第65卷第6期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.65, No.6
2022年11月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Nov., 2022

DOI: 10.12386/A20190028　　**文献标识码: A**

分数扩散过程的分部积分及其刻画

孙晓霞

东北财经大学数据科学与人工智能学院 大连 116025
E-mail: fly428@163.com

倪宣明

北京大学软件与微电子学院 北京 100871
E-mail: nixm@ss.pku.edu.cn

摘　要　本文研究分数扩散过程和其分部积分公式的关系. 首先利用 Bismut 方法给出拉回公式, 进而得到分数扩散过程的分部积分公式. 反过来, 证明了分数扩散过程可由其分部积分公式唯一刻画.

关键词　分数扩散过程; 分部积分公式; 刻画
MR(2010) 主题分类　60G22
中图分类　O211.63

On the Integration by Parts and Characterization of a Fractional Diffusion Process

Xiao Xia SUN

School of Data Science and Artificial Intelligence,
Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025*, P. R. China*
E-mail: *fly428@163.com*

Xuan Ming NI

School of Software & Microelectronics,
Peking University, Beijing 100871*, P. R. China*
E-mail: *nixm@ss.pku.edu.cn*

Abstract　The relationship between a fractional diffusion process and its integration by parts formula is studied. By constructing a pull back formula, the integration by parts formula for fractional diffusion process is established. Conversely, a fractional diffusion process can be characterized through its integration by parts formula.

Keywords　fractional diffusion process; integration by parts formula; characterization
MR(2010) Subject Classification　60G22
Chinese Library Classification　O211.63

收稿日期: 2019-03-16; 接受日期: 2021-12-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801064)
通讯作者: 倪宣明

1 引言

设分数扩散过程 $(X_t)_{0\le t\le 1}$ 满足

$$dX_t = A_tX_tdt + b_tdt + \sigma_t dB_t^H, \quad X_0 = 0, \tag{1.1}$$

其中 A, b, σ 是有界连续函数以及 $(B_t^H)_{0\le t\le 1}$ 是赫尔斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动. 分数扩散过程具有长记忆性以及自相似性的特点, 此过程被广泛应用到物理、金融、保险和网络等领域. 本文研究一类分数扩散过程的分部积分公式及其刻画.

在无穷维随机分析领域, 许多文献都是关于随机过程分部积分公式的研究, 例如, 对于路径空间上的布朗运动, 文 [3, 7, 8] 给出了此过程的分部积分公式, 文 [1, 4, 6, 9] 给出环路空间上布朗桥的分部积分公式, 文 [2, 5] 证明了分数布朗运动的分部积分公式. 对于分数 Ornstein–Uhlenbeck 过程, 文 [16] 给出了其分部积分公式并且对此过程进行了分部积分公式刻画. 文 [17] 证明了分数 Cameron–Martin 空间下分数 Ornstein–Uhlenbeck 过程的分部积分公式和鞅表示定理. 本文推广了上述结论, 即证明了分数 Cameron–Martin 空间下, 一类分数扩散过程的分部积分公式.

反过来, 一个自然且有意义的问题是研究由分部积分公式唯一刻画分数扩散过程. 很多学者研究了有限维空间和无穷维空间上相关过程可由其分部积分公式刻画的问题. 1972 年, 文 [15] 建立了 Stein 方程并且得到欧氏空间的高斯测度可由相应的分部积分公式唯一刻画. 2005 年, 文 [10] 给出了平坦路径空间上布朗运动可由相应的分部积分公式刻画以及黎曼流形路径空间上的布朗运动可由相应的分部积分公式唯一刻画; 2005 年, 文 [11] 利用相似的方法给出了黎曼流形路径空间上的扩散过程的刻画; 文 [14] 在 2011 年给出了无穷维 Banach 空间高斯测度的刻画以及相应的无穷维 Stein 方程的解. 文 [17] 证明了平坦路径空间上的分数 Ornstein–Uhlenbeck 过程可由其分部积分公式唯一刻画. 本文证明一般分数扩散过程也可由其分部积分公式唯一刻画.

2 预备知识

平坦路径空间为

$$\Omega = \{\omega \in C([0,1];\mathbb{R}^n) \mid \omega_0 = 0\},$$

设其拓扑为一致收敛. 考虑概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \nu)$, 其中 ν 为使得坐标过程 $(X_t(\omega))_{0\le t\le 1} = (\omega_t)_{0\le t\le 1}$ 满足方程 (1.1) 的分数扩散测度, $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le 1}$ 为坐标过程生成的自然 σ- 代数流以及 $\mathscr{F}$ 为坐标过程生成的 σ- 代数. 设 $(B_t^H = (B_1^H(t), \dots, B_n^H(t)), t \ge 0)$ 为 $\mathbb{R}^n$- 值高斯过程, 如果

(1) 对于 $i = 1, \dots, n$, $(B_i^H(t), t \ge 0)$ 为 $H > \frac{1}{2}$ 的实值分数布朗运动, 即对任意 i,

$$\mathbb{E}_\nu[B_i^H(t)] = 0, \quad \mathbb{E}_\nu[B_i^H(t)B_i^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \ge 0,$$

(2) 当 $i \ne j$, $(B_i^H(t), t \ge 0)$ 和 $(B_j^H(t), t \ge 0)$ 是相互独立的,

则称此高斯过程为 n 维分数布朗运动. 此时, $B_i^H(s)$ 和 $B_i^H(t)$ 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(B_i^H(s), B_i^H(t)) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

令 $L^2(\Omega; dt\times\nu) = \{h \mid h : \Omega \to [0,t]\times\mathbb{R}, \mathbb{E}_\nu[\int_0^1 |h_s|^2 ds] < \infty\}$. 设

$$K(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t u^{H-\frac{1}{2}}(u-s)^{H-\frac{3}{2}}du, \tag{2.1}$$

其中

$$c_H = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{B(2-2H, H-\frac{1}{2})}}. \tag{2.2}$$

上式中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 beta 函数. 由文 [2], 设 $I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2(\Omega; dt\times\nu))$ 表示 $(H+\frac{1}{2})$-Hölder 左分数 Riemann–Liouville 积分算子. 同构算子 $K: L^2(\Omega; dt\times\nu) \to I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2(\Omega; dt\times\nu))$ 定义为

$$(Kh)_t = \int_0^t K(t,s)h_s ds,$$

其中 $h \in L^2(\Omega; dt\times\nu)$. 设 K^{-1} 为 K 的逆算子, 则当 $H > \frac{1}{2}$,

$$(K^{-1}h)_t = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}\left(t^{\frac{1}{2}-H}h'_t + \left(H-\frac{1}{2}\right)t^{H-\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{t^{\frac{1}{2}-H}h'_t - u^{\frac{1}{2}-H}h'_u}{(t-u)^{\frac{1}{2}+H}}du\right), \tag{2.3}$$

其中 h' 为 h 的导函数. 根据文 [2, 定理 3.3], Ω 上的 Cameron–Martin 向量场定义为

$$\mathscr{H}_H = \{Kh \mid h \text{ 为适应随机过程且 } h \in L^2(\Omega; dt\times\nu)\},$$

其内积为

$$\langle Kh, Kg\rangle_{\mathscr{H}_H} = \langle h, g\rangle_{L^2(\Omega; dt\times\nu)} = \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 \langle h_t, g_t\rangle dt\right].$$

函数 F 沿着 Kh 的方向导数定义为

$$D_h F(\omega) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(F\left(\omega + \delta(Kh)\right) - F(\omega)\right).$$

Ω 上的柱集函数表示为

$$\mathscr{F}C^\infty(\Omega) = \{F \mid F(\omega) = f(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}),\ 0 < t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le 1,\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

利用定义知柱集函数 F 关于 Kh 的方向导数为

$$D_h F(\omega) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^i F, (Kh)_{t_i}\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

其中 $\nabla^i F = \nabla^i f(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n})$ 为函数 f 的方向导数的第 i 个变量. 梯度 $DF: \Omega \to \mathscr{H}_H$ 定义为

$$\langle DF, Kh\rangle_{\mathscr{H}_H} = D_h F.$$

D 的定义域记为 $\mathrm{Dom}(D)$.

3 分数扩散测度的分部积分公式

本文假设随机微分方程 (1.1) 的系数 A 以及 σ 的逆 σ^{-1} 满足: 存在常数 C 和 $\widehat{C}$, 使得

$$|A_t - A_s| \le C|t-s|, \quad |\sigma_t^{-1} - \sigma_s^{-1}| \le \widehat{C}|t-s|. \tag{3.1}$$

下面利用 Bismut 方法, 通过拉回公式我们给出分数扩散过程的分部积分公式.

定理 3.1 对任意 $F \in \mathrm{Dom}(D)$ 和 $Kh \in \mathscr{H}_H$, 分数扩散过程 X 的分部积分公式为

$$\mathbb{E}_\nu\left[F\int_0^1 \left\langle \left(K^{-1}\int_0^\cdot \beta_u du\right)_t, dB_t\right\rangle\right] = \mathbb{E}_\nu[D_h F], \tag{3.2}$$

其中 $\beta_t = \sigma_t^{-1}((Kh)'_t - A_t(Kh)_t)$.

证明 (1) 首先给出分数扩散过程的拉回公式. 令 β 为 $\mathbb{R}^n$ 值适应过程, 对任意的 $r\in(-\epsilon,\epsilon)$, 坐标过程 $(X_t)_{0\le t\le 1}$ 的变分方程为

$$dX_t(r)=A_tX_t(r)dt+b_tdt+\sigma_tdB_t^H(r), \tag{3.3}$$

其中 $B_t^H(r)=B_t^H+r\int_0^t\beta_sds$. 设变分方程 (3.3) 的解 $X_t(r)_{0\le t\le 1}\in\Omega$ 满足 $\frac{d}{dr}X_t(r)\big|_{r=0}$ 存在且对任意 $(h_t)_{0\le t\le 1}\in L^2(\Omega;dt\times\nu)$, $(Kh)_t=\frac{d}{dr}X_t(r)\big|_{r=0}$. 对等式 (3.3) 的两端关于 r 在 $r=0$ 点求导数, 我们得到

$$d\frac{d}{dr}X_t(r)\Big|_{r=0}=A_t\frac{d}{dr}X_t(r)\Big|_{r=0}dt+\sigma_td\frac{d}{dr}B_t^H(r)\Big|_{r=0}.$$

因此 $(Kh)'_tdt=A_t(Kh)_tdt+\sigma_t\beta_tdt$, 即 $\beta_t=\sigma_t^{-1}((Kh)'_t-A_t(Kh)_t)$.

(2) 由文 [2] 可知, 存在布朗运动 $(B_t)_{0\le t\le 1}$, 使得 $B_t^H=\int_0^tK(t,s)dB_s$. 因此

$$B_t^H(r)=\int_0^tK(t,s)d\left(B_s+r\int_0^s\left(K^{-1}\int_0^{\cdot}\beta_udu\right)_vdv\right).$$

对任意 $t\in[0,1]$, 令

$$\rho_t=\exp\left\{-r\int_0^t\left\langle\left(K^{-1}\int_0^{\cdot}\beta_udu\right)_s,dB_s\right\rangle-\frac{r^2}{2}\int_0^t\left(K^{-1}\int_0^{\cdot}\beta_udu\right)_s^2ds\right\}.$$

由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}&\left(K^{-1}\int_0^{\cdot}\beta_udu\right)_s\\&=\frac{1}{\Gamma(\frac32-H)}\Bigg(s^{\frac12-H}\sigma_s^{-1}((Kh)'_s+A_s(Kh)_s)\\&\quad+\left(H-\frac12\right)s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}\sigma_s^{-1}((Kh)'_s+A_s(Kh)_s)-u^{\frac12-H}\sigma_u^{-1}((Kh)'_u+A_u(Kh)_u)}{(s-u)^{\frac12+H}}du\Bigg)\\&=I_1+I_2+I_3+I_4,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{\sigma_s^{-1}}{\Gamma(\frac32-H)}\left(s^{\frac12-H}(Kh)'_s+\left(H-\frac12\right)s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}(Kh)'_s-u^{\frac12-H}(Kh)'_u}{(s-u)^{\frac12+H}}du\right)\\I_2&=\frac{H-\frac12}{\Gamma(\frac32-H)}s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{u^{\frac12-H}(Kh)'_u(\sigma_s^{-1}-\sigma_u^{-1})}{(s-u)^{\frac12+H}}du\\I_3&=\frac{\sigma_s^{-1}A_s}{\Gamma(\frac32-H)}\left(s^{\frac12-H}(Kh)_s+\left(H-\frac12\right)s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{s^{\frac12-H}(Kh)_s-u^{\frac12-H}(Kh)_u}{(s-u)^{\frac12+H}}du\right)\\I_4&=\frac{H-\frac12}{\Gamma(\frac32-H)}s^{H-\frac12}\int_0^s\frac{u^{\frac12-H}(Kh)_u(\sigma_s^{-1}A_s-\sigma_u^{-1}A_u)}{(s-u)^{\frac12+H}}du.\end{aligned}$$

下面分别对上式进行估计. 由 K 和 K^{-1} 的定义可知 $I_1=\sigma_s^{-1}(K^{-1}\int_0^{\cdot}(Kh)'_udu)_s=\sigma_s^{-1}h_s$. 因此

$$\int_0^1I_1^2ds\le\widehat{C}^2\int_0^1|h|_u^2du. \tag{3.4}$$

由 (2.1) 可得

$$(Kh)_u=c_H\int_0^u\int_0^vs^{\frac12-H}v^{H-\frac12}(v-s)^{H-\frac32}h_sdsdv,$$

从而

$$(Kh)'_u = c_H \int_0^u v^{\frac{1}{2}-H} u^{H-\frac{1}{2}} (u-v)^{H-\frac{3}{2}} h_v dv.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 I_2^2 ds &= \int_0^1 \left(\frac{H-\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} s^{H-\frac{1}{2}} \int_0^s c_H \int_v^s v^{\frac{1}{2}-H} u^{H-\frac{1}{2}} \frac{u^{\frac{1}{2}-H}(\sigma_s^{-1}-\sigma_u^{-1})}{(s-u)^{\frac{1}{2}+H}} (u-v)^{H-\frac{3}{2}} du h_v dv \right)^2 ds \\ &\leq \frac{(H-\frac{1}{2})^2 c_H^2 \widehat{C}^2}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)} \int_0^1 \int_0^s v^{1-2H} \left(\int_v^s (s-u)^{\frac{1}{2}-H} (u-v)^{H-\frac{3}{2}} du \right)^2 dv ds \int_0^1 |h|_u^2 du \\ &\leq \frac{(H-\frac{1}{2})^2 c_H^2 \widehat{C}^2 B^2(\frac{3}{2}-H, H-\frac{1}{2})}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)(2-2H)} \int_0^1 |h|_u^2 du. \end{aligned} \tag{3.5}$$

易知 I_3 可化解为

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\sigma_s^{-1} A_s s^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} (Kh)_s + \frac{\sigma_s^{-1} A_s (H-\frac{1}{2}) s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} \int_0^s \frac{s^{\frac{1}{2}-H} - u^{\frac{1}{2}-H}}{(s-u)^{\frac{1}{2}+H}} (Kh)_u du \\ &\quad + \frac{\sigma_s^{-1} A_s (H-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} \int_0^s \frac{(Kh)_s - (Kh)_u}{(s-u)^{\frac{1}{2}+H}} du. \end{aligned} \tag{3.6}$$

根据 [2, 引理 3.1], 存在常数 C_1, 使得

$$|K(s,t)| \leq C_1 t^{\frac{1}{2}-H}. \tag{3.7}$$

因此, 由 Hölder 不等式可知

$$|(Kh)_s| \leq \left(\int_0^s K^2(s,u) du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |h|_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_1 s^{1-H}}{\sqrt{2-2H}} \left(\int_0^1 |h|_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

由文 [12] 可知存在常数 $C_2 < 0$, 使得

$$\int_0^s \frac{s^{\frac{1}{2}-H} - u^{\frac{1}{2}-H}}{(s-u)^{\frac{1}{2}+H}} du = C_2 s^{1-2H}. \tag{3.9}$$

由文 [13, 定理 3.6] 可知 Kh 为 H-Hölder 连续函数, 因此, 由 (3.6), (3.8) 和 (3.9) 可知存在常数 C_3, 使得

$$\int_0^1 |I_3|^2 ds \leq \left(\frac{4C_1^2 C^2 \widehat{C}^2 + 4\left(H-\frac{1}{2}\right)^2 C_1^2 C_2^2 C^2 \widehat{C}^2}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)(2-2H)(4-4H)} + \frac{C_3^2 C^2 \widehat{C}^2 \left(H-\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)} \right) \int_0^1 |h|_u^2 du. \tag{3.10}$$

由 (3.8) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 I_4^2 ds &= \int_0^1 \left(\frac{H-\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} s^{H-\frac{1}{2}} \int_0^s \frac{u^{\frac{1}{2}-H}(Kh)_u \left(\sigma^{-1}(A_s - A_u) + (\sigma_s^{-1} - \sigma_u^{-1}) A_u \right)}{(s-u)^{\frac{1}{2}+H}} du \right)^2 ds \\ &\leq \frac{4(H-\frac{1}{2})^2 C^2 \widehat{C}^2 C_1^2}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)(2-2H)} \int_0^1 \left(\int_0^s u^{\frac{3}{2}-2H} (s-u)^{\frac{1}{2}-H} du \right)^2 ds \int_0^1 |h|_u^2 du \\ &\leq \frac{4(H-\frac{1}{2})^2 C^2 \widehat{C}^2 C_1^2 B^2(\frac{5}{2}-2H, \frac{3}{2}-H)}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-H)(2-2H)} \int_0^1 |h|_u^2 du. \end{aligned} \tag{3.11}$$

假设 h 为有界适应过程, 则由 (3.4), (3.5), (3.10) 和 (3.11) 可得 $\mathbb{E}_\nu[\rho_1] = 1$. 易知

$$\int_0^\cdot \beta_u du \in I_{0+}^{H+\frac{1}{2}} (L^2(\Omega; dt \times \nu)).$$

因此, 根据文 [12, 定理 2], $\left(B_t^H(r)\right)_{0\le t\le 1}$ 为 $\rho_1\nu$ 下的分数布朗运动. 从而 $(X_t(r))_{0\le t\le 1}$ 在测度 $\rho_1\nu$ 下的分布和 $(X_t)_{0\le t\le 1}$ 在测度 ν 下的分布相同, 即对任意 $F=f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in\mathscr{F}\mathscr{C}^\infty(\Omega)$,

$$\mathbb{E}_{\rho_1\nu}[f(X_{t_1}(r),\dots,X_{t_n}(r))]=\mathbb{E}_\nu[f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})].$$

对上式等式两端 r 求导数得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\mathbb{E}_\nu[\rho_1 f(X_{t_1}(r),\dots,X_{t_n}(r))]|_{r=0}\\&\quad=\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d}{dr}\rho_1\Big|_{r=0}f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\right]+\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d}{dr}f(X_{t_1}(r),\dots,X_{t_n}(r))\Big|_{r=0}\right]\\&\quad=-\mathbb{E}_\nu\left[F\int_0^1\left\langle\left(K^{-1}\int_0^\cdot\beta_u du\right)_t,dB_t\right\rangle\right]+\mathbb{E}_\nu[D_hF]=0.\end{aligned}$$

因此, 对有界适应过程 h, 下述分部积分公式成立:

$$\mathbb{E}_\nu\left[F\int_0^1\left\langle\left(K^{-1}\int_0^\cdot\beta_u du\right)_t,dB_t\right\rangle\right]=\mathbb{E}_\nu[D_hF].\tag{3.12}$$

另一方面, 当 $h\in L^2(\Omega;dt\times\nu)$, 显然有

$$\left(K^{-1}\int_0^\cdot\beta_u du\right)_{0\le t\le 1}\in L^2(\Omega;dt\times\nu).$$

因此, 对任意 $h\in L^2(\Omega;dt\times\nu)$, 分部积分公式 (3.12) 成立. 利用逼近方法, 易证对任意 $F\in\mathrm{Dom}(D)$, 分部积分公式 (3.12) 成立. 证毕.

下面通过分部积分公式在半鞅范围内刻画分数扩散过程.

定理 3.2 设概率空间为 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mu)$. 如果在概率测度 μ 下

(1) 坐标过程 X 满足

$$dX_t=A_tX_tdt+b_tdt+\sigma_tdY_t^H,\tag{3.13}$$

其中 $Y_t^H=\int_0^t k(t,s)dY_s$ 且 Y 为连续半鞅;

(2) 对任意 $F\in\mathrm{Dom}(D)$ 及 $Kh\in\mathscr{H}=\{Kh\mid h为适应随机过程且h\in L^2(\Omega;dt\times\mu)\}$,

$$\mathbb{E}_\mu\left[F\int_0^1\left\langle\left(K^{-1}\beta_\cdot\right)_t,dY_t\right\rangle\right]=\mathbb{E}_\mu[D_hF],\tag{3.14}$$

其中 $\beta_t=\sigma_t^{-1}((Kh)_t'-A_t(Kh)_t)$, 则 X 是测度 μ 下的分数扩散过程.

证明 由方程 (1.1) 知只需证明 Y 为布朗运动. 由鞅表示定理知存在可料过程 $(\Gamma_t)_{0\le t\le 1}$ 及连续适应有限变差过程 $(L_t)_{0\le t\le 1}$, 使得

$$Y_t=\int_0^t\Gamma_s dB_s+L_t.$$

下面分两步证明:

(1) 令 $F=1$, 则 $D_hF=0$. 由 (3.14) 可得

$$\mathbb{E}_\mu\left[F\int_0^1\left\langle\left(K^{-1}\beta_\cdot\right)_t,dY_t\right\rangle\right]=0.$$

又因为 $\mathbb{E}_\mu[F\int_0^1\langle(K^{-1}\beta_\cdot)_t,\Gamma_tdB_t\rangle]=0$, 因此

$$\mathbb{E}_\mu\left[\int_0^1\left\langle\left(K^{-1}\beta_\cdot\right)_t,dL_t\right\rangle\right]=0.\tag{3.15}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义停时,

$$\tau_n = \inf\{0 \le t \le 1 : |L_t| \ge n\}.$$

对于有界连续过程 $L_t I_{[0,\tau_n]}$, 令 $(K^{-1}\beta.) = L_t I_{[0,\tau_n]}$, 则

$$\sigma_t^{-1}((Kh)'_t - A_t(Kh)_t) = (K(LI_{[0,\tau_n]}))_t.$$

上述微分方程的解为

$$(Kh)_t = \mathrm{e}^{\int_0^t A_s ds} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s A_u du} \sigma_s (K(LI_{[0,\tau_n]}))_s ds.$$

易知存在常数 C, 使得

$$\begin{aligned}
|(Kh)_t - (Kh)_s| &\le \left| \mathrm{e}^{\int_0^t A_s ds} \int_s^t \mathrm{e}^{-\int_0^s A_u du} \sigma_s (K(LI_{[0,\tau_n]}))_s ds \right| \\
&\quad + \left| \mathrm{e}^{\int_0^t A_s ds} - \mathrm{e}^{\int_0^t A_s ds} \right| \left| \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s A_u du} \sigma_s (K(LI_{[0,\tau_n]}))_s ds \right| \\
&\le C|t-s|.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

因此, $Kh \in \mathscr{H}_H$. 将 Kh 代入 (3.15) 可得

$$\mathbb{E}_\mu \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \langle L_t, dL_t \rangle \right] = 0,$$

从而, 对任意 $t \in [0,1]$, $L_t = 0$.

(2) 设 $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的正交基, 令 $F = \langle Y_T, e_i \rangle$. 下面给出 $\langle Y_T, e_i \rangle$ 的导数. 对于 $\mathbb{R}^n$- 值适应过程 α, 设 $Y_t^H(r) = Y_t^H + r\int_0^t \alpha_s ds$. 考虑如下变分方程

$$dX_t(r) = A_t X_t(r) dt + b_t dt + \sigma_t dY_t^H(r). \tag{3.17}$$

如果上述方程的解 $X(r)$ 满足 $\frac{d}{dr} X_t(r)|_{r=0} = (Kh)_t$, 则

$$\alpha_t = \beta_t = \sigma_t^{-1}((Kh)'_t - A_t(Kh)_t). \tag{3.18}$$

由 Y^H 的定义可知

$$Y_t^H(r) = \int_0^t k(t,s) d\left(Y_s + r\int_0^s \left(K^{-1} \int_0^\cdot \beta_u du \right)_v dv \right),$$

因此 $Y_s(r) = Y_s + r\int_0^s (K^{-1}\int_0^\cdot \beta_u du)_v dv$. 从而

$$D_h \langle Y_T, e_i \rangle = \frac{d}{dr} \langle Y_T(r), e_i \rangle \bigg|_{r=0} = \int_0^T \left\langle \left(K^{-1} \int_0^\cdot \beta_u du \right)_s, e_i \right\rangle ds. \tag{3.19}$$

另一方面, 令 $F = \langle Y_T, e_i \rangle$, 由分部积分公式 (3.14), 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu[D_h \langle Y_T, e_i \rangle] &= \mathbb{E}_\mu \left[\langle Y_T, e_i \rangle \int_0^1 \left\langle \left(K^{-1} \int_0^\cdot \beta_u du \right)_t, dY_t \right\rangle \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\int_0^T \langle \Gamma_t^* e_i, dB_t \rangle \int_0^1 \left\langle \left(K^{-1} \int_0^\cdot \beta_u du \right)_t, dY_t \right\rangle \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\int_0^T \left\langle \Gamma_t \Gamma_t^* e_i, \left(K^{-1} \int_0^\cdot \beta_u du \right)_t \right\rangle dt \right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

结合 (3.19) 以及 (3.20), 我们可得

$$\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i,\Big(K^{-1}\int_0^\cdot\beta_u du\Big)_t\Big\rangle dt\Big]=0. \tag{3.21}$$

对任意 $g\in L^2(\Omega,dt\times\mu)$, 令 $\sigma_t^{-1}(Kh)'_t=(Kg)'_t$, 则

$$(Kh)_t=\int_0^t\sigma_s(Kg)'_s ds.$$

因此

$$\begin{aligned}\Big(K^{-1}\int_0^\cdot\beta_u du\Big)_t&=\Big(K^{-1}\int_0^\cdot\Big[(Kg)'_u-\sigma_u^{-1}A_u\Big(\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds\Big)\Big]du\Big)_t\\&=g_t-\Big(K^{-1}\int_0^\cdot\Big[\sigma_u^{-1}A_u\Big(\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds\Big)\Big]du\Big)_t\\&=g_t-P_t\sigma_t^{-1}A_t\int_0^t\sigma_s(Kg)'_s ds\\&\quad-\frac{(H-\frac12)t^{H-\frac12}}{\Gamma(\frac32-H)}\int_0^t\frac{-u^{\frac12-H}\sigma_u^{-1}A_u\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds}{(t-u)^{\frac12+H}}du,\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$P_t=\frac{t^{\frac12-H}}{\Gamma(\frac32-H)}+\frac{(H-\frac12)}{\Gamma(\frac32-H)}\int_0^t\frac{1}{(t-u)^{\frac12+H}}du.$$

易知

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i,P_t\sigma_t^{-1}A_t\int_0^t\sigma_s(Kg)'_s ds\Big\rangle dt\Big]\\&=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle\sigma_s\int_s^T P_t\sigma_t^{-1}A_t(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i dt,(Kg)'_s\Big\rangle ds\Big]\\&=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle\sigma_s\int_s^T P_t\sigma_t^{-1}A_t(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i dt,c_H\int_0^s u^{\frac12-H}s^{H-\frac12}(s-u)^{H-\frac32}g_u du\Big\rangle ds\Big]\\&=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle\int_u^T\Big(c_H u^{\frac12-H}s^{H-\frac12}(s-u)^{H-\frac32}\sigma_s\int_s^T P_t\sigma_t^{-1}A_t(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i dt\Big)ds,g_u\Big\rangle du\Big]\\&=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle\int_t^T D_s ds,g_t\Big\rangle dt\Big],\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$D_s=c_H t^{\frac12-H}s^{H-\frac12}(s-t)^{H-\frac32}\sigma_s\int_s^T P_u\sigma_u^{-1}A_u(\Gamma_u\Gamma_u^*-I)e_i du.$$

同理

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i,\frac{(H-\frac12)t^{H-\frac12}}{\Gamma(\frac32-H)}\int_0^t\frac{-u^{\frac12-H}\sigma_u^{-1}A_u\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds}{(t-u)^{\frac12+H}}du\Big\rangle dt\Big]\\&\quad=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle\int_u^T\frac{(H-\frac12)t^{H-\frac12}}{\Gamma(\frac32-H)}\frac{-u^{\frac12-H}\sigma_u^{-1}A_u}{(t-u)^{\frac12+H}}(\Gamma_t\Gamma_t^*-I)e_i dt,\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds\Big\rangle du\Big]\\&\quad=\mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^T\Big\langle Q_u,\int_0^u\sigma_s(Kg)'_s ds\Big\rangle du\Big],\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$Q_u = \int_u^T \frac{(H-\frac{1}{2})t^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}-H)} \frac{-u^{\frac{1}{2}-H}\sigma_u^{-1}A_u}{(t-u)^{\frac{1}{2}+H}} (\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i dt.$$

(3.24) 可化解为

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_\mu\bigg[\int_0^T \bigg\langle \int_s^T (\sigma_s Q_u)\, du, (Kg)_s' \bigg\rangle ds\bigg] \\
&= \mathbb{E}_\mu\bigg[\int_0^T \bigg\langle \int_s^T \sigma_s Q_u du, c_H \int_0^s t^{\frac{1}{2}-H} s^{H-\frac{1}{2}} (s-t)^{H-\frac{3}{2}} g_t dt \bigg\rangle ds\bigg] \\
&= \mathbb{E}_\mu\bigg[\int_0^T \bigg\langle \int_t^T \bigg(c_H t^{\frac{1}{2}-H} s^{H-\frac{1}{2}} (s-t)^{H-\frac{3}{2}} \int_s^T \sigma_s Q_u du\bigg) ds, g_t \bigg\rangle dt\bigg] \\
&= \mathbb{E}_\mu\bigg[\int_0^T \bigg\langle \int_t^T E_s ds, g_t \bigg\rangle dt\bigg],
\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中

$$E_s = \bigg(c_H t^{\frac{1}{2}-H} s^{H-\frac{1}{2}} (s-t)^{H-\frac{3}{2}} \int_s^T \sigma_s Q_u du\bigg).$$

由 (3.21)–(3.23) 以及 (3.25), 可得

$$\mathbb{E}_\mu\bigg[\int_0^T \bigg\langle (\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i - \int_t^T D_s ds - \int_t^T E_s ds, g_t \bigg\rangle dt\bigg] = 0.$$

从而 $(\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i - \int_t^T D_s ds - \int_t^T E_s ds$ 的可选投影为 0. 又因为 $(\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i - \int_t^T D_s ds - \int_t^T E_s ds$ 的可选投影为

$$\mathbb{E}_\mu\bigg[(\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i - \int_t^T D_s ds - \int_t^T E_s ds \bigg| \mathscr{F}_t\bigg].$$

因此

$$\mathbb{E}_\mu\bigg[(\Gamma_t\Gamma_t^* - I)e_i - \int_t^T D_s ds - \int_t^T E_s ds \bigg| \mathscr{F}_t\bigg] = 0.$$

令 t 趋近 T,

$$(\Gamma_T\Gamma_T^* - I)e_i = 0.$$

此时对任意 $T \in [0,1]$, $\Gamma_T\Gamma_T = I$. 故 Y 为布朗运动, 即 X 为满足 (1.1) 的分数扩散过程. 证毕.

4 总结

概率论中, 许多学者研究了概率测度可由其分部积分公式唯一刻画的问题. 本文借助 Malliavin 积分理论, 构建了一类分数扩散测度的分部积分公式, 然后由 Lévy 准则得到此类分数扩散测度可由其分部积分公式唯一刻画. 本文假设漂移系数和波动系数是非随机的, 在以后的研究中会考虑随机情形下扩散测度的分部积分公式和刻画问题.

致谢 感谢匿名审稿人和编辑的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Aida S., Differential calculus on path and loop spaces II: Irreducibility of dirichlet forms on loop spaces, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1998, **122**(8): 635–666.

[2] Decreusefond L., Üstünel A. S., Stochastic analysis of the fractional Brownian motion, *Potential Analysis*, 1999, **10**(2): 177–214.

[3] Driver B. K., A Cameron–Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold, *Journal of Functional Analysis*, 1992, **110**(2): 272–376.

[4] Driver B. K., A Cameron–Martin type quasi-invariance theorem for pinned Brownian motion on a compact Riemannian manifold, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1994, **342**(1): 375–395.

[5] Duncan T. E., Hu Y. Z., Pasik-Duncan B., Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(2): 582–612.

[6] Enchev O., Stroock D. W., Pinned Brownian motion and its perturbations, *Advances in Mathematics*, 1996, **119**(2): 127–154.

[7] Fang S. Z., Malliavin P., Stochastic analysis on the path space of a Riemannian manifold: I. Markovian stochastic calculus, *Journal of Functional Analysis*, 1993, **118**(1): 249–274.

[8] Hsu E. P., Quasi-invariance of the Wiener measure on the path space over a compact Riemannian manifold, *Journal of Functional Analysis*, 1995, **134**(2): 417–450.

[9] Hsu E. P., Integration by parts in loop spaces, *Mathematische Annalen*, 1997, **309**(2): 331–339.

[10] Hsu E. P., Characterization of Brownian Motion on Manifolds Through Integration by Parts, Vol. 5, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, Singapore University Press/World Scientific, Singapore, 2005, 195–208.

[11] Jin G., Integration by Parts and a Characterization of Diffusion Measure on Path Space, Master's Thesis, Academy of Mathematics and Systerms Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 2005.

[12] Nualart D., Ouknine Y., Regularization of differential equations by fractional noise, *Stochastic Processes and Their Applications*, 2002, **102**(1): 103–116.

[13] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon Breach Science, 1993.

[14] Shih H. H., On Stein's method for infinite-dimensional Gaussian approximation in abstract Wiener spaces, *Journal of Functional Analysis*, 2011, **261**(5): 1236–1283.

[15] Stein C., A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables, In: Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1972, **2**: 583–602.

[16] Sun X. X., Guo F., On integration by parts formula and characterization of fractional Ornstein–Uhlenbeck process, *Statistics and Probability Letters*, 2015, **107**(5): 170–177.

[17] Sun X. X., Guo F., Martingale representation and logarithmic-Sobolev inequality for the fractional Ornstein–Uhlenbeck measure, *Acta Mathematica Scientia, Ser. B*, 2021, **41**(3): 827–842.