第62卷第3期 数学学报中文版 Vol.62, No.3
2019年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2019

文章编号: 0583-1431(2019)03-0381-10 **文献标识码: A**

关于电磁场方程组解的 $W^{1,p}$ 正则性研究

陈志红 李东升

西安交通大学数学与统计学院 西安 710049
E-mail: zh_chern@163.com; lidsh@mail.xjtu.edu.cn

摘 要 本文研究了 $\mathbb{R}^3$ 中有界区域 Ω 上的电磁场方程组弱解的 $W^{1,p}$ 估计. 该方程组来自于磁场所满足的稳态麦克斯韦方程组. 在假定系数矩阵的逆属于 VMO 空间的条件下, 利用 $\mathbb{R}^3$ 中向量场的旋度和散度的性质, 将该方程组转化为标量椭圆型方程组, 从而根据椭圆型方程组的正则性理论, 得到解的 $W^{1,p}$ 估计, 其中 $1 < p < \infty$.

关键词 $W^{1,p}$ 正则性; 麦克斯韦方程; VMO 系数
MR(2010) 主题分类 35D30, 35B65, 35Q60
中图分类 O175.23

On $W^{1,p}$ Regularity of A System Arising from Electromagnetic Fields

Zhi Hong CHEN Dong Sheng LI

School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China
E-mail: *zh_chern@163.com*; *lidsh@mail.xjtu.edu.cn*

Abstract We establish the fundamental $W^{1,p}$ estimate for the weak solution of a system in a bounded domain Ω in $\mathbb{R}^3$. The system is related to the steady-state of Maxwell's equations for the magnetic field. The inverse of the principle coefficient matrix is assumed to be in the VMO space. We transform the system to scalar elliptic equations by using the properties of curl and divergence of vector fields in $\mathbb{R}^3$. By the regularity theory of elliptic equations, we get the $W^{1,p}$ estimate for $1 < p < \infty$.

Keywords $W^{1,p}$ regularity; Maxwell's equation; VMO coefficients
MR(2010) Subject Classification 35D30, 35B65, 35Q60
Chinese Library Classification O175.23

收稿日期: 2018-03-19; 接受日期: 2018-10-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671316)

1 引言及主要结论

本文研究了以下方程组的 $W^{1,p}$ 正则性问题:

$$\begin{cases}\nabla\times(A(x)\nabla\times u)=f+\nabla\times g, & \Omega,\\ \nabla\cdot u=h, & \Omega,\\ u=0, & \partial\Omega,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个有界闭区域, $A(x)\in L^\infty(\Omega)$ 是一个 3×3 矩阵. 此外, 我们假设:

(H1) $A(x)$ 为一致正定矩阵, 即存在一个常数 $0<\lambda<1$, 使得对任意的 $\xi\in\mathbb{R}^3$, 都有下面的不等式成立:

$$\lambda|\xi|^2\le(A(x)\xi)\cdot\xi\le\lambda^{-1}|\xi|^2.$$

(H2) $A^{-1}(x)\in\mathrm{VMO}(\Omega)$. 对此假设, 我们有如下定义.

定义 1.1 [13] 设 $A^{-1}(x)\in\mathrm{BMO}(\Omega)$, 且

$$\eta(r)=\sup_{\varrho\le r}\sup_{x\in\Omega}\frac{1}{|B_\varrho|}\int_{B_\varrho(x)}\left|A^{-1}(y)-\overline{A^{-1}_{B_\varrho(x)}}\right|dy,$$

其中 $B_\varrho(x)\subset\Omega$ 是以 x 为球心, 半径为 $\varrho>0$ 的开球, $\overline{A^{-1}_{B_\varrho}}$ 定义为 A^{-1} 在 B_ϱ 上的积分平均. 如果 $\lim_{r\to0}\eta(r)=0$, 那么我们称 $A^{-1}(x)$ 属于 $\mathrm{VMO}(\Omega)$, η 为 A^{-1} 的 VMO 连续模量.

研究方程组 (1.1) 的兴趣来自于电磁场的麦克斯韦方程组. 令 E 和 H 分别为连通域 Ω 上的电场和磁场, 我们就有下面著名的麦克斯韦方程组 [10]:

$$\begin{cases}\varepsilon E_t+\sigma E=\nabla\times H,\\ \mu H_t+\nabla\times E=F,\\ \nabla\cdot H=0,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 ε 为电场的介电常数, μ 为磁场的磁导率, σ 为材料的导电率.

当材料为导体时, 相比于涡流 σE, 电位移 εE_t 会很小, 可以忽略不计. 因此方程组 (1.2) 可简化为:

$$\begin{cases}\mu H_t+\nabla\times(1/\sigma\nabla\times H)=F,\\ \nabla\cdot H=0.\end{cases}\tag{1.3}$$

文 [16] 对该方程组进行了探讨, 得到了弱解的存在唯一性. 若仅考虑方程组 (1.3) 的稳态情况, 就会得到方程组 (1.1). 本文假设 "$\nabla\cdot u=h$" 以得到更广泛的应用, 读者可参考文献 [4, 8, 10, 15] 进一步了解 (1.1) 和麦克斯韦方程组之间的关系.

由于方程组 (1.1) 具有与椭圆型方程组 [9] 不同的结构, 因此需要对它的正则性问题进行新的研究. 利用 Campanato 空间的性质, 在 $A(x)$ 为正有界标量函数的假设下, 很多学者对方程组 (1.1) 弱解的 Hölder 连续性进行了研究. 在文 [8] 中, 作者得出了局部的 Hölder 连续性 (亦可见文 [15]). 之后, 文 [7] 得到了全局的 Hölder 连续性. 本文得到了方程组 (1.1) 弱解的 $W^{1,p}$ 正则性估计. 在给定 $A(x)$ 和 Ω 的假设条件下, 利用 $\mathbb{R}^3$ 中向量场的旋度和散度的性质, 可以将方程组 (1.1) 转化为标量椭圆型方程组, 这样, 就可以应用椭圆型方程组的正则性理论, 得出本文的如下主要定理.

定理 1.2 设 $1<p<\infty$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为具有 C^1 边界的有界单连通区域. 假设 (H1) 和 (H2) 成立, $f\in L^{3p/(3+p)}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $g\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 同时 $h\in L^p(\Omega)$ 且 $\int_\Omega h=0$. 若 $u\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 为 (1.1) 的弱解, 则 $u\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 且

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le C(\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}+\|h\|_{L^p(\Omega)}),\tag{1.4}$$

其中 C 依赖于 λ,Ω,p 和 A^{-1} 的 VMO 连续模量.

2 一些已知结论

下面给出的一些已知结论会被应用在定理 1.2 的证明过程中. Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

引理 2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为具有 C^1 边界的有界单连通区域. 假设 (H1) 成立, $f,g\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 同时 $h\in L^2(\Omega)$ 且 $\int_\Omega h=0$. 那么, 方程组 (1.1) 有唯一弱解 $u\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 且有估计

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|h\|_{L^2(\Omega)}),\tag{2.1}$$

其中 C 仅依赖于 λ 和 Ω.

证明 方程组 (1.1) 弱解的唯一性证明, 可以参考文 [7]. 这里只给出存在性的证明, 证明的方法是利用 Lax-Milgram 定理 [5].

设 $u=v+w$, 且 v 满足下面散度型方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot v=h, & \Omega,\\ v=0, & \partial\Omega.\end{cases}\tag{2.2}$$

由文 [3, 第三章] 可知, 此方程存在一个 $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 弱解, 且有下列估计

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\le C\|h\|_{L^2(\Omega)},\tag{2.3}$$

其中常数 C 仅依赖于 Ω.

根据方程组 (1.1), 可知 w 满足下面的方程组

$$\begin{cases}\nabla\times(A(x)\nabla\times w)=f+\nabla\times(g-A(x)\nabla\times v), & \Omega,\\ \nabla\cdot w=0, & \Omega,\\ w=0, & \partial\Omega.\end{cases}\tag{2.4}$$

那么, 我们可以定义双线性型泛函 $a(\cdot,\cdot)$: 对任意的 $w,\mu\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$a(w,\mu)=\int_\Omega(A(x)\nabla\times w)\cdot(\nabla\times\mu)dx+\int_\Omega\lambda(\nabla\cdot w)(\nabla\cdot\mu)dx,$$

其中 λ 为 (H1) 中的常数. 由此, 方程组 (2.4) 的弱解可定义为: 对任意的 $\mu\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}a(w,\mu)&=(f+\nabla\times(g-A(x)\nabla\times v),\mu)\\&=\int_\Omega(f\cdot\mu+g\cdot\nabla\times\mu)dx-\int_\Omega(A(x)\nabla\times v)\cdot(\nabla\times\mu)dx.\end{aligned}$$

由假设条件 (H1) 可知: 对任意的 $w\in H_0^1(\Omega)$,

$$a(w,w)\ge\lambda\int_\Omega(|\nabla\times w|^2+|\nabla\cdot w|^2)dx=\lambda\int_\Omega|\nabla w|^2dx.$$

再由 Poincaré 不等式, 易知

$$a(w,w) \geq C\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

即双线性型泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 在 $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 中是强制的.

另一方面, 易知

$$|a(w,\mu)| \leq \lambda^{-1}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mu\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)}\|\mu\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

同时, 我们有

$$|(f+\nabla\times(g-A(x)\nabla\times v),\mu)| \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)})\|\mu\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

因此, 应用 Lax-Milgram 定理可以得到方程组 (2.4) 弱解的存在唯一性, 且

$$\|w\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.5}$$

所以, 我们可以得出方程组 (1.1) 弱解的存在性. 综合 (2.3), (2.5) 和 Poincaré 不等式, 可以得到估计

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|h\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.6}$$

其中 C 仅依赖于 λ 和 Ω. 证毕.

引理 2.2 (文 [2, 定理 1]) 设 Ω 为具有 C^1 边界的有界区域, $f\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 且 $1<p<\infty$. 假设 $B(x)=(b_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq 3}$, 且存在 $\delta>0$ 使得

$$\begin{cases}\delta^{-1}|\xi|^2 \leq b_{ij}\xi_i\xi_j \leq \delta|\xi|^2,\\ b_{ij}\in \mathrm{VMO}(\Omega).\end{cases}$$

那么, 下列方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot(B\nabla u)=\nabla\cdot f, & \Omega,\\ n\cdot(B\nabla u)=n\cdot f, & \partial\Omega\end{cases}$$

有唯一解 (仅差一个常数), 且有下面的估计

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.7}$$

其中 C 依赖于 δ,p,Ω 和 B 的 VMO 连续模量.

引理 2.3 (文 [14, 定理 2.2]) 设 $\Omega\in\mathbb{R}^3$ 为具有 C^1 边界的连通区域. 若 $f\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 且 $\nabla\cdot f=0$, 其中 $1<p<\infty$, 则存在 $h\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 使得 $\nabla\times h=f$. 进一步可得 $\nabla\cdot h=0$ 且 $\|h\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$, 其中 C 仅依赖于 p 和 Ω.

引理 2.4 [6] 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中有界连通的 Lipschitz 区域. 假设 $u\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 且满足 $\nabla\times u=0$. 那么存在 $g\in H^1(\Omega)$, 使得 $u=\nabla g$.

3 定理 1.2 的证明

为了证明定理 1.2, 我们先证明引理 3.1. 该引理说明向量 u 的每个分量都满足一个椭圆型方程组, 其证明思路可以参考文献 [1, 11, 12].

引理 3.1 设 Ω 为具有 C^1 边界的有界区域. 假设 (H1) 和 (H2) 成立, $f,g \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 同时 $h \in L^2(\Omega)$ 且 $\int_\Omega h = 0$. 若 $u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 为方程 (1.1) 的一个弱解. 那么存在两个函数 $\mu \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 和 $\rho \in H^1(\Omega)$, 使得对任意的 $k=1,2,3$, u_k 都为下面方程的弱解

$$\begin{cases}\Delta u_k = \nabla\cdot(e_k\times(A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))+he_k), & \Omega,\\ u_k=0, & \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.1}$$

即对任意的 $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, u_k 满足

$$\int_\Omega u_k\Delta\varphi dx = -\int_\Omega (e_k\times(A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))+he_k)\cdot\nabla\varphi dx, \tag{3.2}$$

其中 e_k 为第 k 个方向的单位向量.

证明 该引理证明分为 3 步.

首先, 由方程组 (1.1) 可知:

$$\nabla\cdot f = 0.$$

由 $f\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 根据引理 2.3 可知, 存在 $\mu\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, 使得

$$\nabla\times\mu = f. \tag{3.3}$$

于是, 方程组 (1.1) 的第一个方程可化为:

$$\nabla\times(A(x)\nabla\times u - g - \mu) = 0.$$

根据引理 2.4, 存在 $\rho\in H^1(\Omega)$, 使得

$$A(x)\nabla\times u - g-\mu = \nabla\rho.$$

那么

$$\nabla\times u = A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho). \tag{3.4}$$

其次, 对等式 (3.4) 两边同乘 ϕe_i, 其中 ϕ 属于 $H_0^1(\Omega)$, $i=\{1,2,3\}$. 再运用分部积分, 可得

$$\int_\Omega u\cdot\nabla\times(\phi e_i)dx = \int_\Omega \phi(A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))\cdot e_i dx. \tag{3.5}$$

利用等式

$$\nabla\times(\phi e_i) = \phi\nabla\times e_i + \nabla\phi\times e_i = \nabla\phi\times e_i,$$

可得

$$\int_\Omega u\cdot(\nabla\phi\times e_i)dx = \int_\Omega \phi(A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))\cdot e_i dx,$$

即

$$\int_\Omega u\times\nabla\phi dx = \int_\Omega \phi A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)dx, \tag{3.6}$$

其中利用了等式 $a\cdot(b\times c) = c\cdot(a\times b)$.

最后, 我们对等式 (3.6) 两边同时与 e_k 做向量积, 与 e_i 做数量积, k 和 i 可取 $\{1,2,3\}$. 利用等式 $a\times(b\times c) = (a\cdot c)b-(a\cdot b)c$, 可得

$$\int_\Omega (u_iD_k\phi - u_kD_i\phi)dx = e_i\cdot\int_\Omega \phi e_k\times(A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))dx. \tag{3.7}$$

取 $\phi = D_i\varphi$ 且 $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, 可得

$$\int_\Omega (D_k(D_i\varphi)u_i - u_k D_i(D_i\varphi))dx = \int_\Omega (D_i\varphi)e_i \cdot (e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho))dx.$$

对 i 求和

$$\int_\Omega u \cdot D_k(\nabla\varphi)dx - \int_\Omega u_k \Delta\varphi dx = \int_\Omega e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)) \cdot \nabla\varphi dx,$$

即

$$\int_\Omega u_k \Delta\varphi dx = \int_\Omega u \cdot \nabla(D_k\varphi)dx - \int_\Omega e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)) \cdot \nabla\varphi dx. \tag{3.8}$$

另一方面, 根据方程组 (1.1) 的 $\nabla \cdot u = h$, 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \cdot \nabla(D_k\varphi)dx &= \int_\Omega \nabla \cdot (uD_k\varphi)dx - \int_\Omega (\nabla \cdot u)D_k\varphi dx \\ &= \int_{\partial\Omega} n \cdot (uD_k\varphi)dx - \int_\Omega he_k \cdot \nabla\varphi dx \\ &= -\int_\Omega he_k \cdot \nabla\varphi dx,\end{aligned}$$

其中 $k = 1,2,3$. 所以, 等式 (3.8) 可化为

$$\int_\Omega u_k \Delta\varphi dx = -\int_\Omega e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)) \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega he_k \cdot \nabla\varphi dx,$$

即

$$\int_\Omega \Delta u_k \varphi = \int_\Omega \nabla \cdot (e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)) + he_k)\varphi. \tag{3.9}$$

因为 u_k 与 u 满足相同的边界条件, 可得 $u_k = 0$ 在 $\partial\Omega$. 证毕.

现在可以给出定理 1.2 的证明.

证明 首先构造辅助函数 $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. 设 $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 且 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ 满足下面方程

$$\begin{cases}\Delta\varphi = \nabla \cdot \upsilon, & \Omega, \\ \varphi = 0, & \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.10}$$

由文 [2, 定理 1] 和 Poincaré 不等式可知, 对任意的 $1 < p < \infty$, 都有

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|\upsilon\|_{L^p(\Omega)}, \tag{3.11}$$

其中 C 依赖于 p, Ω. 由于 υ 是充分光滑的, 应用做差商的方法, 可知 $\varphi \in H_0^2(\Omega)$.

现在, 我们来考虑方程 (3.2). 设

$$F = e_k \times (A^{-1}(g+\mu+\nabla\rho)) + he_k.$$

由等式 (3.2) 可得

$$\left|\int_\Omega u_k \Delta\varphi\right| = \left|\int_\Omega F\nabla\varphi\right| \le \|F\|_{(W^{1,p'}(\Omega))'}\|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)},$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$. 由不等式 (3.11) 可知

$$\left|\int_\Omega u_k \nabla \cdot \upsilon\right| \le C\|F\|_{(W^{1,p'}(\Omega))'}\|\upsilon\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

即

$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|F\|_{(W^{1,p'}(\Omega))'}, \tag{3.12}$$

其中 C 依赖于 p, Ω.

根据定理 1.2 的假设条件, 可知 $f \in L^{3p/(3+p)}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. 由 $\nabla \cdot f = 0$ 的性质和引理 2.3 可知 $\mu \in W^{1,3p/(3+p)}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, 满足 (3.3) 且

$$\|\mu\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\mu\|_{W^{1,3p/(3+p)}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

其中 C 依赖于 p 和 Ω.

由引理 3.1 的证明, 可知 $\rho \in H^1(\Omega)$ 且满足等式 (3.4). 也就是说, 等式 (3.4) 的左边是散度为 0 的. 那么 ρ 满足方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot (A^{-1}(\nabla\rho + g + \mu)) = 0, & \Omega, \\ n \cdot (A^{-1}(\nabla\rho + g + \mu)) = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

其中, 我们要用这样的一个事实: 在 $\partial\Omega$, $n \cdot (\nabla \times u) = -\mathrm{Div}(n \times u) = 0$.

根据 $A^{-1}(x)$ 的假设和引理 2.2, 可知

$$\|\nabla\rho\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|\mu\|_{L^p(\Omega)}), \tag{3.14}$$

其中 C 依赖于 λ, Ω, p 和 A^{-1} 的 VMO 连续模量.

因此, 结合不等式 (3.13) 和 (3.14), 可知 $F \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)$, 且

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^p(\Omega)} &\leq C(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|\mu\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\rho\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq C(\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned}$$

故 F 属于 $L^p(\Omega)$. 那么, 可定义一个函数空间 $W^{1,p'}(\Omega)$ 上的泛函

$$\varphi \to \int_\Omega F\nabla\varphi dx,$$

其中 $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$. 所以不等式 (3.12) 可改写为

$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|F\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.15}$$

再由边界条件 $u_k = 0$ 和 Poincaré 不等式, 可得

$$\|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|F\|_{L^p(\Omega)}.$$

因为 $k = 1, 2, 3$, 可得所证结论

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^{3p/(p+3)}(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}), \tag{3.16}$$

其中 C 依赖于 λ, Ω, p 和 A^{-1} 的 VMO 连续模量. 证毕.

注 3.2 在定理 1.2, 我们也可以考虑下面的 Dirichlet 边界条件问题:

$$\begin{cases} \nabla \times (A(x)\nabla \times u) = f + \nabla \times g, & \Omega, \\ \nabla \cdot u = h, & \Omega, \\ u = \phi, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

这里需要相容性条件假设

$$\int_\Omega h = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot n.$$

假设 ϕ 为函数 $v\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 的迹, 其中 $1<p<\infty$. 我们可以假设 $w=u-v$. 显然, 当 g 和 h 分别用 $\tilde{g}$ 和 $\tilde{h}$ 代替后, w 满足方程组 (1.1), 其中

$$\tilde{g}=g-A(x)\nabla\times v,\quad \tilde{h}=h-\nabla\cdot v.$$

容易得到 $\tilde{g}\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\tilde{h}\in L^p(\Omega)$ 和 $\int_\Omega\tilde{h}=0$. 因此, 根据定理 1.2, 可得

$$\begin{aligned}\|w\|_{W^{1,p}(\Omega)}&\le C(\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)}+\|\tilde{g}\|_{L^p(\Omega)}+\|\tilde{h}\|_{L^p(\Omega)}),\\&\le C(\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}+\|h\|_{L^p(\Omega)}+\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}),\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中 C 依赖于 λ,Ω,p 和 A^{-1} 的 VMO 连续模量.

根据区域 Ω 的 C^1 假设, 可知, 若 ϕ 属于 Besov 空间 $B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)$, 那么它可被延拓为 $v\in W^{1,p}(\Omega)$, 且满足

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le C\|\phi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)},$$

其中 C 依赖于 Ω 和 p. 因此, 方程组 (3.17) 的弱解 u 满足下面的估计

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le C(\|f\|_{L^{3p/(3+p)}(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}+\|h\|_{L^p(\Omega)}+\|\phi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}).$$

利用我们证明的 $W^{1,p}$ 估计, 可以很容易得到全局的 Hölder 估计.

推论 3.3 假设对 $3<p<\infty$, $A(x),\Omega,f,g,h$ 满足定理 1.2 中相同的条件. 若 $u\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 为方程组 (1.1) 的弱解, 那么 $u\in C^\alpha(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, 且

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\le C(\|f\|_{L^{3p/(p+3)}(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}+\|h\|_{L^p(\Omega)}),\tag{3.19}$$

其中 $\alpha=1-3/p$, C 依赖于 λ,Ω,p 和 A^{-1} 的 VMO 连续模量.

4 应用

正如引言里所说, 研究方程组 (1.1) 的兴趣来自于麦克斯韦方程组. 特别地, 当材料的导电率依赖于温度时, 经典的拟稳态麦克斯韦方程组可以转化为下面的数学模型 [8, 16]:

$$\begin{cases}H_t+\nabla\times(\sigma(v)\nabla\times H)=0,\\\nabla\cdot H=0,\\v_t-\Delta v=\sigma(v)|\nabla\times H|^2,\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 H 和 v 分别代表磁场强度和温度, $\sigma(v)$ 代表材料的导电率.

在这一部分, 我们考虑下面的方程组:

$$\begin{cases}\nabla\times(\sigma(v)\nabla\times H)=0, & \Omega,\\\nabla\cdot H=0, & \Omega,\\-\Delta v=(\nabla\times H)\cdot(\sigma(v)\nabla\times H), & \Omega,\\H=\phi,\ v=\psi, & \partial\Omega,\end{cases}\tag{4.2}$$

其中 $\sigma(v)$ 为 3×3 矩阵. 弱解 (H,v) 的存在性可见文 [16]. 而且, 文 [7] 得出了 (H,v) 的全局 Hölder 连续性. 利用本文前面所得的结论, 可以得出方程组 (4.2) 弱解 (H,v) 的 $W^{1,p}$ 正则性.

定理 4.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为具有 C^1 边界的有界单连通区域. 假设 $\sigma(v)$ 关于 v 连续, 且关于 x 满足条件 (H1) 和 (H2). 假设

$$\phi\in B^p_{1-1/p}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3),\quad \psi\in B^p_{1-1/p}(\partial\Omega),$$

其中 $3 < p < \infty$. 若 $(H, v) \in H_0^1(\Omega)$ 满足方程组 (4.2), 那么 $(H, v) \in W^{1,p}(\Omega)$, 且

$$\|H\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\big(\lambda, \Omega, p, \sigma(v), \|\phi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}, \|\psi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}\big), \tag{4.3}$$

证明 首先, 我们证明 H 属于 $W^{1,p}(\Omega)$. 根据假设条件, 可知 ϕ, ψ 可延拓为属于 $W^{1,p}(\Omega)$ 的函数. 当 $p > 3$ 时, 根据文 [7, 定理 5.6] 可知, 存在 $\alpha \in (0, 1)$, $v \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, 且

$$\|v\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C(\|\phi\|^2_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}),$$

其中 C 依赖于 λ, Ω 和 p.

由 $v(x)$ 的 Hölder 连续性和 $\sigma(v)$ 的连续性, 可知 $\sigma(v(x))$ 为 x 的连续函数. 因此 σ 属于 VMO(Ω), 且其 VMO 的连续模量可由 σ 的连续模量控制.

因此, 我们可以考虑方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times (\sigma(v(x))\nabla \times H) = 0, & \Omega, \\ \nabla \cdot H = 0, & \Omega, \\ H = \phi, & \partial\Omega. \end{cases}$$

由注 3.2 可知

$$\|H\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\lambda, \Omega, p, \sigma(v), \|\phi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}), \tag{4.4}$$

这里利用了 Besov 空间的性质.

现在我们来研究 v 的 $W^{1,p}$ 正则性. 由向量等式

$$\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G),$$

再结合方程组 (4.2) 的第一个方程, 可得

$$\nabla \cdot [H \times (\sigma(v)\nabla \times H)] = (\nabla \times H) \cdot (\sigma(v)\nabla \times H).$$

因此

$$\begin{cases} -\Delta v = \nabla \cdot (H \times (\sigma(v)\nabla \times H)), & \Omega, \\ v = \psi, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

根据文 [2, 定理 1], 可知 $v \in W^{1,p}(\Omega)$, 且下面的估计成立:

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\|H\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \times H\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}). \tag{4.6}$$

结合不等式 (4.4), (4.6) 和 Sobolev 不等式, 可得最终所证结论

$$\|H\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\lambda, \Omega, p, \sigma(v), \|\phi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}, \|\psi\|_{B^p_{1-1/p}(\partial\Omega)}).$$

证毕.

参　考　文　献

[1] Alberti G. S., Yves C., Elliptic regularity theory applied to time harmonic anisotropic Maxwell's equations with less than Lipschitz complex coeffinicents, *SIAM J. Math. Anal.*, 2014, **46**(1): 998–1016.

[2] Auscher P., Qafsaoui M., Observations on $W^{1,p}$ estimates for divergence elliptic equations with VMO coefficients, *Bell. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.*, 2002, **5**(8): 487–509.

[3] Galdi G. P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, vol. I, Linearized Steady Problems, Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] Giaquinta M., Hong M. C., Partial regularity of minimizers of a functional involving forms and maps, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2004, **11**: 469–490.

[5] Gilbarg D., Trudinger N., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] Girault V., Ravirart P., Finite Element Methods for Navier–Stokes Equation, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[7] Kyungkeun K., Seick K., Elliptic systems with measurable coefficients of the type of Lamé system in the three dimensions, *J. Differential Equations*, 2011, **251**: 2466–2493.

[8] Kyungkeun K., Seick K., On the Hölder continuity of solutions of a certain system related to Maxwell's equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 2002, **34**(1): 87–100.

[9] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N., Linear and Quasilinear Elliptic Equations of Parabolic Type, Academic Press, New York, 1968.

[10] Landau L. D., Lifshitz E. M., Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, New York, 1960.

[11] Leis R., Initial-Boundary Value Problems in Mathematical Physics, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[12] Nguyen T., Wang J. N., Quantitative uniqueness estimate for the Maxwell system with Lipschitz anisotropic media, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2012, **140**: 595–605.

[13] Sarason D., Functions of vanishing mean oscillation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **207**: 391–405.

[14] Shen Z. W., Song L., On L^p estimates in homogenization of elliptic equations of Maxwell's type, *Adv. in Math.*, 2014, **252**: 7–21.

[15] Yin H. M., Optimal regularity of solution to a degenerate elliptic system arising in electromagnetic fields, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2002, **1**: 127–134.

[16] Yin H. M., Regularity of solutions to Maxwell's system in quasi-stationary electromagnetic fields and applications, *Comm. Partial Differential Equation*, 1997, **22**: 1029–1053.