第62卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.3
2019年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2019

文章编号: 0583-1431(2019)03-0449-08 **文献标识码: A**

Dirichlet 空间上 Bergman 型 Toeplitz 算子的代数性质

秦 杰 刘柚岐 黄 穗

重庆师范大学数学科学学院 重庆 401331
E-mail: qinjie24520@163.com; itx026@163.com; huangsui2@163.com

摘 要 本文讨论了 Dirichlet 空间上由调和函数诱导的 Bergman 型 Toeplitz 算子的基本性质和代数性质, 包括此类算子的自伴性、乘积性质、交换性及可逆性, 并计算了算子的谱.

关键词 Toeplitz 算子; Dirichlet 空间; 自伴性; 交换性; 可逆性
MR(2010) 主题分类 47B35, 47B47
中图分类 O177.1

Algebraic Properties of Bergman-Type Toeplitz Operators on the Dirichlet Space

Jie QIN You Qi LIU Sui HUANG

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, P. R. China
E-mail: qinjie24520@163.com; itx026@163.com; huangsui2@163.com

Abstract We study preliminary properties and algebraic properties of Bergman-type Toeplitz operators which are induced by harmonic symbols on the Dirichlet space, including self-adjointness, products, commutativity and invertibility. Moreover, the spectra of the Toeplitz operator are calculated.

Keywords Toeplitz operators; Dirichlet space; self-adjointness; commutativity; invertibility
MR(2010) Subject Classification 47B35, 47B47
Chinese Library Classification O177.1

1 引言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面上的单位开圆盘, dA 是 $\mathbb{D}$ 上面积测度. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{D},dA)$ 上

收稿日期: 2018-04-23; 接受日期: 2018-12-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501068); 重庆市教委科研项目 (KJ1600302)
通讯作者: 黄穗

的内积. Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 是由 $\mathbb{D}$ 上满足

$$\|f\|_{L^{2,1}}=\left\{\left|\int_{\mathbb{D}}fdA\right|^2+\int_{\mathbb{D}}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2\right)dA\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty$$

的光滑函数全体构成, 其上内积定义为

$$\langle f,g\rangle_{L^{2,1}}=\int_{\mathbb{D}}fdA\int_{\mathbb{D}}\overline{g}dA+\left\langle\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial g}{\partial z}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial f}{\partial \overline{z}},\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right\rangle.$$

$L^{2,1}$ 是 Hilbert 空间. Dirichlet 空间 $\mathfrak{D}$ 是 $L^{2,1}$ 中在原点取值为 0 的解析函数构成的闭子空间, 因此 $\mathfrak{D}$ 是一个 Hilbert 空间, 其范数为

$$\|f\|_{\mathfrak{D}}=\|f'\|,$$

$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbb{D},dA)$ 中函数的范数. Bergman 空间 L_a^2 是由 $L^2(\mathbb{D},dA)$ 中解析函数构成的闭子空间, 按内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f\overline{g}dA$$

构成 Hilbert 空间.

设 P 是从 $L^2(\mathbb{D},dA)$ 到 L_a^2 上的 Bergman 投影. 如果 $\mathbb{D}$ 上的函数 φ 使得 $\varphi f\in L^2(\mathbb{D},dA)$, $\mathfrak{D}$ 上的 Bergman- 型 Toeplitz 算子 T_φ 定义为:

$$T_\varphi(f)(z)=P(\varphi f)(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\varphi(w)f(w)}{(1-z\overline{w})^2}dA(w),\quad f\in\mathfrak{D},$$

其中 $K(z,w)=\frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}$ 表示 Bergman 空间的再生核.

近几年, 对 Dirichlet 空间上 Toeplitz 的代数性质的研究有着丰富的结果. Duistermaat [1] 通过 $\mathfrak{D}$ 上的调和函数为符号的 Toeplitz 算子的矩阵讨论了这些算子的交换性. Cao [2] 讨论了以 C^1 或 $H^\infty+C^1$ 中函数为符号的 Toeplitz 算子的 Fredholm 性质. Zhao [3] 刻画了调和 Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子的交换性. Lee [4] 给出了有界函数诱导的 Toeplitz 算子交换的充分必要条件是两个符号同时解析或者同时共轭解析或者两个函数与 1 线性相关. Chen [5] 研究了某类满足绝对连续性的函数诱导的 Toeplitz 算子的交换性. Yu [6] 刻画了以 $L^{\infty,1}$ 中的函数为符号的 Toeplitz 算子的交换性. 关于 Toeplitz 算子的乘积及其相关问题也得到了研究 (见文 [7–9]).

本文研究了 Dirichlet 空间上由调和函数诱导的 Bergman 型 Toeplitz 算子的基本性质与代数性质, 包括算子的自伴性、乘积性质、交换性. 特别地, 我们讨论了以解析函数或共轭解析函数诱导的 Toeplitz 算子的可逆性, 并计算了此类算子的谱.

在我们的讨论中, 将应用以下的引理 [5].

引理 1.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的有界调和函数. T_φ 在 $\mathfrak{D}$ 上有界当且仅当 $|\frac{\partial\varphi}{\partial z}|^2dA$ 是 $\mathfrak{D}$-Carleson 测度.

设 $\mathfrak{B}$ 是由 $\mathbb{D}$ 上使得 $|\frac{\partial\varphi}{\partial z}|^2dA$ 是 $\mathfrak{D}$-Carleson 测度的全体有界调和函数构成. 由引理 1.1, 如果 $\varphi\in\mathfrak{B}$, 则 T_φ 在 $\mathfrak{D}$ 上有界.

设 $e_n=\frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ($n\in\mathbb{N}^+$ (正整数集)). 我们知道 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 是 Dirichlet 空间上的一组标准正交基. $\mathfrak{D}$ 上的每个有界线性算子 T 在基 $\{e_n\}$ 下都有其对应的矩阵. T_φ 所对应的矩阵中的元素

$a_{ij} = \langle T_\varphi e_j, e_i \rangle_{\mathfrak{D}}$, $1 \le i, j \le \mathbb{N}^+$. 设 C 是具有以下形式的对角矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & c_3 & & \\ & & & c_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{2} & & & \\ & & \sqrt{3} & & \\ & & & \sqrt{4} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $c_n = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

设 $\varphi \in \mathfrak{B}$, φ 可以表示为

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \varphi_n \overline{z}^{-n}.$$

则 T_φ 对应于基 $\{e_n\}$ 的矩阵为 $CD_\varphi C^{-1}$, 其中

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & \cdots \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \cdots \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \cdots \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

2 Toeplitz 算子的自伴性

众所周知, 在经典的 Hardy 空间和 Bergman 空间上有许多非平凡自伴 Toeplitz 算子. 例如在经典的 Hardy 空间上就有 $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$ $(\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}))$. 但是在 Dirichlet 空间, 一般情况下 $T_\varphi^* \neq T_{\overline{\varphi}}$. 本文通过 T_φ 的矩阵来刻画 T_φ 的自伴性, 反映出 Dirichlet 空间与 Hardy 空间以及 Bergman 空间的不同之处.

引理 2.1 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$. $CD_\varphi C^{-1}$ 表示 T_φ 的矩阵, 则 ${T_\varphi}^*$ 对应的矩阵为 CAC^{-1}, 其中 $A = (C^{-1})^2 D_\varphi^* C^2$ (D_φ^* 表示 D_φ 的共轭转置矩阵).

证明 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$. 由 (1.1) 知 T_φ 在 $\{e_n\}$ 下的矩阵为 $CD_\varphi C^{-1}$. 如果 a_{ij}, b_{ij} 分别是 T_φ, T_φ^* 所对应矩阵中的元素, 则

$$b_{ij} = \langle {T_\varphi}^* e_j, e_i \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle e_j, T_\varphi e_i \rangle_{\mathfrak{D}} = \overline{\langle T_\varphi e_i, e_j \rangle_{\mathfrak{D}}} = \overline{a_{ji}}. \tag{2.1}$$

用 B 表示 T_φ^* 的矩阵. 由 (2.1) 知 $B = (CD_\varphi C^{-1})^* = C^{-1} D_\varphi^* C$, 所以

$$A = (C^{-1})^2 D_\varphi^* C^2 = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_0} & 2\overline{\varphi_1} & 3\overline{\varphi_2} & 4\overline{\varphi_3} & \cdots \\ \frac{1}{2}\overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \frac{3}{2}\overline{\varphi_1} & 2\overline{\varphi_2} & \cdots \\ \frac{1}{3}\overline{\varphi_{-2}} & \frac{2}{3}\overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \frac{4}{3}\overline{\varphi_1} & \cdots \\ \frac{1}{4}\overline{\varphi_{-3}} & \frac{1}{2}\overline{\varphi_{-2}} & \frac{3}{4}\overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

证毕.

定理 2.2 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$, 则 T_φ 自伴当且仅当 φ 是实常值函数.

证明 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$. 如果 $T_\varphi = T_\varphi^*$, 则由引理 1.1, $D_\varphi = (C^{-1})^2 D_\varphi^* C^2$, 所以通过直接计算有 $i\varphi_{i-j} = j\overline{\varphi}_{j-i}$, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^+$. 如果 $i = j \in \mathbb{N}^+$, 则 $\varphi_0 = \overline{\varphi_0}$. 如果 $i \neq j$, 令 $k = i - j$, 则对任意 $j \in \mathbb{N}^+$, $\varphi_k = \frac{j}{j+k}\overline{\varphi}_{-k}$. 因此, $\varphi_{-k} = 0$, 从而 $\varphi_k = 0$. 故 φ 是实常值函数.

反之, 若 φ 为实常值函数, 则 T_φ 显然自伴. 证毕.

由定理 2.2 可知, 在 $\mathfrak{D}$ 上无非平凡的自伴 Toeplitz 算子. 实际上一般情况下, T_φ^* 不是 Toeplitz 算子, 所以我们讨论了 $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$ 的充分必要条件.

引理 2.3 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$, T_φ 的矩阵是 $CD_\varphi C^{-1}$, 则 $T_{\overline{\varphi}}$ 的矩阵是 $CD_\varphi^* C^{-1}$.

证明 因为 $\varphi \in \mathfrak{B}$, 设 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \varphi_n \overline{z}^{-n}$, 则

$$\overline{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi}_n \overline{z}^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \overline{\varphi_n} z^{-n}.$$

记 a'_{ij} 是 $T_{\overline{\varphi}}$ 矩阵中的元素, 那么

$$a'_{ij} = \langle T_{\overline{\varphi}} e_j, e_i \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle \overline{\varphi} e_j, e_i \rangle_{\mathfrak{D}} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{j}} \overline{\varphi_{j-i}}.$$

因此, $T_{\overline{\varphi}}$ 的矩阵为 $CD_\varphi^* C^{-1}$. 证毕.

定理 2.4 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$. $T_\varphi{}^* = T_{\overline{\varphi}}$ 当且仅当 φ 是常值函数.

证明 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$, 由引理 2.1 可知, T_φ^* 的矩阵为 $C(C^{-1})^2 D_\varphi^* C^2 C^{-1}$. 由引理 2.3, $T_{\overline{\varphi}}$ 的矩阵为 $CD_\varphi^* C^{-1}$, 其中

$$D_\varphi{}^* = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_0} & \overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2} & \overline{\varphi_3} & \cdots \\ \overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2} & \cdots \\ \overline{\varphi_{-2}} & \overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \overline{\varphi_1} & \cdots \\ \overline{\varphi_{-3}} & \overline{\varphi_{-2}} & \overline{\varphi_{-1}} & \overline{\varphi_0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

$T_\varphi{}^* = T_{\overline{\varphi}}$ 当且仅当对任意 $i, j \in \mathbb{N}^+$,

$$\overline{\varphi}_{j-i} = \frac{j}{i} \overline{\varphi}_{j-i}.$$

如果 $i \neq j$, 由上式可得 $\varphi_{j-i} = 0$. 因此 φ 是常值函数. 反之易得. 证毕.

定理 2.5 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$, 则 T_φ 幂等当且仅当 φ 幂等当且仅当 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = 1$.

证明 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$. 如果 T_φ 幂等, 即 $T_\varphi^2 = T_\varphi$, 则 $D_\varphi^2 = D_\varphi$, 从而 T_φ^2 的矩阵为 $CD_\varphi^2 C^{-1}$. 记 a_{ij}、b_{ij} 分别为 D_φ、D_φ^2 对应矩阵中的元素, 则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i-k} \varphi_{k-j} = a_{ij}, \quad \forall\, i, j \geq 1. \tag{2.4}$$

同理

$$b_{i+1,j+1} = \varphi_i \varphi_{-j} + b_{ij} = a_{i+1,j+1}. \tag{2.5}$$

因为 $b_{ij} = b_{i+1,j+1}$, $a_{ij} = a_{i+1,j+1}$, 所以 $\varphi_i \varphi_{-j} = 0$, $i, j \geq 1$. 因此 φ 解析或共轭解析. 设 φ 解析, 由 (1.1) 知

$$b_{ij} = \varphi_{i-j} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i-k} \varphi_{k-j} = \begin{cases} 0, & i < j; \\ \displaystyle\sum_{k=j}^{i} \varphi_{i-k} \varphi_{k-j}, & i \geq j. \end{cases} \tag{2.6}$$

事实上, 如果 $i<j$, 则

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{i-k}\varphi_{k-j}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{j}\varphi_{i-k}\times 0, & k<j,\\ \sum\limits_{k=j}^{\infty}0\times\varphi_{k-j}, & k\geq j.\end{cases}$$

因此我们仅考虑 $i\geq j$ 时的 b_{ij}. 记 $m=i-j$, 由 (2.6) 有

$$\varphi_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{m-k}\varphi_k. \tag{2.7}$$

由 (2.7) 有

$$\varphi_0=\varphi_0^2,\quad \varphi_1=2\varphi_0\varphi_1,\quad \varphi_2=2\varphi_2\varphi_0+\varphi_1^2,\dots. \tag{2.8}$$

由 (2.8) 可得 $\varphi_0=0$ 或 $\varphi_0=1$. 如果 $\varphi_0=0$, 则对 $n\geq 0$ 有 $\varphi_0=\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=0$; 如果 $\varphi_0=1$, 则对 $n>0$ 有 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=0$. 因此 φ 幂等.

如果 φ 是共轭解析的, 其证明是类似的. 反之显然. 证毕.

推论 2.6 设 $\varphi\in\mathfrak{B}$. $T_\varphi^2=0$ 当且仅当 $\varphi=0$.

证明 显然. 证毕.

3 Toeplitz 算子的乘积

本节主要考虑两个 Toeplitz 算子的乘积何时仍为 Toeplitz 算子. 首先有以下引理.

引理 3.1 设 φ,ψ 是 $\mathfrak{B}$ 中的共轭解析函数, 则 $T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=T_{\varphi\psi}$, 并且存在共轭解析函数 μ, 使得 $T_{\varphi\psi}=T_\mu$, 此时 $\mu=\varphi\psi$.

证明 设 φ,ψ,μ 是 $\mathfrak{B}$ 中的共轭解析函数. 为了证明 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}=T_\mu$, 设 $\varphi(z)=\overline{z}^n$, $\psi(z)=\overline{z}^m$, $f(z)=z^j$. 通过直接计算,

$$\begin{aligned}T_\psi(f)(z)=P(\psi f)(z)&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r^m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}r^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}}{\pi(1-zr\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^2}drd\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{m+j+1}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(j-m+2)}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-rz)^2}d\theta dr\\&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_0^1 r^{m+j+1}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\zeta^{j-m+1}}{(\zeta-rz)^2}d\zeta dr.\end{aligned}$$

因为当 $j-m\geq 0$ 时, $\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\zeta^{j-m+1}}{(\zeta-rz)^2}d\zeta=2\pi\mathrm{i}(j-m+1)(rz)^{j-m}$, 其余情况为 0. 因此

$$(T_\psi f)(z)=2(j-m+1)(rz)^{j-m}\int_0^1 r^{2j+1}dr=\begin{cases}\dfrac{j-m+1}{j+1}z^{j-m}, & j\geq m\\ 0, & j<m.\end{cases}$$

从而可得

$$(T_\varphi T_\psi f)(z)=\begin{cases}0, & j-m-n<0;\\ \dfrac{j-m-n+1}{j-m+1}\dfrac{j-m+1}{j+1}z^{j-m-n}, & j-m-n\geq 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

又因为

$$T_{\psi\varphi}(f)(z)=\begin{cases}0, & j-m-n<0;\\ \dfrac{j-m-n+1}{j+1}z^{j-m-n}, & j-m-n\geq 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

由 (3.1) 和 (3.2) 计算可得

$$T_{\varphi}T_{\psi}f=P(\overline{z}^nP(\overline{z}^mf))=T_{\varphi\psi}f=P(\overline{z}^n\overline{z}^mf).$$

设 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{-n}\overline{z}^n$, $\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{-m}\overline{z}^m$, 我们需要证明 $P(\varphi P(\psi f))=P(\varphi\psi f)$. 注意到

$$P(\varphi P(\psi f))=P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{-n}\overline{z}^nP\left(\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{-m}\overline{z}^mf\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{-m}P(\overline{z}^nP(\overline{z}^mf)).$$

因为 $P(\overline{z}^nP(\overline{z}^mf))=P(\overline{z}^n\overline{z}^mf)$, 所以 $P(\varphi P(\psi f))=P(\varphi\psi f)$, 也就是 $T_\psi T_\varphi=T_{\varphi\psi}$. 令 $\mu=\varphi\psi$, 则 $T_{\varphi\psi}=T_\mu$. 证毕.

定理 3.2 设 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$, 则 $T_\varphi T_\psi$ 是 Toeplitz 算子当且仅当 φ 共轭解析或 ψ 解析.

证明 设 D_φ, D_ψ 分别是公式 (2.1) 中 φ,ψ 对应的矩阵, 那么 $T_\varphi T_\psi$ 在基 $\{e_n\}$ 下的矩阵为 $CD_\varphi D_\psi C^{-1}$. 记 a_{ij} 是 $D_\varphi D_\psi$ 中的元素, 则 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{i-k}\psi_{k-j}$. 如果 $T_\varphi T_\psi$ 是一个 Toeplitz 算子, 则 $a_{i+1,j+1}=a_{ij}$. 而 $a_{i+1,j+1}=\varphi_i\psi_{-j}+a_{ij}$, 所以 $\varphi_i\psi_{-j}=0$ $(i,j\in\mathbb{N}^+)$. 因此, φ 共轭解析或 ψ 解析.

反之, 如果 ψ 解析, 显然 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}$. 如果 φ 共轭解析, 记 $\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_mz^m+\sum_{m=-\infty}^{-1}\psi_m\overline{z}^{-m}$. 又记 $\psi_+(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_mz^m$, 则 $\psi=\psi_-+\psi_+$. 注意到

$$T_\varphi T_{\psi_-+\psi_+}=T_\varphi T_{\psi_-}+T_\varphi T_{\psi_+}.$$

由引理 2.1 可知 $T_\varphi T_{\psi_-}=T_{\varphi\psi_-}$, 因此

$$T_\varphi T_{\psi_-}+T_\varphi T_{\psi_+}=T_{\varphi\psi_-}+T_{\varphi\psi_+}=T_{\varphi\psi}.$$

证毕.

推论 3.3 设 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$. $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}$ 当且仅当 φ 共轭解析或 ψ 解析.

定理 3.4 设 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$. $T_\varphi T_\psi=0$ 当且仅当 $\varphi=0$ 或 $\psi=0$.

证明 如果 $T_\varphi T_\psi=0$, 则 φ 共轭解析或 ψ 解析. 考虑以下两种情况:

(a) φ 调和, ψ 解析;

(b) φ 共轭解析, ψ 调和.

如果 (a) 成立, 则 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}=0$. 因为 $T_{\varphi\psi}f=T_\varphi(\psi f)=0$, 则 $T_\varphi=0$ 或 $\psi=0$, 因此 $\varphi=0$ 或 $\psi=0$.

如果 (b) 成立, 设 $\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\varphi_n\overline{z}^{-n}$, $\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_mz^m+\sum_{n=-\infty}^{-1}\psi_m\overline{z}^{-m}$. 令 a_{ij} 是矩阵 $D_\varphi D_{\psi_+}$ 中的元素, 设 $l=i-j\in\mathbb{Z}$ (整数集), 因此有

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}\psi_{k+l}=0. \tag{3.3}$$

通过计算,

$$(\varphi\psi)(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=-\infty}^{-1}\varphi_n\psi_m\overline{z}^{-m-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_n\psi_m\overline{z}^{-n}z^m. \tag{3.4}$$

如果令 $l=m+n$, 则由 (3.4) 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=-\infty}^{-1}\varphi_n\psi_m\overline{z}^{-m-n}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}\psi_{l+k}\overline{z}^l$$

和

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_n\psi_m\overline{z}^{-n}z^m=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}\psi_{l+k}\overline{z}^kz^{l+k}.$$

利用 (3.3) 和 (3.4) 有 $\varphi\psi|_{\mathbb{T}}=0$. 那么如果 φ 是非零共轭解析函数, 则在单位圆周上几乎处处有 $\psi=0$. 由极大模原理在 $\mathbb{D}$ 上有 $\psi=0$. 同理, 如果 ψ 是非零解析函数, 则在 $\mathbb{D}$ 上有 $\varphi=0$. 反之显然. 证毕.

定理 3.5 设 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$. 如果 $T_\varphi T_\psi=I$, 则 $\psi\varphi|_{\mathbb{T}}=1$.

证明 此证明类似于定理 3.4. 如果 $T_\varphi T_\psi=I$, 则 φ 共轭解析或 ψ 解析. 考虑两种情况:

(a) φ 调和, ψ 共轭解析;

(b) φ 共轭解析, ψ 调和.

如果 (a) 成立, 设 D_φ, D_ψ 是 φ, ψ 对应于公式 (1.1) 中的矩阵, $T_\varphi T_\psi$ 在基 $\{e_n\}$ 下的矩阵为 $CD_\varphi D_\psi C^{-1}$. 设 a_{ij} 是 $D_\varphi D_\psi$ 中的元素, 则 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{i-k}\psi_{k-j}$. 设 $\nu=i-j$ $(i,j\in\mathbb{N}^+)$. 因为 ψ 是解析的, 所以有

$$\begin{aligned}a_{ij}=\mu_\nu=\mu_i-j&=\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_{\nu-l}\psi_l\\&=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_{-l}\psi_l, & \nu=i-j=0\\ 0, & \nu=i-j\neq0\end{cases}\\&=\begin{cases}1, & \nu=i-j=0;\\ 0, & \nu=i-j\neq0.\end{cases}\end{aligned}$$

注意到

$$S_\nu=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_{\nu-l}\psi_l\overline{z}^{l-\nu}z^l, & \nu<0;\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\nu}\varphi_{\nu-l}\psi_lz^v+\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\varphi_{\nu-l}\psi_l\overline{z}^{l-v}z^l, & \nu\geq0,\end{cases}\tag{3.5}$$

则

$$S_\nu|_{\mathbb{T}}=\begin{cases}1, & \nu=0;\\ 0, & \nu\neq0.\end{cases}$$

为了证明 $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}S_\nu=\varphi\psi$, 注意到

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{-n}\overline{z}^n,\quad \psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_mz^m.$$

因此

$$\varphi\psi=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\psi_mz^{m+n}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{-n}\psi_m\overline{z}^nz^m=A+B+C,\tag{3.6}$$

其中

$$A=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\nu}\varphi_{\nu-l}\psi_l z^{\nu},\quad B=\sum_{\nu=-\infty}^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_{\nu-l}\psi_l\overline{z}^{l-\nu}z^l,\quad C=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\varphi_{\nu-l}\psi_l\overline{z}^{l-\nu}z^l.$$

由 (3.5) 知 $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}S_\nu|_{\mathbb{T}}=\varphi\psi|_{\mathbb{T}}=1$.

如果 (b) 成立, 可以用类似的方法得到相同的结果. 证毕.

定理 3.6 设 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$, 则 $T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=I$ 当且仅当 φ, ψ 同时解析或者同时共轭解析, 且 $\varphi\psi=1$.

证明 如果 $T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=I$, 由引理 1.1 和定理 3.2, φ, ψ 同时解析或者同时共轭解析, 且 $\varphi\psi=1$.

反之, 如果 $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$ 是同时解析或者同时共轭解析的, 由引理 3.1 有 $T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=T_{\varphi\psi}=T_1=I$. 证毕.

定理 3.7 设 $\varphi\in\mathfrak{B}$ 是解析或共轭解析的, 则 T_φ 在 $\mathfrak{D}$ 上可逆当且仅当 φ 可逆且 φ,φ^{-1} 同时解析或同时共轭解析, $\sigma(T_\varphi)=\mathfrak{R}(\varphi)$ (($\mathfrak{R}(\varphi)$ 表示 φ 的值)).

证明 不失一般性, 设 $\varphi\in\mathfrak{B}$ 且 φ 解析. 如果 T_φ 可逆, 则存在唯一的 $\psi\in\mathfrak{B}$, 使得

$$T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=I.$$

由定理 3.6 得 ψ 解析, 且 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}=I$. 因此 $\varphi\psi=1$, 从而 φ 可逆.

反之, 设 $\varphi\in\mathfrak{B}$ 且 φ 解析. 如果 φ 可逆且 φ^{-1} 解析, 则

$$T_\varphi T_{\varphi^{-1}}=T_{\varphi\varphi^{-1}}=T_{\varphi^{-1}}T_\varphi=I,$$

故 T_φ 可逆.

最后, $T_\varphi-\lambda=T_{\varphi-\lambda}$, 因此可得 $\sigma(T_\varphi)=\sigma(\varphi)=\mathfrak{R}(\varphi)$. 证毕.

注 3.8 本论文仅讨论了 φ 解析或共轭解析时 T_φ 的可逆性. 如果 φ 是调和函数时, T_φ 可逆的条件是什么? 其逆算子是否仍是 Toeplitz 算子?

参 考 文 献

[1] Brown A., Halmos P. R., Algebraic properties of Toeplitz operators, *J. Reine Angew. Math.*, 2009, **1964**(213): 89–102.
[2] Cao G. F., Fredholm properties of Toeplitz operators on Dirichlet spaces, *Pacific J. Math.*, 1999, **188**(2): 209–224.
[3] Chartrand R., Toeplitz operator on Dirichlet-type space, *J. Operator Theory*, 2002, **48**(1): 3–13.
[4] Chen Y., Commuting Toeplitz operators on the Dirichlet space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **357**(2): 214–224.
[5] Chen Y., Lee Y. J., Nguyen Q. D., Algebraic properties of Toeplitz operators on the harmonic Dirichlet space, *Integral Equ. Oper. Theory*, 2011, **69**(2): 183–201.
[6] Duistermaat J. J., Lee Y. J., Toeplitz operators on the Dirichlet space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **300**(1): 54–67.
[7] Lee Y. J., Algebraic properties of Toeplitz operators on the Dirichlet space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **329**(2): 1316–1329.
[8] Qin J., Huang S., The Bergman-Type Toeplitz Operator on Dirichlet Space, *Acta. Math. Sin. Chin. Ser.*, 2018, **61**(4): 619–624.
[9] Yu T., Toeplitz operator on the Dirichlet space, *Integral Equ. Oper. Theory*, 2010, **67**(2): 163–170.
[10] Zhao L. K., Commutativity of Toeplitz operators on the harmonic Dirichlet space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **339**(2): 1148–1160.