

文章编号: 0583-1431(2019)03-0373-08

文献标识码: A

基于弱 Hopf 代数的半单范畴的构造

张晓辉 吴 慧

曲阜师范大学数学科学学院 曲阜 273165

E-mail: zxh11111@hotmail.com; wuhui8668@126.com

摘 要 本文研究并刻画了交换环上弱 Hopf 代数 Yetter–Drinfeld 模范畴的一些性质, 给出了其能够做成半单范畴的充分条件.

关键词 弱 Hopf 代数; Yetter–Drinfeld 模; 半单范畴

MR(2010) 主题分类 16T05, 18D99

中图分类 O153.3

Construction of Semisimple Categories over Weak Hopf Algebras

Xiao Hui ZHANG Hui WU

*School of Mathematical Science, Qufu Normal University,
Qufu 273165, P. R. China*

E-mail: zxh11111@hotmail.com; wuhui8668@126.com

Abstract We study the properties of the category of the Yetter–Drinfeld modules over a weak Hopf algebra, and give sufficient condition for the Yetter–Drinfeld category to be semisimple.

Keywords weak Hopf algebras; Yetter–Drinfeld modules; semisimple categories

MR(2010) Subject Classification 16T05, 18D99

Chinese Library Classification O153.3

1 引言

弱 Hopf 代数 (又称为量子群胚) 是由 Böhm 和 Szlachányi 于 1999 年引入的^[4]. 它是 Hopf 代数一类重要的推广形式, 不仅与 Frobenius 代数, 冯诺依曼代数的子因子理论有密切关系, 在低维拓扑、量子场论、辛几何等学术领域亦有重要应用, 比如群胚代数、Face 代数和广义 Kac 代数等都是其特殊形式. 近几年来对其的研究, 可见文 [2, 11–13, 16].

Yetter–Drinfeld 模是 Hopf 代数理论中重要的研究对象之一. 当 Hopf 代数是有限生成投射模时, 一个广为人知的结果就是: 此时 Yetter–Drinfeld 模范畴与量子偶的模范畴是同构的, 并

收稿日期: 2018-04-27; 接受日期: 2018-10-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801304, 11801306, 11871301);

山东省自然科学基金资助项目 (ZR2016AQ03); 中国博士后面上基金资助项目 (2018M630768)

且与模范畴的中心是同构的 [8]. 因此其与量子 Yang–Baxter 方程的解系, 纽结不变量的构造等问题有着直接的联系. 近期对其的研究, 可见文 [1, 3, 14, 15]. 对于弱 Hopf 代数上的 YD 模, Caenepeel [5] 和 Nenciu [10] 等学者分别从范畴中心的角度给出了其刻画, 并讨论了相关性质.

半单范畴在同调理论中占有重要地位. 事实上, 半单 Hopf 代数的表示范畴就是一个半单范畴, 因此其在半单 Hopf 代数分类问题的研究上, 有着突出的意义 [7]. 尤其是在 fusion 范畴, FP 维数和 Kaplansky 猜想等学术热点上, 有着重要的作用 [6]. 本文在上述研究的基础上, 给出了弱 Hopf 代数上 Yetter–Drinfeld 模范畴的相关性质, 并利用交换, Noetherian 等性质给出了 YD 模范畴构成半单范畴的充分条件.

2 预备知识

除非特别说明, 本文总是假定 k 为特征为 0 的交换环.

定义 2.1 [4] 设 $(H, m, 1_H)$ 为 k -代数且 (H, Δ, ε) 为 k -余代数. 若 H 满足下列条件:

$$\Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) = (1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H),$$

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad \varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z) = \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z),$$

则称 H 为一个 k 上的弱双代数. 若 H 还满足条件

$$x_1S(x_2) = \varepsilon(1_1x)1_2, \quad S(x_1)x_2 = 1_1\varepsilon(x1_2), \quad S(x_1)x_2S(x_3) = S(x),$$

则称 H 为一个 k 上伴有对极 S 的弱 Hopf 代数, 其中 $\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2$.

设 H 为弱双代数. 定义映射 $\varepsilon_t, \varepsilon_s : H \rightarrow H$ 如下

$$\varepsilon_t(x) = \varepsilon(1_1x)1_2; \quad \varepsilon_s(x) = 1_1\varepsilon(x1_2).$$

我们一般以 H_t 表示靶代数 $\varepsilon_t(H)$, 以 H_s 表示源代数 $\varepsilon_s(H)$.

注 2.2 [4] 弱双代数 H 是一个双代数当且仅当 $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, 或当且仅当 ε 为代数同态.

注 2.3 [4] 弱 Hopf 代数 H 的对极 S 为反代数同态, 且为反余代数同态, 即满足

$$S(hg) = S(g)S(h), \quad S(h)_1 \otimes S(h)_2 = S(h_2) \otimes S(h_1), \quad S(1_H) = 1_H, \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

若 S 为双射, 则 S^{-1} 亦为反代数反余代数同态.

设 H 为弱 Hopf 代数, 则有如下等式成立:

$$\Delta(1) = 1_1 \otimes 1_2 \in H_s \otimes H_t; \quad \varepsilon_s \circ \varepsilon_s = \varepsilon_s; \quad \varepsilon_t \circ \varepsilon_t = \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \circ S = \varepsilon_t \circ \varepsilon_s = S \circ \varepsilon_s; \quad \varepsilon_s \circ S = \varepsilon_s \circ \varepsilon_t = S \circ \varepsilon_t,$$

$$h_1 \otimes \varepsilon_t(h_2) = 1_1h \otimes 1_2; \quad \varepsilon_t(h_1) \otimes h_2 = S(1_1) \otimes 1_2h,$$

$$h_1 \otimes \varepsilon_s(h_2) = h1_1 \otimes S(1_2); \quad \varepsilon_s(h_1) \otimes h_2 = 1_1 \otimes h1_2,$$

$$h\varepsilon_t(g) = \varepsilon(h_1g)h_2; \quad \varepsilon_s(g)h = h_1\varepsilon(gh_2),$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h\varepsilon_t(g)) = \varepsilon(\varepsilon_s(h)g).$$

定义 2.4 H 为弱 Hopf 代数, 一个 H 上的弱 Yetter–Drinfeld 模是指 k -模 M , 使得 M 既是左 H -模 (用符号 $h \otimes m \mapsto h \cdot m$ 表示左模作用) 又是右 H -余模 (用符号 $M \otimes H, m \mapsto m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ 表示右余模作用) 并满足下面的相容条件:

$$\rho(h \cdot m) = h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_3m_{(1)}S^{-1}(h_1) \quad (2.1)$$

对任意 $h \in H$ 和 $m \in M$. 我们用 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 表示所有弱 Yetter-Drinfeld 模构成的范畴 (简称为弱 YD 模范畴), 范畴中的态射为 H -线性和 H -余线性映射.

注 2.5 (1) 等式 (2.1) 和下面两个等式是等价的:

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes H = (1_1 \otimes 1_2) \cdot (M \otimes H), \quad \forall m \in M, \quad (2.2)$$

$$h_1 \cdot m_{(0)} \otimes h_2 m_{(1)} = (h_2 \cdot m)_{(0)} \otimes (h_2 \cdot m)_{(1)} h_1, \quad \forall m \in M, \quad h \in H. \quad (2.3)$$

(2) 设 $M, N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, $m \in M$, 则有

$$m_{(0)} \otimes \varepsilon_t(m_{(1)}) = 1_1 \cdot m \otimes 1_2, \quad m_{(0)} \otimes \varepsilon_s(m_{(1)}) = 1_2 \cdot m \otimes 1_1.$$

定义 2.6 设 \mathcal{C} 为范畴, M 为 \mathcal{C} 中的对象.

- (1) 称 M 为单对象, 若 M 在 \mathcal{C} 中无真子对象;
- (2) 称 M 为半单的, 若 M 在 \mathcal{C} 中可分解为单对象的直和;
- (3) 称 \mathcal{C} 为半单范畴, 若 \mathcal{C} 中每个对象都是半单的.

3 交换弱 Hopf 代数的 Yetter-Drinfeld 模

设 H 为可交换的有限维弱 Hopf 代数. 本节主要讨论范畴 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 的一些性质.

引理 3.1 设 $M, N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 且 M 作为左 H -模为有限生成投射模, 则有:

(1) ${}_H\text{hom}(M, N) \in \mathcal{M}^H$, 且 ${}_H\text{hom}^H(M, N) = {}_H\text{hom}(M, N)^{CoH}$, 其中的余作用定义为

$$f_{(0)}(m) \otimes f_{(1)} = \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}), \quad \forall f \in {}_H\text{hom}(M, N), \quad m \in M,$$

(2) ${}_H\text{hom}(M, N) \in {}_H\mathcal{WYD}^H$.

证明 (1) 首先定义如下映射:

$$P: \text{hom}(M, N) \rightarrow \text{hom}(M, N \otimes H), \quad P(f)(m) = \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}),$$

其中 $f \in \text{hom}(M, N)$, $m \in M$. 若 $f \in {}_H\text{hom}(M, N)$, 此时有

$$\begin{aligned} P(f)(h \cdot m) &= \underline{f(h \cdot m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(h \cdot m_{(0)})}_{(1)} S(h \cdot m_{(1)}) \\ &= \underline{f(h_2 \cdot m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(h_2 \cdot m_{(0)})}_{(1)} S(h_3 m_{(1)} S^{-1}(h_1)) \\ &= h_3 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes h_4 \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(h_2) h_1 S(m_{(1)}) S(h_5) \\ &= \varepsilon(h_1 1_2) h_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes h_3 S(h_4) \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(1_1) S(m_{(1)}) \\ &= h_1 \varepsilon(1'_1 h_2) 1_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes 1'_2 \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(1_1) S(m_{(1)}) \\ &= h 1_H \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{1_H \cdot f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}) \\ &= h \cdot P(f)(m), \end{aligned}$$

即 $P(f)$ 亦为 H -线性的. 进而 P 可视为从 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 到 ${}_H\text{hom}(M, N \otimes H)$ 的映射. 又由于 M 作为左 H -模为有限生成投射模, 故有

$${}_H\text{hom}(M, N \otimes H) \cong {}_H\text{hom}(M, N) \otimes H.$$

于是 P 可视为从 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 到 ${}_H\text{hom}(M, N) \otimes H$ 的映射. 易证其为右余模作用.

下证 ${}_H\text{hom}^H(M, N) = {}_H\text{hom}(M, N)^{CoH}$. 一方面, 对任意的 $f \in {}_H\text{hom}^H(M, N)$, 有

$$\begin{aligned} f_{(0)}(m) \otimes f_{(1)} &= \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}) \\ &= f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} S(m_{(2)}) \\ &= f(m_{(0)}) \otimes \varepsilon_t(m_{(1)}) = f(1_1 \cdot m) \otimes 1_2 \\ &= 1_1 \cdot f(m) \otimes 1_2 = f(m) \otimes 1_H, \end{aligned}$$

于是知 $f \in {}_H\text{hom}(M, N)^{CoH}$.

另一方面, 对任意的 $f \in {}_H\text{hom}(M, N)^{CoH}$, $m \in M$, 有

$$f_{(0)}(m) \otimes f_{(1)} = f(m) \otimes 1_H,$$

进而计算可知

$$\begin{aligned} \underline{f(m)}_{(0)} \otimes \underline{f(m)}_{(1)} &= \underline{1_1 \cdot f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{1_1 \cdot f(m_{(0)})}_{(1)} \varepsilon(1_2 m_{(1)}) \\ &= 1_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes 1_3 \varepsilon(1_4 m_1) \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(1_1) \\ &= 1_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \varepsilon_s(m_{(1)}) 1_3 \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(1_1) \\ &= \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}) m_{(2)} \\ &= \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} \varepsilon_s(m_{(1)}) = f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}. \end{aligned}$$

这就证明 $f \in {}_H\text{hom}^H(M, N)$.

(2) 对任意的 $m \in M$, $f \in {}_H\text{hom}(M, N)$, $h \in H$, 有

$$\begin{aligned} \underline{h \cdot f}_{(0)}(m) \otimes \underline{h \cdot f}_{(1)} &= \underline{h \cdot f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{h \cdot f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}) \\ &= h_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \otimes h_3 \underline{f(m_{(0)})}_{(1)} S(m_{(1)}) S^{-1}(h_1) \\ &= h_2 \cdot f_{(0)}(m) \otimes h_3 f_{(1)} S^{-1}(h_1), \end{aligned}$$

这就证明 ${}_H\text{hom}(M, N) \in {}_H\mathcal{W}\mathcal{D}^H$. 证毕.

引理 3.2 设 V 为 k -模, N 为左 H -模, 则

(1) 我们有 k -模同构 ${}_H\text{hom}(H \otimes V, N) \cong \text{hom}(V, N)$.

(2) 若 V 为 k -投射模, 则 $H \otimes V$ 在 ${}_H\mathcal{M}$ 中亦为投射模.

证明 (1) 构造映射 $\phi: {}_H\text{hom}(H \otimes V, N) \rightarrow \text{hom}(V, N)$, 其定义如下

$$\phi(f)(v) = f(1_H \otimes v), \quad \forall f \in {}_H\text{hom}(H \otimes V, N), \quad v \in V,$$

则易知 ϕ 为同构, 其逆映射为 $\psi: \text{hom}(V, N) \rightarrow {}_H\text{hom}(H \otimes V, N)$, 具体作用如下

$$\psi(g)(h \otimes v) = h \cdot g(v), \quad \forall g \in \text{hom}(V, N), \quad v \in V, \quad h \in H.$$

(2) 由 (1) 可知, 我们有如下函子同构 $\text{hom}(V, _) \cong \text{hom}(H \otimes V, _)$, 于是由 $\text{hom}(V, _)$ 为正合函子可知 $\text{hom}(H \otimes V, _)$ 亦为正合函子. 证毕.

注 3.3 设 V 为右 H 余模, 且为有限生成投射 k -模. 此时对任意的 $N \in \mathcal{M}^H$, 有 $V^* \otimes N \otimes H \cong \text{hom}(V, N) \otimes H$, 进而知 $\text{hom}(V, N) \in \mathcal{M}^H$. $\text{hom}(V, N)$ 的余模作用定义为:

$$g_{(0)}(v) \otimes g_{(1)} = \underline{g(v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{g(v_{(0)})}_{(1)} \otimes S(v_{(1)}), \quad \forall g \in \text{hom}(V, N), \quad v \in V.$$

进一步地, 若 $N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 则由引理 3.1, ${}_H\text{hom}(H \otimes V, N) \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 其中 $H \otimes V$ 的弱 YD 模结构如下:

$$\begin{aligned} h' \cdot (h \otimes v) &= h'h \otimes v, \quad \forall h, h' \in H, \quad v \in V, \\ \underline{h \otimes v}_{(0)} \otimes \underline{h \otimes v}_{(1)} &= h_2 \otimes v_{(0)} \otimes h_3 v_{(1)} S^{-1}(h_1). \end{aligned}$$

命题 3.4 设 $N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, V 为右 H 余模, 则

- (1) 若 V 同时为有限生成投射 k -模, 则我们有 H -余模同构 ${}_H\text{hom}(H \otimes V, N) \cong \text{hom}(V, N)$.
- (2) 若 k 为域, V 为有限维投射 H -余模, 则 $H \otimes V$ 为 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中的投射对象.

证明 (1) 考虑在引理 3.2 中定义的 ϕ . 只需证明 ϕ 为 H -余线性的即可. 事实上, 对任意的 $f \in {}_H\text{hom}(H \otimes V, N)$, $v \in V$, 有

$$\begin{aligned} \phi(f_{(0)})(v) \otimes f_{(1)} &= f_{(0)}(1_H \otimes v) \otimes f_{(1)} \\ &= \underline{f(1_2 \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(1_2 \otimes v_{(0)})}_{(1)} 1_1 S(v_{(1)}) S(1_3) \\ &= \underline{1_2 \cdot f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{1_2 \cdot f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(1)} 1_1 S(v_{(1)}) S(1'_2) \\ &= \underline{1_3 f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{1_4 f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(S(1_1) 1_2) S(v_{(1)}) S(1'_2) \\ &= \varepsilon_t(1''_2) 1_1 \underline{f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{1_2 f(1'_1 \otimes v_{(0)})}_{(1)} S^{-1}(1''_1) S(v_{(1)}) S(1'_2) \\ &= \underline{f(1_1 \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(1_1 \otimes v_{(0)})}_{(1)} S(1_2 v_{(1)}) \\ &= \underline{f(1_H \otimes v_{(0)})}_{(0)} \otimes \underline{f(1_H \otimes v_{(0)})}_{(1)} S(v_{(1)}) \\ &= \underline{\phi(f)}_{(0)}(v) \otimes \underline{\phi(f)}_{(1)}, \end{aligned}$$

于是 ϕ 为 H -余线性映射.

- (2) 由引理 3.1 及 (1) 可知有如下同构

$${}_H\text{hom}^H(H \otimes V, N) \cong {}_H\text{hom}(H \otimes V, N)^{CoH} \cong \text{hom}(V, N)^{CoH} \cong \text{hom}^H(V, N),$$

由 $\text{hom}^H(V, _)$ 为正合函子可知, ${}_H\text{hom}^H(H \otimes V, _)$ 亦为正合函子. 证毕.

命题 3.5 设 k 为域, $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 则 M 作为 H -模是有限生成的当且仅当存在 V 为有限维右 H -余模, 且存在 H -线性, H -余线性的满同态 $\pi: H \otimes V \rightarrow M$.

证明 \Rightarrow : 若 M 为有限生成的 H -模, 设其生成元集为 $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, 则由文 [9, 定理 5.1.1] 可知, 存在 V 为 M 的有限维子余模, 使得 $\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \subseteq V$. 此时作映射

$$\pi: H \otimes V \rightarrow M, \quad h \otimes v \mapsto h \cdot v,$$

则 π 显然为 H -线性, H -余线性的满同态.

\Leftarrow : 由 V 为有限维, 且 $\pi: H \otimes V \rightarrow M$ 为满同态, 则 $H \otimes V$ 必为有限生成的, 且 M 作为 $H \otimes V$ 的商对象, 亦为有限生成的. 证毕.

设 H^* 为 H 的线性对偶. 知若 M, N 为 H -余模, 则 $\text{hom}_k(M, N)$ 必为左 H^* -模. 其模作用定义如下: 对任意的 $\xi \in H^*$, $f \in \text{hom}_k(M, N)$, $m \in M$,

$$(\xi \cdot f)(m) = \xi(\underline{f(m_{(0)})}_{(0)}) S(m_{(1)}) \underline{f(m_{(0)})}_{(1)}.$$

更进一步地, 我们有如下命题:

命题 3.6 若 $M, N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 则 ${}_H\text{hom}_k(M, N)$ 为 $\text{hom}_k(M, N)$ 的 H^* -子模.

证明 对任意的 $\xi \in H^*$, $f \in \text{hom}_k(M, N)$, $m \in M$, $h \in H$, 我们有

$$\begin{aligned} (\xi \cdot f)(h \cdot m) &= \xi(\underline{f(h_2 \cdot m)}_{(1)}) S(h_3 m_{(1)} S^{-1}(h_1)) \underline{f(h_2 \cdot m)}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{h_4 f(m_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(h_2) h_1 S(m_{(1)}) S(h_5) h_3 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1'_2 f(m_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(1_1) S(m_{(1)}) \varepsilon(1'_1 h_2) h_1 1_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1_3 f(m_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(1_1) S(m_{(1)}) h 1_2 \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{f(m_{(0)})}_{(1)}) S(m_{(1)}) h \cdot \underline{f(m_{(0)})}_{(0)} \\ &= h \cdot ((\xi \cdot f)(m)), \end{aligned}$$

即 $\xi \cdot f$ 为 H -线性的. 进而 ξ 对 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 的作用是封闭的. 于是 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 为 $\text{hom}_k(M, N)$ 的 H^* -子模. 证毕.

定义 3.7 称左 H^* 模 M 为有理模, 若 M 为右 H -余模, 且其 H^* 模作用是通过 H -余模作用诱导得到的.

定理 3.8 设 H 为有限维交换弱 Hopf 代数, k 为域. $M, N \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 且 M 作为 H -模为有限生成的, 则 ${}_H\text{hom}(M, N) \in {}_H\mathcal{WYD}^H$.

证明 由命题 3.5 可知, 存在 M 的有限维子余模 V 和 H -线性余线性的满同态 $\pi: H \otimes V \rightarrow M$. 此时考虑如下 k -线性映射:

$${}_H\text{hom}(\pi, N): {}_H\text{hom}(M, N) \rightarrow {}_H\text{hom}(H \otimes V, N),$$

易知 ${}_H\text{hom}(\pi, N)$ 为单射. 对任意的 $\xi \in H^*$, $f \in \text{hom}_k(M, N)$, $m \in M$, $h \in H$, 由

$$\pi(h \otimes v) = h \cdot v, \quad \underline{1_H \otimes v_{(0)}}_{(1)} \otimes \underline{1_H \otimes v_{(1)}}_{(1)} = 1_2 \otimes v_{(0)} \otimes 1_3 v_{(1)} S^{-1}(1_1)$$

可得

$$\begin{aligned} (\xi \cdot (f \circ \pi))(1_H \otimes v) &= \xi(\underline{f(\pi(1_H \otimes v_{(0)}))}_{(1)}) S(\underline{1_H \otimes v_{(1)}}_{(1)}) \underline{f(\pi(1_H \otimes v_{(0)}))}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1_2 \cdot f(v_{(0)})}_{(1)}) 1_1 S(v_{(1)}) S(1_3) 1_2 \cdot \underline{f(v_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1_4 S(1_5) f(v_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(S(1_1) 1_2) S(v_{(1)}) 1_3 \underline{f(v_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1'_2 \varepsilon(1'_1 1_3) f(v_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(1'_1) S(v_{(1)}) \varepsilon(1_1 1'_2) 1_2 \underline{f(v_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{1'_2 f(v_{(0)})}_{(1)}) S^{-1}(1'_1) S(v_{(1)}) 1'_1 1'_2 \underline{f(v_{(0)})}_{(0)} \\ &= \xi(\underline{f(v_{(0)})}_{(1)}) S(v_{(1)}) \underline{f(v_{(0)})}_{(0)} \\ &= ((\xi \cdot f) \circ \pi)(1_H \otimes v), \end{aligned}$$

即下图可换:

$$\begin{array}{ccc} H^* \otimes {}_H\text{hom}(M, N) & \xrightarrow{\text{id} \otimes {}_H\text{hom}(\pi, N)} & H^* \otimes {}_H\text{hom}(H \otimes V, N) \\ \downarrow \text{模作用} & & \downarrow \text{模作用} \\ {}_H\text{hom}(M, N) & \xrightarrow{{}_H\text{hom}(\pi, N)} & {}_H\text{hom}(H \otimes V, N), \end{array}$$

进而 ${}_H\text{hom}(\pi, N)$ 为 H^* -线性的. 此时, 一方面由引理 3.1 可知, ${}_H\text{hom}(H \otimes V, N)$ 为 H -余模, 且为 H^* -有理模. 另一方面由 ${}_H\text{hom}(\pi, N)$ 为单射, 知 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 为 ${}_H\text{hom}(H \otimes V, N)$ 的子对象.

于是 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 亦为 H^* -有理模, 这说明 ${}_H\text{hom}(M, N)$ 为 H -余模. 再由引理 3.1 可得

$${}_H\text{hom}(M, N) \in {}_H\mathcal{WYD}^H.$$

命题得证.

4 弱 YD 模的半单范畴结构

设 H 为可交换的有限维弱 Hopf 代数. 本节主要讨论如何将 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 构造成半单范畴.

定义 4.1 称 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件, 若对任意的 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, M 作为左 H 模为有限生成的, 则必得到函子 ${}_H\text{hom}(M, -) : {}_H\mathcal{WYD}^H \rightarrow {}_H\mathcal{WYD}^H$ 为正合函子.

注 4.2 若 H 为半单的, 则易知 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件.

命题 4.3 设 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件, 且函子 $(-)^{CoH} : {}_H\mathcal{WYD}^H \rightarrow {}_k\mathcal{M}$ 为正合函子. 若 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, 且 M 作为左 H 模为有限生成的, 则

(1) M 为 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 的投射对象.

(2) 若 H 作为代数是 Noetherian 的, 则 M 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中可分解为一系列作为 H -模有限生成的单子对象的直和.

证明 (1) 事实上, 我们有

$${}_H\text{hom}^H(M, -) \cong {}_H\text{hom}(M, -)^{CoH} = (-)^{CoH} \circ {}_H\text{hom}(M, -),$$

即 ${}_H\text{hom}^H(M, -)$ 在同构意义下为两个正合函子的合成, 故亦为正合函子. 因此 M 为投射对象.

(2) 设 N 为 M 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中的任一子对象, 则 M/N 作为 H -模必为有限生成的, 且此时易知存在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中的正合列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

又由 H 为 Noetherian 的, 知 H -模必为有限生成, 即 N 作为 H -模亦为有限生成的. 于是由 (1) 可知 N 和 M/N 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中均为投射对象, 进而正合列 (4.1) 可裂. 故结论成立. 证毕.

注 4.4 设 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, V 为 M 的右 H -子余模. 令 $HV = \{\sum a_i \cdot v_i \mid a_i \in H, v_i \in V, i \in I, I \text{ 为有限集}\}$, 则 HV 为 M 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中的子对象, 其模作用和余模作用如下:

$$\begin{aligned} h \cdot \sum (a_i \cdot v_i) &= \sum ha_i \cdot v_i, \quad \forall h \in H, \\ \sum_{(0)} a_i \cdot v_i \otimes \sum_{(1)} a_i \cdot v_i &= \sum \underline{a_{i2}} \cdot \underline{v_{i(0)}} \otimes \underline{a_{i3}} \underline{v_{i(1)}} S^{-1}(\underline{a_{i1}}). \end{aligned}$$

定理 4.5 设 H 为有限维可换且 Noetherian 的弱 Hopf 代数, 且 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件, 函子 $(-)^{CoH} : {}_H\mathcal{WYD}^H \rightarrow {}_k\mathcal{M}$ 为正合函子. 则对任意的 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, M 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中总可分解为一系列作为 H -模有限生成的单子对象的直和.

证明 对任意的 $m \in M$, 存在 M 的有限维 H -子余模 V_m , 使得 $m \in V_m$. 易知 HV_m 作为 H -模为有限生成的, 于是由命题 4.3 (2), HV_m 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中总可分解为一系列作为 H -模有限生成的单子对象的直和, 进而 M 亦然. 证毕.

定理 4.6 设 H 为有限维可换且 Noetherian 的弱 Hopf 代数, 且 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件, 函子 $(-)^{CoH} : {}_H\mathcal{WYD}^H \rightarrow {}_k\mathcal{M}$ 为正合函子, 则对任意的 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$, M 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中总可分解为一系列作为 H -模有限生成的单子对象的直和. 进而 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 为半单范畴.

证明 对任意的 $m \in M$, 知存在 M 的有限维 H -子余模 V_m , 使得 $m \in V_m$. 易知 HV_m 作为 H -模为有限生成的, 于是由命题 4.3 (2), HV_m 在 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 中总可分解为一系列作为 H -模有限生成的单子对象的直和. 此时设

$$\Omega = \left\{ N = \bigoplus_{i \in I} N_i \mid N_i \text{ 为 } M \text{ 在 } {}_H\mathcal{WYD}^H \text{ 中的单子对象, 且 } N_i \text{ 作为 } H \text{ 模是有限生成的} \right\}.$$

易知 $HV_m \in \Omega$, 于是 Ω 非空, 且关于包含关系可做成一个偏序集. 又任取 Ω 中两个元素 A, B , 知其有最小上界即 $A + B$. 于是由 Zorn 引理可知 Ω 中含有极大元, 设之为 N' , 下证 $N' = M$.

事实上, 对任意的 $m \in M$, 知 $m \in HV_m$, 于是有 $m \in HV_m + N'$. 又由 N' 的极大性即可得 $HV_m + N' = N'$, 故 $m \in N'$, 进而 $N' = M$. 证毕.

推论 4.7 设 H 为有限维可换且 Noetherian、半单、余半单的弱 Hopf 代数, 则 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 为半单范畴.

证明 一方面, 由 H 余半单知函子 $(-)^{CoH} : {}_H\mathcal{M}^H \rightarrow {}_k\mathcal{M}$ 为正合函子, 进而其限制 $(-)^{CoH} : {}_H\mathcal{M}^H \rightarrow {}_k\mathcal{M}$ 亦为正合函子. 另一方面, 由 H 半单, 结合注记 4.2 即可知 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 满足有限正合条件. 进而由定理 4.6 即可知 $M \in {}_H\mathcal{WYD}^H$ 中任意对象均可分解为单对象的直和, 即 ${}_H\mathcal{WYD}^H$ 为半单范畴. 证毕.

参 考 文 献

- [1] Angiono I., Ardizzoni A., Menini C., Cohomology and coquasi-bialgebras in the category of Yetter–Drinfeld modules, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 2017, **17**: 609–653.
- [2] Böhm G., Doi-Hopf modules over weak Hopf algebras, *Comm. Algebra*, 2000, **28**: 4687–4698.
- [3] Böhm G., Yetter–Drinfeld modules over weak multiplier bialgebras, *Israel J. Math.*, 2015, **209**: 85–123.
- [4] Böhm G., Nill F., Szlachányi K., Weak Hopf Algebras I, Integral Theory and C^* -Structure, *J. Algebra*, 1999, **221**: 385–438.
- [5] Caenepeel S., Wang D. G., Yin Y. M., Yetter–Drinfeld modules over weak bialgebras, *Ann. Univ. Ferrara-Sez. VII-Sc. Mat.*, 2005, **LI**: 69–98.
- [6] Dai L., Dong J. C., On Kaplansky’s sixth conjecture, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 2016, **135**: 1–20.
- [7] Dong J. C., Wang S. H., On semisimple Hopf algebras of dimension $2q^3$, *J. Algebra*, 2013, **375**: 97–108.
- [8] Kassel C., Quantum Groups, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] Montgomery S., Hopf Algebras and Their Actions on Rings, CMBS Reg. Conf. Ser. in Math. 82, Am. Math. Soc., Providence, 1993.
- [10] Nenciu A., The center constructions for weak Hopf algebras, *Tsukuba J. Math.*, 2002, **26**(1): 189–204.
- [11] Nikshych D., On the Structure of Weak Hopf Algebras, *Adv. Math.*, 2002, **170**(2): 257–286.
- [12] Nikshych D., Semisimple weak Hopf algebras, *J. Algebra*, 2004, **275**(2): 639–667.
- [13] Nikshych D., Turaev V. G., Vainerman L., Invariants of knots and 3-manifolds from quantum groupoids, *Topol. Appl.*, 2003, **127**(1/2): 91–123.
- [14] Pfeiffer H., Tannaka–Krein reconstruction and a characterization of modular tensor categories, *J. Algebra*, 2009, **321**(12): 3714–3763.
- [15] Wang S. X., Wang S. H., Hom-Lie algebras in Yetter–Drinfeld categories, *Comm. Algebra*, 2014, **42**: 4526–4547.
- [16] Zhu H. X., Wang S. H., Chen J. Z., Bicovariant differential calculi on a weak Hopf algebra, *Taiwanese J. Math.*, 2014, **18**(6): 1679–1712.