le l(u_{n+1})}\|\beta_{u_{n+1}}(w(s+(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot))-w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot))\|_\alpha\\&\qquad+\inf_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t))-f\|_\alpha.\end{aligned}\tag{2.2}$$

注意到 $I(f)<1$, 对任意 $0<\varepsilon<1$, 选 $\delta>0$, 使得 $\eta_0=I(f)+\frac{1-I(f)}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}}-2\delta>1$, 有

$$\begin{aligned}&P\Big(\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}\min_{0\le i\le k_n}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i))-f\|_\alpha\le(1-\varepsilon)b(f)\Big)\\&\quad\le\sum_{0\le i\le k_n}P\bigg(\|\beta_{u_{n+1}}(w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i))-f\|_\alpha\le(1-\varepsilon)\frac{b(f)}{\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}}\bigg)\\&\quad=\sum_{0\le i\le k_n}P\bigg(\bigg\|\frac{w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i)}{\sqrt{a_{u_{n+1}}}}-\sqrt{\ell_{u_{n+1}}}f\bigg\|_\alpha\le(1-\varepsilon)\frac{b(f)}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{1}{2}-\alpha}}\bigg).\end{aligned}$$

由 (1.2) 对 n 足够大

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le i\le k_n}P\bigg(\bigg\|\frac{w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i)}{\sqrt{a_{u_{n+1}}}}-\sqrt{\ell_{u_{n+1}}}f\bigg\|_\alpha\le(1-\varepsilon)\frac{b(f)}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}\bigg)\\&\quad\le(1+k_n)\exp\bigg\{\bigg(-\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\bigg)\bigg(I(f)+\frac{1-I(f)}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}}-2\delta\bigg)\bigg\}\\&\quad\le\frac{b_{u_n}+l(u_{n+1})}{l(u_{n+1})}\bigg(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}\bigg)^{\eta_0}.\end{aligned}$$

因此, 由 Borel–Cantelli 引理, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}\min_{0\le i\le k_n}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i))-f\|_\alpha\ge b(f),\quad\text{a.s.}\tag{2.3}$$

另一方面, 对任意 $\eta>0$,

$$\begin{aligned}&P\Big(\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}\sup_{0\le i\le k_n}\sup_{0\le s\le l(u_{n+1})}\beta_{u_{n+1}}\|w(s+t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)\|_\alpha\ge\eta\Big)\\&\quad=P\Bigg(\frac{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{2}{1-2\alpha}}}}\sup_{0\le i\le k_n}\sup_{0\le T\le1}\bigg\|w\bigg(T+i+\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\cdot\bigg)-w\bigg(i+\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\cdot\bigg)\bigg\|_\alpha\ge\eta\Bigg)\\&\quad\le(1+k_n)P\Bigg(\frac{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{2}{1-2\alpha}}}}\sup_{0\le T\le1}\sup_{0\le s<t\le\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{l(u_{n+1})^\alpha}\frac{|\tilde\Delta_Tw(t)-\tilde\Delta_Tw(s)|}{|t-s|^\alpha}\ge\eta\Bigg),\end{aligned}$$

其中 $\tilde\Delta_Tw(t)=w(T+\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}t)-w(\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}t)$.

由引理 2.2 有

$$\begin{aligned}&(1+k_n)P\Bigg(\frac{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{2}{1-2\alpha}}}}\sup_{0\le T\le1}\sup_{0\le s<t\le\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{l(u_{n+1})^\alpha}\frac{|\tilde\Delta_Tw(t)-\tilde\Delta_Tw(s)|}{|t-s|^\alpha}\ge\eta\Bigg)\\&\quad\le3\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}(1+k_n)P\Bigg(\frac{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{2}{1-2\alpha}}}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{(l(u_{n+1}))^\alpha}\sup_{0\le T\le1}\|w(T+\cdot)-w(\cdot)\|_\alpha\ge\frac{\eta}{2}\Bigg)\\&\qquad+\bigg(\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\bigg)^2(1+k_n)P\Bigg(\frac{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12-\alpha}}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{2}{1-2\alpha}}}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{(l(u_{n+1}))^\alpha}\sup_{0\le x\le1}\|w(x+\cdot)-w(x)\|\ge\frac{\eta}{2}\Bigg)\\&\quad\le3\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}(1+k_n)P\Bigg(\frac{\sqrt2}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12+\alpha}}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{(l(u_{n+1}))^\alpha}\sup_{0\le T\le1}\bigg\|w\bigg(\frac12T+\frac12\cdot\bigg)-w\bigg(\frac12\cdot\bigg)\bigg\|_\alpha\ge\frac{\eta}{2}\Bigg)\\&\qquad+\bigg(\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\bigg)^2(1+k_n)P\Bigg(\frac{\sqrt2}{\sqrt{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12+\alpha}}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{(l(u_{n+1}))^\alpha}\sup_{0\le x\le1}\bigg\|w\bigg(\frac12x+\frac12\cdot\bigg)-w\bigg(\frac12x\bigg)\bigg\|\ge\frac{\eta}{2}\Bigg)\\&\quad=\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}(1+k_n)\Bigg(3P\bigg(\frac{\sqrt2}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12+\alpha}}w\in A\bigg)+\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}P\bigg(\frac{\sqrt2}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac12+\alpha}}w\in B\bigg)\Bigg),\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中 $A=\{f\in\mathscr{C}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^d):\sup_{0\le t\le1}\|f(\frac12t+\frac12\cdot)-f(\frac12\cdot)\|_\alpha\ge\frac{\eta}{2}\}$, $B=\{f\in\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^d):\sup_{0\le t\le1}\|f(\frac12t+\frac12\cdot)-f(\frac12t)\|\ge\frac{\eta}{2}\}$.

对任意 $f\in A$, 有 $\inf_{f\in A} I(f)\geq \frac{\eta^2}{32}$. 由引理 2.1, 对 n 足够大, 得到

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{1}{2}+\alpha}}w\in A\right)\leq \exp\left(-\frac{\eta^2}{128}\ell_{u_{n+1}}^{1+2\alpha}\right)=\exp\left(-\frac{\eta^2}{128}\ell_{u_{n+1}}^{2\alpha}\ell_{u_{n+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}\right)^{\frac{\eta^2}{128}\left(\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\right)^{2\alpha}}. \tag{2.5}$$

考虑到 $\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\to\infty\ (n\to\infty)$, 有

$$\sum_n\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\frac{b_{u_n}+l(u_{n+1})}{l(u_{n+1})}\left(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}\right)^{\frac{\eta^2}{128}\left(\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\right)^{2\alpha}}<\infty. \tag{2.6}$$

对 n 足够大, 也有

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{1}{2}+\alpha}}w\in B\right)\leq \exp\left(-\frac{\eta^2}{8}\ell_{u_{n+1}}^{1+2\alpha}\right)=\left(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}\right)^{\frac{\eta^2}{8}\left(\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\right)^{2\alpha}}. \tag{2.7}$$

再考虑到 $\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\to\infty\ (n\to\infty)$, 有

$$\sum_n\left(\frac{a_{u_{n+1}}}{l(u_{n+1})}\right)^2(1+k_n)\left(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}\right)^{\frac{\eta^2}{8}\left(\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\right)^{2\alpha}}<\infty.$$

由 Borel–Cantelli 引理, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}\sup_{0\leq i\leq k_n}\sup_{0\leq s\leq l(u_{n+1})}\beta_{u_{n+1}}\|w(s+t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t_i+a_{u_{n+1}}\cdot)\|_\alpha=0,\quad \text{a.s.} \tag{2.8}$$

由 (2.2), (2.3) 和 (2.8), 得到

$$\liminf_{n\to\infty}\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}\inf_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t+a_{u_{n+1}}\cdot)-w(t))-f\|_\alpha\geq b(f),\quad \text{a.s.} \tag{2.9}$$

注意到 u_n 足够小, 因此对足够小的 u 存在唯一 n, 使得 $u\in[u_{n+1},u_n)$. 设 $\phi_{t,u}(s)=\beta_u(w(t+a_us)-w(t))$, $s\in[0,1]$, $t\in[0,b_u-a_u]$. 定义

$$X(u)=\ell_u^{1-\alpha}\inf_{t\in[0,b_u-a_u]}\|\phi_{t,u}(\cdot)-f(\cdot)\|_\alpha,\quad X_n=\inf_{u_{n+1}\leq u<u_n}X(u).$$

由下确界的定义, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $T_n\in[u_{n+1},u_n)$, 使得 $X_n\geq X(T_n)-\varepsilon$.

对任何 $r,q\in[0,1]$, 设 $x=\frac{ra_{u_{n+1}}}{a_{T_n}}$, $y=\frac{qa_{u_{n+1}}}{a_{T_n}}$, 则 $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$. 有下面估计

$$\begin{aligned}
&\inf_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_{n+1}}(w(t+a_{u_n}\cdot)-w(t))-f\|_\alpha\\
&\leq\inf_{t\in[0,b_{T_n}-a_{T_n}]}\sup_{0\leq r<q\leq 1}\frac{|\phi_{t,u_{n+1}}(q)-f(q)-(\phi_{t,u_{n+1}}(r)-f(r))|}{|q-r|^\alpha}\\
&=\inf_{t\in[0,b_{T_n}-a_{T_n}]}\sup_{0\leq x<y\leq\frac{a_{u_{n+1}}}{a_{T_n}}}\frac{a_{u_{n+1}}^\alpha}{a_{T_n}^\alpha}\frac{|\phi_{t,u_{n+1}}(\frac{a_{T_n}y}{a_{u_{n+1}}})-f(\frac{a_{T_n}y}{a_{u_{n+1}}})-(\phi_{t,u_{n+1}}(\frac{a_{T_n}x}{a_{u_{n+1}}})-f(\frac{a_{T_n}x}{a_{u_{n+1}}}))|}{|y-x|^\alpha}\\
&\leq\inf_{t\in[0,b_{T_n}-a_{T_n}]}\sup_{0\leq x<y\leq 1}\frac{|\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}\phi_{t,T_n}(y)-f(\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}y)-(\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}\phi_{t,T_n}(x)-f(\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}x))|}{|y-x|^\alpha}
\end{aligned}$$

$$\le \inf_{t\in[0,b_{T_n}-a_{T_n}]} \frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}\|\phi_{t,T_n}(\cdot)-f(\cdot)\|_\alpha + \left|\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}-1\right|\|f(\cdot)\|_\alpha + \left\|f(\cdot)-f\left(\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}\cdot\right)\right\|_\alpha$$

$$\le \frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}\ell_{u_n}^{-(1-\alpha)}X(T_n) + \left|\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}}-1\right|\|f(\cdot)\|_\alpha + \left\|f(\cdot)-f\left(\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}\cdot\right)\right\|_\alpha. \tag{2.10}$$

注意到

$$1 \ge \frac{\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}{\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}} = \frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}\frac{\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}{\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}}\frac{a_{u_{n+1}}}{a_{u_n}} \ge \frac{a_{u_{n+1}}}{a_{u_n}} \to 1, \tag{2.11}$$

$$\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{T_n}} \le \frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{u_n}} \le \frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}} \le 1+\left(\frac{1}{(\log n)^3}\right)+o\left(\frac{1}{(\log n)^3}\right). \tag{2.12}$$

应用文 [5, (2.12)], 存在常数 $c>0$,

$$\left\|f(\cdot)-f\left(\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}\cdot\right)\right\|_\alpha \le c\left|\frac{a_{T_n}}{a_{u_{n+1}}}-1\right|^{\frac12-\alpha} \le c\left|\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}-1\right|^{\frac12-\alpha}, \tag{2.13}$$

而且 $\frac{b_u}{a_u} \le (\log b_u^{-1})^M \le (\log a_u^{-1})^M$, 于是

$$\left(\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}\right)^{1-\alpha} \le ((M+1)\log\log a_{u_n}^{-1})^{1-\alpha}. \tag{2.14}$$

由 (2.9)–(2.14), 得到

$$\liminf_{n\to\infty} X(T_n) \ge b(f), \quad \text{a.s.}$$

注意到

$$\liminf_{u\to0} X(u) \ge \liminf_{n\to\infty} X_n \ge \liminf_{n\to\infty} X(T_n)-\varepsilon.$$

我们完成 (I) 的证明.

(II) 若 $\limsup_{u\to0}\frac{\log(b_u/a_u)}{\log\log b_u^{-1}}=\infty$, 我们选非增序列 $\{u_n, n\ge1\}$ 使 $\frac{b_{u_n}}{a_{u_n}}=n^p$. 在下文, 固定 $p>(\sigma-1)^{-1}$, 其中 $\sigma := I(f)+\frac{1-I(f)}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}}-\delta>1$. 设

$$g(n)=\frac{\log(b_{u_n}/a_{u_n})}{\log\log b_{u_n}^{-1}}=\frac{\log n^p}{\log\log b_{u_n}^{-1}}.$$

我们知道 $g(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$. 那么 $b_{u_n}^{-1}=\exp(n^{p/g(n)})$. 设 $l(u)$, k_n 和 t_i $(i=1,2,\ldots)$ 如 (I) 定义. 那么对一些常数 $C>0$,

$$\sum_{n\to\infty}\frac{b_{u_n}+l(u_{n+1})}{l(u_{n+1})}\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^\sigma \le C\sum_n^\infty n^{-p(\sigma-1)}(\log n)^{\frac{2}{1-2\alpha}}<\infty.$$

进一步有

$$\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}=\frac{b_{u_n}}{n^p}\frac{(n+1)^p}{b_{u_{n+1}}}=\frac{(n+1)^p}{n^p}\exp((n+1)^{p/g(n+1)}-n^{p/g(n)})$$

$$\le\left(1+\frac1n\right)^p\exp(n^{p/g(n)-1}) \le \left(1+\frac1n\right)^p\left(1+\frac{1}{n^{(1-p/g(n))}}+o\left(\frac{1}{n^{(1-p/g(n))}}\right)\right),$$

这意味着

$$\left(\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{a_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right)=\left(p\log n+\frac{p\log n}{g(n)}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{a_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right)\to0,\quad n\to\infty.$$

类似 (I) 证明, (II) 获证. 证毕.

引理 2.4 对任何 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, 有

$$\liminf_{u\to 0} \ell_u^{1-\alpha} \inf_{t\in[0,1-\frac{a_u}{b_u}]} \|\beta_u \Delta(t,u) - f\|_\alpha \le b(f), \quad \text{a.s.}$$

证明 设 $\rho = \lim_{u\to 0} \frac{a_u}{b_u}$, $u_1 = 1$.

(a) 若 $\rho < 1$, $b_u \to b \ne 0$ $(u \to 0)$, 那么 $\lim_{u\to 0} \frac{\log \frac{b_u}{a_u}}{\log\log b_u^{-1}} = \infty$, 对这种情形见引理 3.2. 故仅考虑情形 $\rho < 1$, $b_u \to 0$ $(u \to 0)$ 和 $\rho = 1$. 选 $\{u_n, n \ge 1\}$, 使 $b_{u_{n+1}} = b_{u_n} - a_{u_n}$, $n \ge 1$. 那么 $\{\ell_{u_{n+1}} \|\beta_{u_{n+1}} \Delta(b_{u_{n+1}} - a_{u_{n+1}}, u_{n+1}) - f\|_\alpha \le (1+\varepsilon) b(f)\}$ 是独立的 $(n \in \mathbb{N})$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 选 $\delta > 0$, 使得 $\mu := (1 - I(f))/(1+\varepsilon)^{1/\gamma} + I(f) + 2\delta < 1$. 那么, 由 (1.2), 对 n 足够大, 有

$$\begin{aligned}
&P\big(\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha} \big\|\beta_{u_{n+1}} \Delta(b_{u_{n+1}} - a_{u_{n+1}}, u_{n+1}) - f\big\|_\alpha \le (1+\varepsilon) b(f)\big) \\
&= P\bigg(\|\beta_{u_{n+1}}(w(b_{u_{n+1}} - a_{u_{n+1}} + a_{u_{n+1}}\cdot) - w(b_{u_{n+1}} - a_{u_{n+1}})) - f\|_\alpha \le (1+\varepsilon) \frac{b(f)}{\ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha}}\bigg) \\
&= P\bigg(\big\|w(\cdot) - \sqrt{\ell_{u_{n+1}}} f\big\|_\alpha \le (1+\varepsilon) \frac{b(f)}{\ell_{u_{n+1}}^{\frac{1}{2}-\alpha}}\bigg) \\
&\ge \exp\bigg(\ell_{u_{n+1}}\bigg(-I(f) - \frac{k(\alpha)}{(1+\varepsilon)^{1/\gamma}(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})} - 2\delta\bigg)\bigg) \\
&= \exp\bigg(-\bigg(\log \frac{b_{u_{n+1}} \log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}\bigg)\mu\bigg) = \bigg(\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}} \log b_{u_{n+1}}^{-1}}\bigg)^\mu.
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n\ge 1} (\frac{a_{u_{n+1}}}{b_{u_{n+1}} \log b_{u_{n+1}}^{-1}})^\mu$ 发散, 由 Borel–Cantelli 引理

$$\liminf_{n\to\infty} \ell_{u_{n+1}}^{1-\alpha} \|\beta_{u_{n+1}} \Delta(b_{u_{n+1}} - a_{u_{n+1}}, u_{n+1}) - f\|_\alpha \le b(f), \quad \text{a.s.}$$

(b) 若 $\rho = 1$, 那么这种情形类似于文 [3, 定理 5.1] 的证明. 证毕.

3 定理 1.2 的证明

引理 3.1 存在递减序列 u_n 趋于 0, 使得对任何 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \ell_{u_n}^{1-\alpha} \inf_{t\in[0, b_{u_{n+1}} - a_{u_n}]} \|\beta_{u_n}(w(t + a_{u_n}\cdot) - w(t)) - f\|_\alpha \le b(f), \quad \text{a.s.}$$

证明 因为 $\limsup_{u\to 0} \frac{\log \frac{b_u}{a_u}}{\log\log b_u^{-1}} = \infty$, 选 $\{u_n; n \ge 1\}$, 使得 $\frac{b_{u_n}}{a_{u_n}} = n^p$. 设

$$t_i = i a_{u_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k_n = \bigg[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\bigg] - 1, \quad g(n) = \frac{\log \frac{b_{u_n}}{a_{u_n}}}{\log\log b_{u_n}^{-1}} = \frac{\log n^p}{\log\log b_{u_n}^{-1}},$$

那么 $b_{u_n}^{-1} = \exp(n^{\frac{p}{g(n)}})$, $g(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$. 而且对任何 $p > 0$, $\frac{(n+1)^p}{\log b_{u_n}^{-1}} \to \infty$, $1 \le \frac{b_{u_n}}{b_{u_{n+1}}} = \exp\{(n+1)^{\frac{p}{g(n+1)}} - n^{\frac{p}{g(n)}}\} \le \exp\{n^{\frac{p}{g(n)} - 1}\} \to 1$ $(n \to \infty)$. 选 $\delta > 0$, 使得 $\sigma_0 := \frac{1 - I(f)}{(1+\varepsilon)^{1/\gamma}} + I(f) + 2\delta < 1$. 由 (1.2) 得到, 对 n 足够大

$$\begin{aligned}
&P\Big(\ell_{u_n}^{1-\alpha} \inf_{t\in[0, b_{u_{n+1}} - a_{u_n}]} \|\beta_{u_n}(w(t + a_{u_n}\cdot) - w(t)) - f\|_\alpha \ge b(f)(1+\varepsilon)\Big) \\
&\le P\Big(\ell_{u_n}^{1-\alpha} \min_{0\le i\le k_n} \|\beta_{u_n}(w(t_i + a_{u_n}\cdot) - w(t_i)) - f\|_\alpha \ge b(f)(1+\varepsilon)\Big) \\
&= \bigg\{P\bigg(\ell_{u_n}^{1-\alpha} \bigg\|\frac{1}{\sqrt{a_{u_n} \ell_{u_{n+1}}}} w(a_{u_n}\cdot) - f\bigg\|_\alpha \ge b(f)(1+\varepsilon)\bigg)\bigg\}^{1+k_n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{1 - P\left(\|w - \sqrt{\ell_{u_n}} f\|_\alpha < \frac{b(f)(1+\varepsilon)}{\ell_{u_n}^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right)\right\}^{1+k_n} \\
&\le \exp\left\{ - \left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n} \log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\sigma_0} \left(\left[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right]\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

若选适当的 p, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{ - \left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n} \log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\sigma_0} \left(\left[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right]\right)\right\} < \infty$. 由 Borel–Cantelli 引理, 有

$$
\limsup_{n\to\infty} \ell_{u_n}^{1-\alpha} \inf_{t\in[0, b_{u_{n+1}} - a_{u_n}]} \|\beta_{u_n}(w(t + a_{u_n} s) - w(t)) - f\|_\alpha \le b(f), \quad \text{a.s.}
$$

证毕.

引理 3.2 对任何 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, 有

$$
\limsup_{u\to 0} \ell_u^{1-\alpha} \inf_{t\in[0, b_u - a_u]} \|\beta_u(w(t + a_u \cdot) - w(t)) - f\|_\alpha \le b(f), \quad \text{a.s.}
$$

证明 设 $\phi_{t,u}(s)=\beta_u(w(t+a_u s)-w(t))$, u_n 如引理 3.1 定义. 因为 $\phi_{t,u}(s)=\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}}\phi_{t,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}s)$, 有

$$
\begin{aligned}
\inf_{t\in[0,b_u-a_u]} \|\phi_{t,u}(\cdot)-f(\cdot)\|_\alpha \le & \inf_{t\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]} \left\|\phi_{t,u_n}\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right) - f\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right)\right\|_\alpha \\
& + \sup_{t\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]} \left|\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}} - 1\right| \left\|\phi_{t,u_n}\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right)\right\|_\alpha + \left\|f\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right) - f(\cdot)\right\|_\alpha \\
\le & \inf_{t\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]} \left\|\phi_{t,u_n}\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right) - f\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right)\right\|_\alpha \\
& + \sup_{t\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]} \left|\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}} - 1\right| \left\|\phi_{t,u_{n+1}}\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right)\right\|_\alpha \\
& + \left\|f\left(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot\right) - f(\cdot)\right\|_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

类似于引理 2.3 (II) 的证明, 我们完成了定理 1.2 的证明.

参 考 文 献

[1] De Acosta A., On the functional form of Lévy's modulus of continuity for Brownian motion, *Z. W. V. Gebiete*, 1985, **69**: 567–579.

[2] Baldi P., Ben Arous G., Kerkyacharian G., Large deviations and the Strassen's theorem in Hölder norm, *Stochastic Process Appl.*, 1992, **42**(1): 171–180.

[3] Baldi P., Roynette B., Some exact equivalents for the Brownian motion in Hölder norm, *Probab. Theory Relat. Fields*, 1992, **93**: 457–484.

[4] Gao F., Wang Q., The rate of convergence in the functional limit theorem for increments of a Brownian motion, *Statist. & Probab. Lett.*, 2005, **73**: 165–177.

[5] Liu Y., Li L., Wan C., The rate of convergence for increments of a Brownian motion in Hölder norm, *Statist. & Probab. Lett.*, 2009, **79**: 1463–1472.

[6] Lucas A., Fractales aléatoires de type Chung pour les accroissements du processus de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 1998, **326**: 1123–1126.

[7] Lucas A., Thilly E., Loi de type Chung en norme de Hölder pour les accroissements locaux du mouvement Brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 2003, **336**: 1029–1032.

[8] Wei Q., Functional modulus of continuity for Brownian motion in Hölder norm, *Chin. Ann. of Math.*, 2001, **22B**(2): 223–232.