第62卷第3期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.3
2019年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES May, 2019

文章编号: 0583-1431(2019)03-0353-08 **文献标识码: A**

李 Rinehart 代数的子代数若干性质

王雪冰

松原职业技术学院基础部 松原 138001
E-mail: 3517491@qq.com

牛艳君

长春工程学院理学院 长春 130024
E-mail: 992585016@qq.com

陈良云

东北师范大学数学与统计学院 长春 130024
E-mail: chenly640@nenu.edu.cn

摘　要　本文主要把李代数的 c- 可补、E- 代数的性质以及 Frattini 理论推广到更为广泛的李 Rinehart 代数, 得到它们的若干性质, 给出了可解李 Rinehart 代数的一个必要条件. 同时, 分别获得判断 c- 可补李 Rinehart 代数和 E- 李 Rinehart 代数的一个充分必要条件.

关键词　李 Rinehart 代数; c- 可补李 Rinehart 代数; E- 李 Rinehart 代数; Frattini 子代数

MR(2010) 主题分类　17A30, 17D25

中图分类　O152.5

Some Properties of Subalgebras of Lie–Rinehart Algebras

Xue Bing WANG

Department of Basic, Songyuan Vocational Technical College,
Songyuan 1138001*, P. R. China*
E-mail: 3517491*@qq.com*

Yan Jun NIU

College of Sciences, Changchun Institute of Technology,
Changchun 130024*, P. R. China*
E-mail: 992585016*@qq.com*

收稿日期: 2018-03-11; 接受日期: 2018-10-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771069);
吉林省自然科学基金资助项目 (20170101048JC) 及吉林省教育厅项目 (JJKH20180005K)
通讯作者: 陈良云

Liang Yun CHEN

School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University,
Changchun 130024*, P. R. China*
E-mail: *chenly*640*@nenu.edu.cn*

Abstract We develop c-supplemented subalgebras, E-algebras and Frattini theory of Lie algebras for Lie–Rinehart algebras, obtain its some important properties and give a necessary conditions for solvable Lie–Rinehart algebras. Moreover, we obtain a necessary and sufficient conditions for E-Lie–Rinehart algebras and c-supplemented Lie–Rinehart algebras, respectively.

Keywords Lie–Rinehart algebras; c-supplemented Lie–Rinehart algebras; E-Lie–Rinehart algebras; Frattini subalgebras
MR(2010) Subject Classification 17A30, 17D25
Chinese Library Classification O152.5

1 引言

李 Rinehart 代数, 又称为李 pseudo 代数、微分李代数、微分模或 Palais 对, 它是研究李代数胚抽象出来的一个重要的代数概念 [1, 2, 4, 6–9], 而李代数胚能描述李群胚的无穷小形式. 李 Rinehart 代数已经被推广到更广泛的李 Rinehart 超代数 [11] 和素特征域的限制李 Rinehart 代数 [5, 10]. 可见, 李 Rinehart 代数的研究在几何学和代数学都有重要的理论意义和应用价值.

李代数 C- 可补、E- 代数性质以及 Frattini 理论已经有了较多的研究 [11–14]. 本文主要把李代数 c- 可补、E- 代数的性质以及 Frattini 理论推广到更为广泛的李 Rinehart 代数, 得到了它们的若干重要结果, 给出了可解李 Rinehart 代数的一个必要条件. 同时, 分别获得判断 c- 可补李 Rinehart 代数和 E- 李 Rinehart 代数的一个充分必要条件.

本文总假设 $\mathbb{K}$ 是域, A 是域 $\mathbb{K}$ 上的有单位元的交换代数.

定义 1.1 [8] 设 L 是域 $\mathbb{K}$ 上的李代数且有 A- 模结构, 若存在李代数同态 (anchor, 又称锚) $\alpha : L \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ 且满足

$$[x, ay] = a[x, y] + \alpha(x)(a)y,$$

其中 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ 是 A 的导子, $\forall\, x, y \in L$, $\forall\, a \in A$. 称 L 是李 Rinehart 代数, 也记为 (L, A, α).

注 1.1 (1) 当 $\alpha = \mathrm{Id}_{\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{A})}$ 时, $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ 正好是李 Rinehart 代数.

(2) 当 $\alpha = 0$ 时, L 正好是李 A- 代数. 若 $A = \mathbb{K}$, 则 $\mathrm{Der}(A) = 0$, 此时李 Rinehart 代数就是李代数. 因此从某种意义说, 李 Rinehart 代数是李代数的某种推广.

定义 1.2 [1] 设 (L, A, α) 和 (L', A, α') 是两个 A 上的李 Rinehart 代数. 称一个 A- 模同态 $\theta : L \to L'$ 为李 Rinehart 代数之间的同态, 若下面条件成立:

$$\theta[x, y] = [\theta(x), \theta(y)], \quad \alpha'\theta = \alpha, \quad \forall\, x, y \in L.$$

定义 1.3 [10] 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. 李 Rinehart 代数 L 的一个子代数 N 称为理想, 若 N 是李 $\mathbb{K}$ 代数 L 的理想, 且 $\alpha(x) = 0$, $\forall\, x \in N$.

定义 1.4[10] 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. 李 Rinehart 代数 L 的一个子代数 $C(L)$ 称为中心, 若 $C(L)=\{x\in L\mid [x,y]=0,\ \alpha(x)=0,\ \forall\, y\in L\}$.

定义 1.5[10] 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. L 的 (D,δ) 称为导子, 若 $D:L\to L$ 是线性映射且 $\delta\in \mathrm{Der}(A)$ 满足:

(1) $D[x,y]=[D(x),y]+[x,D(y)]$,

(2) $D(ax)=aD(x)+\delta(a)x, \forall\, x,y\in L,\ \forall\, a\in A$.

显然, $(\mathrm{ad}x,\delta)$ 是 L 的导子, 称其为内导子.

定义 1.6 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. L 的子代数 $F(L)$ 称为 Frattini 子代数, 若 $F(L)$ 是 L 的所有极大子代数的交; Frattini 理想 $\phi(L)$ 是指包含在 $F(L)$ 的 L 的理想且维数最大; 李 Rinehart 代数 L 称为 ϕ- 自由, 若 $\phi(L)=\{0\}$.

2 主要结果

引理 2.1 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, 则下列结论成立:

(1) 若 B 是 L 的子代数且满足 $B+F(L)=L$, 则 $B=L$.

(2) 若 B 是 L 的子代数满足 $B+\phi(L)=L$, 则 $B=L$.

证明 (1) 假设 $B\neq L$, 则 L 中存在一个极大子代数 M 满足 $B\subseteq M$. 由于 $F(L)\subseteq M$ 且 $B+F(L)=L$, 所以 $L=M$, 这与 M 是 L 的一个极大子代数矛盾. 故 $B=L$.

(2) 它的证明类似 (1). 证毕.

引理 2.2 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数且 B 是 L 的理想, 则 L 中存在真子代数 C, 使得 $L=B+C$ 当且仅当 $B\not\subseteq F(L)$.

证明 设 C 是 L 的存在真子代数满足 $L=B+C$. 若 $B\subseteq F(L)$, 则 $L=B+C\subseteq F(L)+C\subseteq L$. 所以 $L=F(L)+C$. 由引理 2.1 知 $C=L$, 这与 C 是 L 的真子代数矛盾. 因此 $B\not\subseteq F(L)$. 反之, 若 L 中不存在真子代数 C, 使得 $L=B+C$, 则 L 中每一个极大子代数都包含 B. 所以 $B\subseteq F(L)$, 这与已知矛盾. 证毕.

引理 2.3 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, C 是 L 的子代数且 B 是 L 的理想, 则下列结论成立:

(1) 若 $B\subseteq F(C)$, 则 $B\subseteq F(L)$.

(2) 若 $B\subseteq \phi(C)$, 则 $B\subseteq \phi(L)$.

证明 (1) 若 $C=L$, 则结论显然. 若 $C\neq L$ 且 $B\not\subseteq F(L)$, 则有引理 2.2 知 L 中存在真子代数 M, 使得 $L=B+M=C+M$. 由维数公式可得 $\dim C=\dim(B+C\cap M)$. 由于 $C\supseteq B+C\cap M$, 所以 $C=B+C\cap M$, 即

$$C=B+C\cap M\subseteq F(C)+C\cap M\subseteq C.$$

因此由引理 2.1 知 $F(C)+C\cap M=C$ 且 $C=M\cap C$, 即 $C\subseteq M$. 故 $L=B+M\subseteq C+M\subseteq M$, 矛盾. 所以 $B\subseteq F(L)$.

(2) 它的证明类似 (1). 证毕.

定义 2.4 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, L 的子代数 B 称为 c- 可补的, 若存在 L 的理想 C 满足 $L=B+C$ 与 $B\cap C\subseteq B_L$, 这儿 B_L 是包含 B 的 L 的理想且维数最大.

下面将证明一个 c- 可补李 Rinehart 代数的 Frattini 理想的子代数一定是 L 的理想.

定理 2.5 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, B, D 是 L 的子代数且满足 $B \subseteq \phi(D)$. 若 B 是 c- 可补于 L, 则 B 是 L 的理想且 $B \subseteq \phi(L)$.

证明 假设 $L = B + C$ 且 $B \cap C \subseteq B_L$, 则由 $B \subseteq \phi(D)$ 得

$$D = D \cap L = D \cap (B + C) = B + D \cap C \subseteq \phi(D) + D \cap C \subseteq D.$$

因此 $D = \phi(D) + D \cap C$, 则 $D = D \cap C$. 所以 $B \subseteq D \subseteq C$ 和 $B = B \cap C \subseteq B_L$, 且 $\alpha(x) = 0$, $\forall x \in B$. 故 B 是 L 的理想. 由引理 2.3 知 $B \subseteq \phi(L)$. 证毕.

定义 2.6 李 Rinehart 代数 L 称为基本的, 若对 L 的任意子代数 B 满足 $\phi(B) = \{0\}$; 李 Rinehart 代数 L 称为 E- 代数, 若对每一个 L 的子代数 B 满足 $\phi(B) \subseteq \phi(L)$.

定理 2.7 A 上的李 Rinehart 代数 L 是 c- 可补的, 则 L 是 E- 代数.

证明 在定理 2.5 中令 $B = \phi(D)$ 即可得所需结论. 证毕.

定理 2.8 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. 若 A 是 L 的理想且 B 是 L 的满足 $L = A + B$ 极小子代数, 则 $A \cap B \subseteq \phi(B)$.

证明 在定理 2.5 中令 $B = \phi(D)$ 即可得所需结论. 假设 $A \cap B \not\subseteq \phi(B)$, 由 $A \cap B$ 是 B 的理想与 $\phi(B)$ 的定义知, $A \cap B \not\subseteq F(B)$ 所以存在 B 的极大子代数 M 满足

$$A \cap B \not\subseteq M.$$

显然, $B = A \cap B + M$ 且 $L = A + (A \cap B + M) = A + M$, 与 B 的极小性矛盾. 故 $A \cap B \subseteq \phi(B)$. 证毕.

定义 2.9 A 上的李 Rinehart 代数 L 称为完全可分的, 若对每一个 L 的子代数 B, 都存在 L 的子代数 C 满足 $L = B + C$ 和 $B \cap C = \{0\}$.

引理 2.10 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, 则下面的结论成立:

(i) 若 B 是 c- 可补于 L, 且 $B \subseteq K \subseteq L$, 则 B 是 c- 可补于 K.

(ii) 若 I 是 L 的一个理想, 且 $I \subseteq B$, 则 B 是 c 可补于 L 当且仅当 B/I 是 c- 可补于 L/I.

证明 (i) 若 B 是 c- 可补于 L, 且 $B \subseteq K \subseteq L$, 则存在 L 的一个子代数 C 满足 $L = B + C$ 和 $B \cap C \subseteq B_L$, 所以 $K = (B + C) \cap K = B + C \cap K$ 和 $B \cap C \cap K \subseteq B_L \cap K \subseteq B_K$. 因此 B 是 c- 可补于 K.

(ii) 假设 B/I 是 c- 可补于 L/I, 则存在 L/I 的一个子代数 C/I 满足 $L/I = B/I + C/I$ 和 $(B/I) \cap (C/I) \subseteq (B/I)_{L/I} = B_L/I$, 所以 $L = B + C$ 和 $B \cap C \subseteq B_L$. 因此 B 是 c- 可补于 L.

反过来, 假设 I 是 L 的一个理想, 这儿 $I \subseteq B$ 且满足 B 是 c- 可补于 L, 则存在 L 的一个子代数 C 满足 $L = B + C$ 和 $B \cap C \subseteq B_L$. 因此

$$L/I = B/I + (C + I)/I$$

与

$$(B/I) \cap (C + I)/I = (B \cap (C + I))/I = (I + B \cap C)/I \subseteq B_L/I = (B/I)_{L/I}.$$

故 B/I 是 c- 可补于 L/I. 证毕.

定理 2.11 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, 则下面的结论等价:

(i) L 是 c- 可补的.

(ii) $L/\phi(L)$ 完全可分的, 且 $\phi(L)$ 的任意子代数是 L 的理想.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 首先假设 L 是 ϕ- 自由和 c- 可补的, 设 B 是 L 的子代数, 则存在 L 的一个子代数 C 满足 $L = B + C$. 取 L 的一个极小子代数 D 满足 $L = B + D$. 由定理 2.8 可得 $B \cap D \subseteq \phi(D)$. 因为 L 是基本的, 由定理 2.7 知 $B \cap D = \{0\}$. 因此 L 是完全可分的, 由引理 2.1 和定理 2.5 知 $\phi(L)$ 的任意子代数是 L 的理想.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 假设 (ii) 成立, 并设 B 是 L 的一个子代数, 则 $C/\phi(L)$ 中存在一个子代数满足

$$L/\phi(L) = ((B + \phi(L))/\phi(L)) + (C/\phi(L))$$

与

$$\{0\} = ((B + \phi(L))/\phi(L)) \cap (C/\phi(L)) = (B \cap C + \phi(L))/\phi(L).$$

因此 $L = B + C$ 且 $B \cap C \subseteq \phi(L)$. 故 $B \cap C$ 是 L 的一个理想且 $B \cap C \subseteq B_L$, 即 L 是 c- 可补的. 证毕.

定义 2.12[9] 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, $m \in \mathbf{N}$, $L^{(1)} = [L, L]$, 若 $L^{(m)} = [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] = \{0\}$, 则称 L 是可解李 Rinehart 代数.

定义 2.13[9] 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. 若存在 $m \in \mathbf{N}$, 使得 $L^m = [L, L^{m-1}] = \{0\}$, 则称 L 是幂零李 Rinehart 代数. L 的极大幂零理想称为 L 的幂零根基, 记为 $N(L)$.

定理 2.14 设 L 是 A 上的可解李 Rinehart 代数, 则 L 的所有极大子代数是 c- 可补于 L.

证明 已知 L 是可解的, 并设 M 是 L 的一个极大子代数, 存在正整数 $k \geq 2$, 使得 $L^{(k)} \subseteq M$, 但是 $L^{(k-1)} \not\subseteq M$. 所以 $L^{(k-1)}$ 是 L 的一个理想, 且

$$L = M + L^{(k-1)}$$

与

$$M \cap L^{(k-1)} \subseteq M_L,$$

故 M 是 L 的 c- 理想. 证毕.

定理 2.15 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数. 若 L 的所有极大幂零子代数都是 c- 可补于 L, 则 L 是可解的.

证明 设 $N(L)$ 是 L 的幂零根基且 $x \notin N(L)$, 则存在 L 的极大幂零子代数 B 满足 $x \in B$ 且存在 L 的理想 C 满足 $L = B + C$ 与 $B \cap C \subseteq B_L$. 显然 $x \notin B_L \subseteq N(L)$, 则 $x \notin C$. 而且 $L/C \cong B/(B \cap C)$ 是幂零的. 若 $x \notin N(L)$, 则存在 L 的理想 C 满足 $x \notin C$. 故 L/C 是幂零的.

设 $x_1 \notin N(L)$ 与 C_1 是满足 $x_1 \notin C_1$ 的理想且 L/C_1 是幂零的. 若 $C_1 \subseteq N(T)$, 则结论成立. 若不是, 则选取 $x_2 \in C_1 \setminus N(L)$ 并设 C_2 是满足 $x_2 \notin C_2$ 的理想且 L/C_2 幂零. 显然

$$\dim(C_1 \setminus C_2) < \dim C_1.$$

若 $C_1 \setminus C_2 \not\subseteq N(L)$, 选取

$$x_3 \in (C_1 \setminus C_2) \setminus N(L).$$

运用相同的方法可以找到 L 的理想 $C_1, \ldots, C_n$ 满足

$$C_1 \cap \cdots \cap C_n \subseteq N(L)$$

与 L/C_i 对 $1 \leq i \leq n$ 是幂零的. 由于 $L/(C_1 \cap \cdots \cap C_n)$ 是可解的, 所以结论成立.

利用定理 2.7 知, 若 L 是 c- 可补的, 则 L 是 E- 李 Rinehart 代数. 显然, 每一个基本李 Rinehart 代数是 E- 李 Rinehart 代数. 下面给出一类特殊的 c- 可补李 Rinehart 代数和 E- 李 Rinehart 代数的性质. 证毕.

引理 2.16 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, 若 B 是 L 的理想, 则下列结论成立:

(1) $(F(L)+B)/B \subseteq F(L/B)$ 和 $(\phi(L)+B)/B \subseteq \phi(L/B)$.

(2) 若 $B \subseteq F(L)$, 则 $F(L)/B = F(L/B)$ 和 $\phi(L)/B = \phi(L/B)$.

(3) 若 $F(L/B) = \{0\}$ (或 $\phi(L/B) = \{0\}$), 则 $F(L) \subseteq B$ (或 $\phi(L) \subseteq B$).

证明 (1) 设 $F(L/B) = T/B$, 则 T 是 L 的所有极大子代数的交且包含 B, 所以 $T \supseteq F(L)$, 则 $(F(L)+B)/B \subseteq F(L/B)$. 类似可证 $(\phi(L)+B)/B \subseteq \phi(L/B)$.

(2) 因为 B 是 L 的包含在 $F(L)$ 的理想, 所以由引理 2.3 (1) 知 $F(L)/B \subseteq F(L/B)$. 易知 $F(L)/B \supseteq F(L/B)$, 则 $F(L)/B = F(L/B)$. 类似可证 $(\phi(L)+B)/B = \phi(L/B)$.

(3) 由引理 2.3 (2) 与 $F(L/B) = \{0\}$ 可得 $(F(L)+B)/B = \{0\}$, 即 $F(L) \subseteq B$. 若 $\phi(L/B) = \{0\}$, 类似可证 $\phi(L) \subseteq B$. 证毕.

定理 2.17 设 L 是 A 上的李 Rinehart 代数, 则 L 是 A 上的 E- 李 Rinehart 代数当且仅当 $L/\phi(L)$ 是基本的.

证明 ($\Rightarrow$) 假设 L 是 E- 李 Rinehart 代数, 并设 $S/\phi(L)$ 是 $L/\phi(L)$ 的一个子代数. 取 L 的一个满足 $\phi(L)+U=S$ 的极小子代数. 设 T 是 S 的一个理想且满足 $T/\phi(L) = \phi(S/\phi(L))$. 若 $T \subset \phi(L)$, 则 $\phi(S/\phi(L)) = \{0\}$. 故 $L/\phi(L)$ 是基本的. 若 $T = \phi(L)$, 显然 $L/\phi(L)$ 是基本的.

下面证明 $T = \phi(L)$.

假设 $T \supset \phi(L)$. 由 $T \supseteq \phi(L) + T \cap U$ 和

$$\begin{aligned}\dim(\phi(L)+T\cap U) &= \dim\phi(L) + \dim(T\cap U) - \dim(T\cap U\cap\phi(L))\\ &= \dim\phi(L) + \dim(T\cap U) - \dim(\phi(L)\cap U)\\ &= \dim\phi(L) + \dim T + \dim U - \dim(T+U) - \dim(\phi(L)\cap U)\\ &= \dim(\phi(L)+U) + \dim T - \dim(T+U)\\ &= \dim T - \dim(T+U) + \dim S\\ &\geq \dim T\end{aligned}$$

可得 $T = \phi(L) + T\cap U$, 即 $T = T\cap S = T\cap(\phi(L)+U) = \phi(L) + T\cap U$. 若 $T\cap U \subseteq \phi(L)$, 则 $T = \phi(L) + T\cap U = \phi(L)$, 存在矛盾. 所以 $T\cap U \not\subseteq \phi(L)$. 由 L 是 E- 李 Rinehart 代数可得 $T\cap U \not\subseteq \phi(U)$. 但是 $T\cap U$ 是 U 的理想, 则 $T\cap U \not\subseteq F(U)$. 因此存在 U 的一个极大子代数满足 $T\cap U \not\subseteq M$ 和 $U = M + T\cap U$.

由 U 的极小性可得 $\phi(L)+M \neq S$. 下证 $\phi(L)+M$ 是 S 一个极大子代数. 假设 $\phi(L)+M \subset J \subset S$, 则 $M \subseteq J\cap U \subseteq U$, 则由 M 的极大性, 可得 $J\cap U = M$ 或 $J\cap U = U$.

由 $J \supseteq \phi(L) + J\cap U$ 和

$$\begin{aligned}\dim(\phi(L)+J\cap U) &= \dim\phi(L) + \dim(J\cap U) - \dim(J\cap U\cap\phi(L))\\ &= \dim\phi(L) + \dim(J\cap U) - \dim(\phi(L)\cap U)\\ &= \dim\phi(L) + \dim J + \dim U - \dim(J+U) - \dim(\phi(L)\cap U)\\ &= \dim(\phi(L)+U) + \dim J - \dim(J+U)\\ &= \dim J - \dim(J+U) + \dim S\\ &\geq \dim J\end{aligned}$$

可得 $J=\phi(L)+J\cap U$.

同时, 由 $J\supseteq J\cap(\phi(L)+U)$ 和

$$\begin{aligned}\dim(J\cap(\phi(L)+U)) &= \dim J+\dim(\phi(L)+U)-\dim(J+U+\phi(L))\\ &= \dim J+\dim S-\dim(J+U+\phi(L))\\ &= \dim J+\dim S-\dim S\\ &= \dim J\end{aligned}$$

可得 $J=J\cap(\phi(L)+U)$. 所以 $J=J\cap(\phi(L)+U)=\phi(L)+J\cap U$, 则 $J\cap U=M$ 推出

$$\phi(L)+M=\phi(L)+J\cap U=J\cap(\phi(L)+U)=J\cap S=J.$$

矛盾. $J\cap U=U$ 可得 $U\subseteq J$ 且 $J\supseteq\phi(L)+U=S$, 也有矛盾. 故 $\phi(L)+M$ 是 S 的一个极大子代数, 则 $(\phi(L)+M)/\phi(L)\supseteq\phi(S/\phi(L)))=T/\phi(L)$ 和 $T\subseteq\phi(L)+M$. 所以 $T\cap U\subseteq T\subseteq\phi(L)+M$ 且 $S=\phi(L)+U=\phi(L)+M+T\cap U=\phi(L)+M$, 这与 U 的极小性矛盾. 所以 $T=\phi(L)$, 进而 $\phi(S/\phi(L))=\{0\}$, 故 $L/\phi(L)$ 是基本李 Rineharta 代数.

($\Leftarrow$)　假设 $L/\phi(L)$ 是基本李 Rineharta 代数, 并设 S 是 L 的一个子代数. 由引理 2.16 可得 $(\phi(S)+\phi(L))/\phi(L)\subseteq\phi((S+\phi(L))/\phi(L))=\{0\}$. 因此 $\phi(S)\subseteq\phi(L)$ 对 L 的任意子代数 S 都成立. 故 L 是 E- 李 Rineharta 代数. 证毕.

引理 2.18　设 L 是 A 上的可解李 Rinehart 代数, 若 A 是 L 的极小理想, 则 A 是可换的.

证明　设 A 是 L 的极小理想. 易知 $[L,A]$ 是 L 的理想. 由于 A 是 L 的极小理想, 所以 $[L,A]=A$ 或 $[L,A]=\{0\}$. 若 $[L,A]=A^{(2)}=A$, 则 $A^{(k+1)}=[L,A^{(k)}]=[L,A]$. 由于 L 是可解李 Rinehart 代数, 则存在 $k\in\mathbf{N}$, 使得 $[L,A]=A^{(k+1)}=\{0\}$. 因此 A 是可换的. 证毕.

定理 2.19　设 L 是 A 上的可解李 Rinehart 代数, 则 $F(L)$ 是 L 的理想.

证明　当 $\dim T=1$ 时, 结论显然.

设 A 是 L 的极小理想. 令 $F(L:A)=\cap\{M: A\subseteq M,\ M$ 是 L 的极大子代数$\}$, 则 $F(L:A)/A=F(L/A)$ 且由归纳假设知 $F(L:A)$ 是 L 的理想.

若 $A\subseteq F(L)$, 则 $F(L)=F(L:A)$ 是 L 的理想. 假设 $A\not\subseteq F(L)$, 则由引理 2.2 知存在 L 的极大子代数, 使得 $L=M+A$. 因为 A 是 L 的极小理想, 所以由引理 2.18 知 $[L,A]=\{0\}$, 则 $A\subseteq C_L(A)$ 且 $[A\cap M,L]=[A\cap M,M+A]\subseteq A\cap M$, 即 $A\cap M$ 且 L 的理想且包含于 A, 因此 $L=A\dotplus M$. 若 $A\subset C_L(A)$, 则 $\{0\}\subset M\cap C_L(A)\lhd L$ 且 L 的每一个极大子代数 M 包含某个极小理想 B. 故 $F(L)=\cap\{F(L:B)$: B 是 L 的极小理想$\}$, 故结论成立.

假设 $C_L(A)=A$. 将证明 $F(L)=\{0\}$. 设 M 是 L 的不包含 A 的子代数且 $m\in M$, $m\notin A$. 我们将证明 $m\notin F(L)$. 由 $m\notin C_L(A)=A$ 可得存在 $a\in A$, 使得 $[m,a]\neq 0$. 令 $\theta: L\to L$ 满足 $\theta=\mathrm{id}_L+\mathrm{ad}a$. 由 $(\mathrm{ad}a)^2=0$ 可得 $(\mathrm{id}_L+\mathrm{ad}a)(\mathrm{id}_L-\mathrm{ad}a)=\mathrm{id}_L$, 则 θ 是 L 的自同构. 设 $M_1=\theta(M)$. 易知 M_1 是 L 的极大子代数. 若 $m\in M_1$, 则存在 $m'\in M$, 使得 $m=m'+[m',a]$. 因此 $[a,m']\in M$, 则 $[a,m]\in A\cap M=\{0\}$, 即存在 $m\in L$, 使得 $[m,a]=0$. 但是 $[m,a]\neq 0$, 矛盾. 因此 $m\notin M_1=\theta(M)$, 即 $m\notin F(L)$. 故 $F(L)=\{0\}$, 则 $F(L)$ 是 L 的理想, 进而 $F(L)=\phi(L)$. 证毕.

引理 2.20　设 L,G 是 A 上的李 Rinehart 代数, 若 f 是 L 到 G 的满同态, 则 $f(F(L))\subseteq F(G)$.

证明 设 N 是 G 的极大子代数, 则 $M = f^{-1}(N)$ 是 L 的极大子代数, 即 $f(M) = N$. 若 M 是 L 的子代数, 则 N 是 G 的子代数. 所以 $f(x) \in f(M) = N$, $\forall x \in F(L)$. 故

$$f(F(L)) \subseteq F(G).$$

证毕.

定理 2.21 设 L 是 A 上的可解 E- 李 Rinehart 代数, 且 $f: L \to L/\mathrm{Ker}f$ 是满同态, 则 $f(\phi(L)) = \phi(f(L))$.

证明 L 是可解, 则由定理 2.19 可得 $F(L) = \phi(L)$. 由引理 2.20 可得 $f(\phi(L)) \subseteq \phi(f(L))$. 显然 $\mathrm{Ker}f$ 是 L 的理想. 若 $\mathrm{Ker}f \subseteq \phi(L)$, 则

$$\phi(f(L)) = \phi(L/\mathrm{Ker}f) = \phi(L)/\mathrm{Ker}f = f(\phi(L)).$$

若 $\mathrm{Ker}f \not\subseteq \phi(L)$, 则存在满足 $L = K + \mathrm{Ker}f$ 的极小子代数 K. 易知

$$\phi(f(L)) = \phi(L/\mathrm{Ker}f) \cong (\mathrm{Ker}f + \phi(K))/\mathrm{Ker}f = f(\mathrm{Ker}f + \phi(K)) = f(\phi(K)).$$

由于 L 是 E- 李 Rinehart 代数, 可得 $\phi(K) \subseteq \phi(L)$, 则 $f(\phi(K)) \subseteq f(\phi(L))$. 故

$$f(\phi(L)) = \phi(f(L)).$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Casas J., Ladra M., Pirashvili T., Crossed modules for Lie–Rinehart algebras, *J. Algebra*, 2004, **274**: 192–201.

[2] Casas J., Obstructions to Lie–Rinehart Algebra Extensions, *Algebra Colloq.*, 2011 **18**: 83–104.

[3] Chen Z., Liu Z., Zhong D., Lie–Rinehart bialgebras for crossed products, *J. Pure Appl. Algebra*, 2011, **215**: 1270–1283.

[4] Dokas I., Cohomology of restricted Lie–Rinehart algebras and the Brauer group, *Adv. Math.*, 2012, **231**: 2573–2592.

[5] Helge M., Chern classes and Lie–Rinehart algebras, *Indag. Math.*, 2007, **18**: 589–599.

[6] Herz J., Pseudo-algèbras de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1953, **236**: 1935–1937.

[7] Huebschmann J., Extensions of Lie–Rinehart Algebras and the Chern–Weil Construction, Contemp. Amer. Math. Soc., 1999, **227**: 145–176.

[8] Huebschmann J., Poisson cohomology and quantization, *J. Reine Angew. Math.*, 1990, **408**: 57–113.

[9] Sun B., Chen L., Restricted and quasi-toral restricted Lie–Rinehart algebras, *Open Math.*, 2015: 518–527.

[10] Song H., Zhou J., Chen L., C-supplemented subalgebras of Lie supertriple systems and E-Lie supertriple systemsc, *Journal of Jilin University* (*Science Edition*), 2012, **50**(4): 681–685.

[11] Tomasz M., A Pairing Between Super Lie–Rinehart and Periodic Cyclic Homology, *Commun. Math. Phys.*, 2006, **263**(3): 737–747.

[12] Wu X., Chen L., The Frattini subsystem of a Lie supertriple system, *J. Math. Res. Exposition*, 2010, **30**(3): 399–406.

[13] Wu X., Chen L., C-supplemented subalgebras of a Lie superalgebra, *Adv. Math. China*, 2011, **40**(4): 407–412.

[14] Wu X., Zhao X., Zhou L., et al., Some properties of solvable δ-Lie supertriple system, *Journal of Jilin University* (*Science Edition*), 2016, **54**(6): 1205–1209.