第65卷第6期 数学学报中文版 Vol.65, No.6
2022年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2022

DOI: 10.12386/A20190048 **文献标识码: A**

用耦合方法
研究 Markov 过程的 f- 遍历

朱志锋

湖北工程学院数学与统计学院 孝感 432000
E-mail: 376574200@qq.com

张绍义

湖北大学数学与统计学学院, 应用数学湖北省重点实验室 武汉 430062
E-mail: zhshaoyi@aliyun.com

摘 要 该文先研究基本耦合, 得到全变差范数与基本耦合的一个等式. 然后利用此等式研究一般状态空间下连续时间 Markov 过程的遍历性. 对遍历的连续时间 Markov 过程, 增加条件 $\pi(f)<\infty$, 利用耦合方法证明了存在满的吸收集, 使得连续时间 Markov 过程在其上是 f- 遍历的.

关键词 Markov 过程; 基本耦合; 全变差范数; f- 遍历
MR(2010) 主题分类 65J25
中图分类 O211.4

f-ergodicity of Markov Process by Coupling Method

Zhi Feng ZHU

School of Mathematics and Statistics, Hubei Engineering University,
Xiaogan 432000*, P. R. China*
E-mail: 376574200*@qq.com*

Shao Yi ZHANG

Hubei Key Laboratory of Applied Mathematics,
School of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062*, P. R. China*
E-mail: *zhshaoyi@aliyun.com*

Abstract We first study the basic coupling and obtain an equation between total variation norm and the basic coupling. Then by use this equation we investigate the ergodicity property of continuous time Markov processes in general state space. For an ergodic continuous-time Markov processes, adding condition $\pi(f)<\infty$, by using the coupling method, there exists the full absorption set, such that the continuous time Markov processes are f-ergodic on it.

收稿日期: 2019-04-23; 接受日期: 2022-05-16
基金项目: 湖北省自然科学基金青年项目 (2021CFB275); 应用数学湖北省重点实验室 (湖北大学) 开放基金 (HBAM202104)

Keywords Markov processes; the basic coupling; total variation norm; f-ergodic
MR(2010) Subject Classification 65J25
Chinese Library Classification O211.4

1 引言和主要结果

遍历 Markov 过程是 Markov 过程研究的基本问题之一, 对于齐次和非齐次 Markov 链的遍历性的研究日益趋近成熟, 如王梓坤早前研究的齐次 Markov 过程的遍历性 (文献 [1]). Markov 过程的遍历性有着非常重要的实际应用, 应用的范围非常广泛, 涉及到排队论衍生出来的 Markov 过程和 Markov 链以及 q 过程中的生灭过程. 为了研究遍历性的收敛速度, 引入了 f- 遍历, 指数遍历 (又称几何遍历) 和 f- 指数遍历 (又称 f- 几何遍历). 一般状态空间的全变差范数意义下的 f- 遍历最早由 Nummelin 和 Tweedie 引入并研究, 由于应用的需要, Meyn 和 Tweedie 在文献 [2] 引入并研究了更一般形式的 f- 指数遍历. 本文用耦合方法研究了 Markov 过程的 f- 遍历.

文献 [3] 研究了离散时间一般状态空间 Markov 链的 f- 指数遍历性. 对于连续时间 Markov 过程的指数遍历性, Meyn 和 Tweedie 通过漂移函数所给出的准则是充分的 (参见文献 [4,5]).

设 $\{\Phi_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一个连续时间 Markov 过程, 有时直接简记为 Φ_t. 状态空间 X 为 Polish 空间 (即完备可分的度量空间), $\mathscr{B}(X)$ 是由 X 中可数个子集生成的 σ 代数, 设 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 上的全体概率测度, 用 $P(t,x,A)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\mathscr{B}(X)$ 来表示 Markov 过程的转移概率函数, 即 $P(t,x,A)$. 有时也用 $P(t)$ 来表示连续时间 Markov 过程. 本文所提到的 Markov 过程, 若未加说明, 都是特指连续时间 Markov 过程.

记 $v(g) := \int_X g dv$, $\pi(f) := \int_X \pi(dx) f(x)$.

定义 1.1 设 v 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的符号测度, g, f 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的可测函数, 定义 v 的全变差范数为

$$\|v\| := \sup\{|v(g)| : |g| \le 1\},$$

定义 v 的 f- 范数为

$$\|v\|_f := \sup\{|v(g)| : |g| \le f\}, \quad f \ge 1.$$

定义 1.2 称 Markov 过程 $\{\Phi_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 (普通) 遍历的, 若存在唯一的不变测度 π, 满足

$$\lim_{t\to\infty} \|P(t,x,\cdot) - \pi(\cdot)\| = 0, \quad \forall x\in X.$$

定义 1.3 设 f- 是可测函数, 称 Markov 过程 $\{\Phi_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 f- 遍历的, 若 $f\ge 1$ 且满足:
(i) Φ_t 是正 Harris 常返的且有不变测度 π;
(ii) $\pi(f) < \infty$;
(iii) 对任意的初始状态 x, 有

$$\lim_{t\to\infty} \|P(t,x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0.$$

若 $f\equiv 1$, 则 f- 范数变成了全变差范数, 相应地, f- 遍历变成了 (普通) 遍历.

记 $\tau_C := \min\{n\ge 1;\ \Phi_n \in C\}$ 为在 C 上首次返回的时刻.

引理 1.4 [2] 设 Φ 是 ψ 不可约非周期 Markov 链, $f\ge 1$ 是 X 上的函数, 则下面条件等价:
(i)Markov 链 Φ 是正常返的且有不变测度 π 满足 $\pi(f) < \infty$.

(ii) 存在细集 $C \in \mathscr{B}(X)$, 使得 $\sup_{x\in C} E_x[\sum_{n=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_n)] < \infty$.

(iii) 存在细集 C 和扩展值非负函数 V 对某 $x_0 \in X$ 满足 $V(x_0) < \infty$, 且有

$$\triangle V(x) \le -f(x) + b\,\amalg_C(x). \tag{1.1}$$

以上任一条件可得 $S_V = \{x : V(x) < \infty\}$ 是满吸收集, 其中 V 是 (1.2) 式的满足条件 (iii) 的解. 并且任意满足 (1.1) 式的下水平集 V, 对任意 $x \in S_V$, 有 $\lim_{n\to\infty} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0$.

这是文献 [2, 定理 14.0.1], 该定理研究了离散时间 Markov 链的 f- 遍历性. 由此得到启发, 作者研究了连续时间 Markov 过程的 f- 遍历性.

本文的主要结果是利用耦合方法, 得到下面的连续时间一般状态空间 Markov 过程的 f- 遍历判定的充分条件, 即本文的定理 1.5.

定理 1.5 设 $P(t)$ 是遍历 Markov 过程, π 是 $P(t)$ 的唯一平稳分布, 可测函数 $f \ge 1$, 且 $\pi(f) < \infty$, 则存在满的吸收集 $X_0(\subset X)$, 使得 $P(t)$ 限制在 X_0 上是 f- 遍历的, 即 $\forall x \in X_0$, $\lim_{t\to\infty} \|P(t,x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0$.

2 引理及其证明

定义 2.1 [6] 设 μ_1, μ_2 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的任意概率测度, $\widetilde{\mu}$ 是 $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(X)$ 上的概率测度, 称 $\widetilde{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的耦合, 若满足边缘性:

$$\widetilde{\mu}(A_1 \times X) = \mu_1(A_1),\quad A_1 \in \mathscr{B}(X);\quad \widetilde{\mu}(X \times A_2) = \mu_2(A_2),\quad A_2 \in \mathscr{B}(X).$$

记 $K(\mu_1, \mu_2)$ 为 μ_1 与 μ_2 的全体耦合.

引理 2.2 [7] 设 μ_1, μ_2 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的任意概率测度, 令 $\mu' = \mu_1 + \mu_2$, 记

$$g_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu'},\quad g_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu'},\quad g = \min\{g_1, g_2\},\quad \gamma = \int g d\mu',$$

$$v_1(A) = \int_A (g_1 - g) d\mu',\quad A \in \mathscr{B}(X),\quad v_2(A) = \int_A (g_2 - g) d\mu',\quad A \in \mathscr{B}(X),$$

$$Q(B) = \int_{B\cap\{(x,y):x=y\}} g(x)\mu' d(x),\quad B \in \mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(X).$$

易得 $0 \le \gamma \le 1$, v_1, v_2 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的两个测度, Q 是 $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(X)$ 上的测度. 令

$$\overline{\mu} = \begin{cases} Q, & \gamma = 1, \\ \dfrac{v_1 \times v_2}{1-\gamma} + Q, & \gamma \ne 1, \end{cases}$$

则 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的耦合, 称 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的基本耦合.

记 $\varphi(x,y) := d(x,y)[f(x) + f(y)]$, 可测函数 $f \ge 1$, 其中

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \ne y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

引理 2.3 [6] 设 μ_1, μ_2 是任意概率测度, 则有 $\frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\| = \inf_{\tilde{\mu}\in K(\mu_1,\mu_2)} \int d(x,y)\tilde{\mu}(dx,dy)$.

证明见陈木法的文献 [6, 定理 5.7].

引理 2.4 设 $\mu_1(t,x,dx), \mu_2(t,y,dy)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的任意概率测度, $\overline{\mu}(t;x,y;du,dv)$ 是 $\mu_1(t,x,du)$ 与 $\mu_2(t,y,dv)$ 的基本耦合, 则有

$$\|\mu_1(t,x,du) - \mu_2(t,y,dv)\| = 2\int d(u,v)\overline{\mu}(t;x,y;du,dv). \tag{2.1}$$

证明 设 h 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的可测函数,

$$
\begin{aligned}
\|\mu_1-\mu_2\| &= \sup_{|h|\le 1}\left|\int h d\mu_1-\int h d\mu_2\right| = \sup_{|h|\le 1}\left|\int h g_1 d\mu'-\int h g_2 d\mu'\right| \\
&= \sup_{|h|\le 1}\left\{\int_{\{g_1\ge g_2\}} h(g_1-g_2)d\mu'-\int_{\{g_1<g_2\}} h(g_1-g_2)d\mu'\right\} \\
&= \int_{\{g_1\ge g_2\}}(g_1-g_2)d\mu'-\int_{\{g_1<g_2\}}(g_1-g_2)d\mu' \\
&= \int |g_1-g_2|d\mu' \quad (|g_1-g_2|\equiv(g_1-g)+(g_2-g)) \\
&= \int (g_1-g)d\mu'+\int(g_2-g)d\mu' \\
&= \left(\int g_1 d\mu'-\int g d\mu'\right)+\left(\int g_2 d\mu'-\int g d\mu'\right) \\
&= (1-\gamma)+(1-\gamma)=2(1-\gamma).
\end{aligned}
$$

于是, 只需证 $\int d(u,v)\overline{\mu}(du,dv)=1-\gamma$. 往证之.

(a) 当 $\gamma=1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int d(u,v)\overline{\mu}(du,dv) = \int d(u,v)Q(du,dv) &= \int d(u,v)\int_{\{(u,v):u=v\}} g(u)\mu' d(u) \\
&= \int\int_{\{(u,v):u=v\}} d(u,v)g(u)\mu' d(u)=0.
\end{aligned}
$$

从而有 $\int d(u,v)\overline{\mu}(du,dv)=0=1-\gamma$.

(b) 当 $\gamma<1$, $u=v$ 时, $\int d(u,v)\overline{\mu}(du,dv)=0$, 所以有

$$
\begin{aligned}
\int d(u,v)\overline{\mu}(du,dv) &= \int_{\{(u,v):u\ne v\}} d(u,v)\frac{v_1(du)\times v_2(dv)}{1-\gamma}+\int_{\{(u,v):u=v\}} d(u,v)Q(du,dv) \\
&= \int_{\{(u,v):u\ne v\}} d(u,v)\frac{v_1(du)\times v_2(dv)}{1-\gamma}+0 \\
&= \int_{\{(u,v):u\ne v\}} d(u,v)\frac{(1-\gamma)\times(1-\gamma)}{1-\gamma} \\
&= \int_{\{(u,v):u\ne v\}} d(u,v)(1-\gamma)=1-\gamma.
\end{aligned}
$$

引理获证.

引理 2.5 设 $\mu_1(t,x,dx),\mu_2(t,y,dy)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的任意概率测度, $\mu(t;x,y;du,dv)$ 是 $\mu_1(t,x,du)$ 与 $\mu_2(t,y,dv)$ 的耦合, 则有

$$
\|\mu_1(t,x,du)-\mu_2(t,y,dv)\|_f \le \int d(u,v)[f(u)+f(v)]\mu(t;x,y;du,dv). \tag{2.2}
$$

证明 令 $|g|\le f$, 则有 $g(u)-g(v)\le\varphi(u,v)$. 于是 $\int g d\mu_1-\int g d\mu_2=\int\mu(t;x,y;du,dv)[g(u)-g(v)]\le\int\mu(t;x,y;du,dv)\varphi(u,v)$. 同理 $\int g d\mu_2-\int g d\mu_1\le\int\mu(t;x,y;du,dv)\varphi(u,v)$, 故有

$$
\left|\int g d\mu_1-\int g d\mu_2\right|\le\int\mu(t;x,y;du,dv)\varphi(u,v).
$$

在上面不等式中, 对 $|g|\le f$ 求上确界, 得 $\|\mu_1-\mu_2\|_f\le\int\mu(t;x,y;du,dv)\varphi(u,v)$. 由 $\varphi(u,v)$ 的定义知 (2.2) 式得证.

定义 2.6 设 $\{P(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 Ψ 不可约连续时间 Markov 过程, $A\in\mathscr{B}(X)$, 称 A 为满集, 若 $\Psi(A^c)=0$. 称 A 为吸收集, 若 $\forall\, x\in A$, $P(t,x,A)=1$.

显然, 若 A 和 B 都是 Ψ 不可约的连续时间 Markov 过程 $\{P(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 的满集, 则 $A\cap B$ 也是 Φ 的满集. 由文献 [8, 定理 2.2.6] 易知, 对 Ψ 不可约的连续时间 Markov 过程 $\{P(t), t\in\mathbb{R}_+\}$, 若存在唯一平稳分布 π, 则 $\Psi(A^c)=0$ 与 $\pi(A^c)=0$ 等价.

引理 2.7 [8] 假设连续时间 Markov 过程 $\{P(t), t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 Ψ 不可约的, 则

(i) 每个非空吸收集都是满集.

(ii) 每个满集包含一个满的吸收集.

证明 证明见文献 [8, 命题 2.2.8]. 证毕.

引理 2.8 对转移概率 P 和一广义实值函数 $W: X\to[0,\infty]$, 若 $PW(x)=0$, 则 $S_W=\{x: W(x)=0\}$ 是满集.

证明 $PW(x)=\int P(x,dy)W(y)=\int_{S_W}P(x,dy)W(y)+\int_{S_W^c}P(x,dy)W(y)$.

若 $PW(x)=0$, 假设 $P(x,S_W^c)\neq 0$, 则 $\int_{S_W^c}P(x,dy)W(y)\neq 0$. 又由于 $\int_{S_W}P(x,dy)W(y)=0$, 得到 $PW(x)\neq 0$. 与题设相矛盾, 假设错误. 故 $P(x,S_W^c)=0$, $x\in S_W$. 从而 $S_W=\{x: W(x)=0\}$ 是吸收集, 由引理 2.7 知它也是满集. 证毕.

3 主要结果的证明

由引理 2.4 可得 $\|P(t,x,du)-\pi(dv)\|=2\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)$, 其中 $\overline{P}(t;x,y;du,dv)$ 为 $P(t,x,du)$ 与 $\pi(dv)$ 的基本耦合. 又由条件 $P(t)$ 是遍历 Markov 过程知, $\forall\, x\in X$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\|P(t,x,du)-\pi(dv)\|=0, \tag{3.1}$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)=0. \tag{3.2}$$

又由条件存在 $\pi(f)<\infty$, 知

$$\int\pi(dx)f(u)\left[\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)\right]=0, \tag{3.3}$$

即

$$\int\pi(dx)\left[\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(u)\right]=0. \tag{3.4}$$

若记 $A=\{x\in X: \lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(u)=0\}$, 则由引理 2.8 得 $\pi(A)=1$. 等价地 $\Psi(A)=1$. 因此 $\forall\, x\in A$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(u)=0. \tag{3.5}$$

类似地, 存在集合 B, 使得 $\Psi(B)=1$, 因此 $\forall\, x\in B$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(v)=0, \tag{3.6}$$

则 $\forall\, x\in A\cap B$, (3.5), (3.6) 同时成立.

由引理 2.5 得

$$\|P(t,x,du)-\pi(dv)\|_f \leq \int d(u,v)[f(u)+f(v)]\overline{P}(t;x,y;du,dv). \tag{3.7}$$

从而有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|P(t,x,du)-\pi(dv)\|_f &\leq \lim_{t\to\infty}\int d(u,v)[f(u)+f(v)]\overline{P}(t;x,y;du,dv)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(u)\\ &\quad+\lim_{t\to\infty}\int d(u,v)\overline{P}(t;x,y;du,dv)f(v). \end{aligned}\tag{3.8}$$

由 (3.5), (3.6), (3.8) 式, 即得 $\forall x\in A\cap B$, $\lim_{t\to\infty}\|P(t,x,\cdot)-\pi(\cdot)\|_f=0$.

注 1 定理的条件 $\pi(f)<\infty$ 还可以改成另外的几种表示, 见下面的引理 3.1.

引理 3.1 [8] 设跳过程 $\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 是 Harris 常返的, $f\geq 1$ 是 X 上的可测函数, 则下面条件等价:

(1) 跳过程 $\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 是正 Harris 常返的且 $\pi(f)<\infty$.

(2) 条件 (C) 成立且 $\sup_{x\in C}E_x[\int_0^{\tau_C}f(X_t)dt]<\infty$.

(3) 条件 (C) 成立且 $\sup_{x\in C}E_x[\int_0^{\tau_C(\delta)}f(X_t)dt]<\infty$.

(4) 存在闭的 q 细集 C, 且 $\inf_{x\in C}q(x)>0$, 常数 $b<\infty$, 至少有一点 x_0 处有限的函数 V, 满足漂移条件 (DJ_3).

(5) 存在一个闭的 (f,q) 正则集 $C\in\mathscr{B}(X)$, 且 $\inf_{x\in C}q(x)>0$.

(6) 存在一个满的吸收集 S, 且 S 能被可数个 f 正则集覆盖.

注 2 (1) 条件 (C): $C\in\mathscr{B}(X)$ 是跳过程的细集, 且 $0<\inf_{x\in C}q(x)\leq\sup_{x\in C}q(x)<\infty$.

(2) 漂移条件 (DJ_3): 集合 $C\in\mathscr{B}(X)$, 常数 $b<\infty$, 可测实值函数 $f:E\to[1,+\infty]$, 广义实值函数 $V:E\to[0,+\infty]$, 42 满足 $\Omega V(x)\leq -f(x)+b\,\mathrm{II}_C(x)$, $\forall x\in X$.

这是文献 [8, 定理 7.2.3].

参考文献

[1] Bowerman B., David H. T., Isaacson D., The convergence of Cesaro averagesfor certain non-stationary Markov chains, *Stachastic Processes and their Applications*, 1977, **5**: 221–230.

[2] Chen M. F., From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems (Second Edition), World Scientific, SingaPore, 2004.

[3] Chung K. L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2nd, Springer-Verlang, Berlin, 1967.

[4] Cinlar E., Introduction to Stochastic Processes, Courier Corporation, 2013.

[5] Gong G. L., Qian M. P., A course in appied stochastic processes and stochastic models in algorithms and intelligence computation, Beijing, Tsinghua University Press, Beijing, 2004.

[6] Lindvall T., Lectures on the Coupling Method, Wiley, New York, 1992.

[7] Meyn S. P., Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, Springer Verlag, London, 1992.

[8] Tweedie R. L., Drift conditions and invariant measures for markov chains without irreducibility or continuity conditions, *Stochastic Process Appl.*, 2001, **92**: 345–354.

[9] Wang Z. K., Birth and Death Processes and Markov Chains (in Chinese), Science Press, Beijing, 1980.

[10] Zhu Z. F., Zhang S. Y., Study on f-exponential ergodicity of Markov chains by coupling method, *Acta Mathematica Sinica*, 2019, **62**(2): 287–292.

[11] Zhang S. L., Stochastic Stability of General State Space Jump Processes, Doctoral Dissertation of Hubei University, Wuhan, 2014.