第62卷第2期 数学学报中文版 Vol.62, No.2
2019年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)02-0261-08 **文献标识码: A**

二项指数和四次均值的一个注记

王 啸

西北大学数学学院 西安 710127
E-mail: wangxiao_0606@stumail.nwu.edu.cn

摘 要 本文利用初等方法以及三角和的性质研究一类二项指数和四次均值的计算问题, 并给出一个精确的计算公式.

关键词 二项指数和; 四次均值; 初等方法; 计算公式
MR(2010) 主题分类 11L03, 11L05, 11L10
中图分类 O156.4

A Note on the Fourth Power Mean of the Two-term Exponential Sums

Xiao WANG

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127*, P. R. China*
E-mail: *wangxiao_0606@stumail.nwu.edu.cn*

Abstract The main purpose of this paper is using the elementary methods and the properties of the trigonometric sums to study the computational problem of one kind fourth power mean of the two-term exponential sums, and give a precise computational formula for it.

Keywords The two-term exponential sums; fourth power mean; elementary method; computational formula
MR(2010) Subject Classification 11L03, 11L05, 11L10
Chinese Library Classification O156.4

1 引言

对任意正整数 q 和 k 且 $q \geq 3$, 二项指数和 $G(m,n,k;q)$ 定义为

$$G(m,n,k;q) = \sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{ma^k + na}{q}\right),$$

其中 $e(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y}$, m 及 n 为任意整数.

这一指数和在解析数论以及乘法数论研究中占有十分重要的位置, 不少经典的数论难题都

收稿日期: 2018-04-02; 接受日期: 2018-08-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771351)

与之密切相关, 因而其研究工作不仅具有深刻的理论意义, 同时也有着广泛的应用价值. 关于 $C(m,n,k;q)$ 的各种初等性质, 很多学者也进行过研究, 并得到了许多重要的结果. 例如, Gauss 的经典工作 [1] 给出了 $C(1,0,2;q)$ 的精确计算公式. 事实上, 当 $(2m,q)=1$ 时, $|C(m,n,2;q)|$ 的精确值是 $\sqrt{q}$. 由 Weil 的重要工作 [2], 我们也可以给出一般的上界估计

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{ma^k+na}{p}\right)\right| \ll \sqrt{p},$$

其中 p 是一个奇素数, χ 表示模 p 的 Dirichlet 特征, $(m,n,p)=1$.

当 p 为素数时, Zhang Han 及 Zhang Wenpeng [5] 证明了恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3+na}{p}\right)\right|^4=\begin{cases}2p^3-p^2, & \text{如果 } 3\nmid p-1,\\ 2p^3-7p^2, & \text{如果 } 3\mid p-1.\end{cases}$$

此外, Zhang Han 及 Zhang Wenpeng 也在文献 [6] 中证明了

$$\sum_{m=0}^{p-1}\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right|^4=\begin{cases}3p^3-p^2\left(8+2\left(\frac{-1}{p}\right)+4\left(\frac{-3}{p}\right)\right)-3p, & \text{如果 } 5\nmid p-1,\\ 3p^3+O\left(p^2\right), & \text{如果 } 5\mid p-1,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\left(\frac{*}{p}\right)$ 表示模 p 的 Legendre 符号.

其它一些有关指数和的相关文献也可以在文 [3–10] 中找到, 这里不再一一赘述.

本文主要是对文 [6] 中的结论做一个注释. 从 (1.1) 的形式上讲, 让人总觉得该公式看起来似乎不太美观, 我们认为此类均值应该有一个更简洁的形式. 从这一观点出发, 本文利用初等方法以及同余方程解的个数重新研究了这个问题, 并证明了下面的结论:

定理 1 设 p 为奇素数且满足 $5\nmid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 我们有恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right|^4=\begin{cases}3p^3-4p^2, & \text{如果 } 4\mid(p-1),\\ 3p^3, & \text{如果 } 4\nmid(p-1).\end{cases}$$

定理 2 设 p 为奇素数且满足 $5\mid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right|^4=3p^3+R(p),$$

其中 $R(p)$ 满足估计式: $|R(p)|\le 73\cdot p^2$.

结合定理 1 及 2 立刻推出下面的:

推论 对任意素数 p, 有渐近公式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right|^4=3p^3+M(p),$$

其中误差项 $M(p)$ 满足估计式 $|M(p)|\le 73\cdot p^2$

一些注释 首先在定理 2 中, 我们也可以计算出误差项, 不过只能用 Gauss 和的乘积表示, 不能给出它的具体数值;

其次, 和文献 [6] 中稍有不同的一点是在二项指数和中我们增加了常数项 1, 这样使得我们定理 1 中的结论看起来更为简洁、美观;

第三, 本文与文献 [6] 的另一个区别在于所使用的研究方法不同. 在文献 [6] 中, 作者们使用的是解析方法, 即利用高斯和的性质以及特征和的正交性. 本文利用初等方法以及同余方程解的个数直接给出了定理 1 的证明;

第四, 对于任意奇素数 q 且 $q\nmid(p-1)$, 利用本文的方法也可以给出更一般的均值

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^q+na}{p}\right)\right|^4$$

的一个恒等式, 只是当素数 q 较大时计算比较复杂以及高次多项式的因式分解比较麻烦, 因而这里没有给出一般性的结论.

2 若干引理

为了完成上述定理的证明, 需要以下四个简单引理. 首先有

引理 1 设 $p>5$ 是一个素数且满足 $5\nmid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 有

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)=\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot p^2,$$

其中 $\left(\frac{*}{p}\right)$ 表示模 p 的 Legendre 符号.

证明 首先应用三角恒等式

$$\sum_{m=1}^{q}e\left(\frac{nm}{q}\right)=\begin{cases} q, & \text{if}\ \ q\mid n,\\ 0, & \text{if}\ \ q\nmid n,\end{cases}\tag{2.1}$$

并注意如果素数 p 满足 $5\nmid(p-1)$, 那么, 当 a 通过模 p 的一个完全 (简化) 剩余系时, a^5 也通过模 p 的一个完全 (简化) 剩余系. 于是有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\\
&=\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1}e\left(\frac{m\left(a^5+b^5-c^5\right)+na+nb-nc}{p}\right)\\
&=p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv c^5 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{na+nb-nc}{p}\right)\\
&=p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 0 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}e\left(\frac{na+nb}{p}\right)+p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=1}^{p-1}e\left(\frac{cn(a+b-1)}{p}\right)\\
&=p+p\sum_{\substack{a=0\\a^5+1\equiv 0 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{nb(a+1)}{p}\right)+p^2\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p\\a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1-p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1\\
&=p+p(p-1)+p^2\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p\\a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1-p\sum_{\substack{a=0\\a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1=p^2\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p\\a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

显然, 由同余式 $a^5+b^5\equiv 1 \bmod p$ 及 $a+b\equiv 1 \bmod p$, 可推出 $ab\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)\equiv 0 \bmod p$, 且 $a+b\equiv 1 \bmod p$. 因此有

$$\begin{aligned}
p^2\sum_{\substack{a=0\\ a^5+b^5\equiv 1 \bmod p\\ a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1 &= p^2\sum_{\substack{a=0\\ ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)\equiv 0 \bmod p\\ a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1\\
&= 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=1\\ a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\equiv 0 \bmod p\\ a+b\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1} 1 = 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=1\\ a^3+2a^2+2a+1\equiv 0 \bmod p\\ b(a+1)\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1} 1\\
&= 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=0\\ (a+1)(a^2+a+1)\equiv 0 \bmod p\\ b(a+1)\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1 = 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=0\\ a^2+a+1\equiv 0 \bmod p}}^{p-1} 1\\
&= 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=0\\ (2a+1)^2\equiv -3 \bmod p}}^{p-1} 1 = 2p^2+p^2\sum_{\substack{a=0\\ a^2\equiv -3 \bmod p}}^{p-1} 1 = \left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot p^2. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

结合 (2.2) 及 (2.3) 有恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^5+a}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1} e\left(\frac{-mc^5-c}{p}\right)\right)=\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot p^2.$$

于是证明了引理 1.

引理 2 设 $p>5$ 是素数且满足 $5\nmid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 有恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1} e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)\\
&= 3p^3-5p^2-2\left(\frac{-1}{p}\right)p^2-\left(\frac{-3}{p}\right)p^2.
\end{aligned}$$

证明 首先应用三角恒等式 (2.1), 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1} e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)\\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\sum_{d=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1} e\left(\frac{m\left(a^5+b^5-c^5-d^5\right)+na+nb-nc-nd}{p}\right)\\
&= p\sum_{\substack{a=0\\ a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\sum_{d=1}^{p-1} e\left(\frac{dn(a+b-c-1)}{p}\right)\\
&= p^2\sum_{\substack{a=0\\ a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p\\ a+b\equiv c+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1} 1-p\sum_{\substack{a=0\\ a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1} 1. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

由完全剩余系的性质容易推出

$$\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1} 1 = \sum_{\substack{a=0\\a+b\equiv c+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1} 1 = p^2. \tag{2.5}$$

注意到, 由同余式

$$a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p \quad 及 \quad a+b\equiv c+1 \bmod p,$$

可推出

$$(a+b)(a-1)(b-1)\left(a^2+b^2+ab-a-b+1\right)\equiv 0 \bmod p.$$

因此有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p\\a+b\equiv c+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1} 1 &= \sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv (a+b-1)^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1\\
&= \sum_{\substack{a=0\\(a+b)(a-1)(b-1)(a^2+b^2+ab-a-b+1)\equiv 0 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1\\
&= 3p-3+\sum_{\substack{a=0\\a^2+b^2+ab-a-b+1\equiv 0 \bmod p\\a\neq 1,\ b\neq 1}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1\\
&= 3p-3+\sum_{\substack{a=0\\a^2+b^2+ab-a-b+1\equiv 0 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1-2\sum_{\substack{a=0\\a^2+1\equiv 0 \bmod p}}^{p-1} 1\\
&= 3p-3+\sum_{\substack{a=0\\(2a+b-1)^2\equiv -3b^2+2b-3 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1} 1-2\sum_{\substack{a=0\\a^2+1\equiv 0 \bmod p}}^{p-1} 1\\
&= 3p-3-2\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)+\sum_{b=0}^{p-1}\left(1+\left(\frac{-3b^2+2b-3}{p}\right)\right)\\
&= 4p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)+\left(\frac{-3}{p}\right)\sum_{b=0}^{p-1}\left(\frac{(3b-1)^2+8}{p}\right)\\
&= 4p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)+\left(\frac{-3}{p}\right)\sum_{b=0}^{p-1}\left(\frac{b^2+8}{p}\right)\\
&= 4p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中用到了恒等式

$$\sum_{b=0}^{p-1}\left(\frac{b^2+8}{p}\right)=-1.$$

结合公式 (2.4), (2.5) 及 (2.6), 有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)\\&=\left(4p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)p^2-p^3\\&=\left(3p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)p^2.\end{aligned}$$

于是证明了引理 2.

引理 3 设 $p>5$ 是为素数且满足 $5\mid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 有渐近式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)=\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)p^2+E(p),$$

其中 $E(p)$ 满足估计式 $|E(p)|\le 4p+12\cdot p^{\frac{3}{2}}$.

证明 应用 (2.2) 及 (2.3) 的证明方法, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\\&=p^2+p^2\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)-p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1.\end{aligned}\tag{2.7}$$

因为 $5\mid(p-1)$, 所以可设 λ 是模 p 的一个 5- 阶特征, 从而对 $(m,p)=1$, 由 Gauss 和的性质有

$$\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5}{p}\right)=\overline{\lambda}(m)\tau(\lambda)+\overline{\lambda}^2(m)\tau\left(\lambda^2\right)+\lambda(m)\tau\left(\overline{\lambda}\right)+\lambda^2(m)\tau\left(\overline{\lambda}^2\right),\tag{2.8}$$

其中 $\tau(\lambda)$ 表示经典 Gauss 和, 即

$$\tau(\lambda)=\sum_{a=1}^{p-1}\lambda(a)e\left(\frac{a}{p}\right).$$

所以, 由 (2.1) 及 (2.8) 并注意 $|\tau\left(\lambda^i\right)|=\sqrt{p}$ $(i=1,2,3,4)$ 以及 Gauss 和的性质, 有

$$\begin{aligned}-p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv 1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}1&=-\sum_{m=0}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5}{p}\right)\right)^2e\left(\frac{-m}{p}\right)\\&=-p^2-\sum_{m=1}^{p-1}(\overline{\lambda}(m)\tau(\lambda)+\overline{\lambda}^2(m)\tau(\lambda^2)+\lambda(m)\tau(\overline{\lambda})+\lambda^2(m)\tau(\overline{\lambda}^2))^2e\left(\frac{-m}{p}\right)\\&=-p^2-E(p),\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中 $|E(p)|\le 4p+12\cdot p^{\frac{3}{2}}$.

结合 (2.7) 及 (2.9) 有渐近公式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)=\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)p^2+E(p).$$

于是证明了引理 3.

引理 4 设 $p>5$ 是为素数且满足 $5\mid(p-1)$, 那么, 对任意整数 n 且 $(n,p)=1$, 有渐近式
$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)=3p^3+R(p),$$
其中 $R(p)$ 满足估计式 $|R(p)|\le 64\cdot p^2$.

证明 应用引理 2 的证明方法以及 (2.6), 有
$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)\\&\quad=p^2\left(4p-5-2\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)-p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}1.\end{aligned}\tag{2.10}$$
注意到恒等式
$$\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5}{p}\right)=\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{-ma^5}{p}\right),$$
应用 (2.8) 以及引理 3 的证明方法, 有
$$\begin{aligned}p\sum_{\substack{a=0\\a^5+b^5\equiv c^5+1 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}1&=\sum_{m=0}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5}{p}\right)\right)e\left(\frac{-m}{p}\right)\\&=p^3+\sum_{m=1}^{p-1}(\overline{\lambda}(m)\tau(\lambda)+\overline{\lambda}^2(m)\tau(\lambda^2)+\lambda(m)\tau(\overline{\lambda})+\lambda^2(m)\tau(\overline{\lambda}^2))^3e\left(\frac{-m}{p}\right)\\&=p^3+R(p),\end{aligned}\tag{2.11}$$
其中 $R(p)$ 满足估计式 $|R(p)|\le 4^3\cdot p^2=64\cdot p^2$.

现在由 (2.10) 及 (2.11) 立刻推出引理 4.

3 定理的证明

有了上节的四个引理, 我们容易给出定理的证明.

首先证明定理 1. 事实上应用引理 1 及 2, 我们有
$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right|^4\\&\quad=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\\&\qquad+\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right)\right)^2\left(\sum_{c=0}^{p-1}e\left(\frac{-mc^5-nc}{p}\right)\right)\left(\sum_{d=1}^{p-1}e\left(\frac{-md^5-nd}{p}\right)\right)\\&\quad=\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot p^2+3p^3-5p^2-2\left(\frac{-1}{p}\right)p^2-\left(\frac{-3}{p}\right)p^2\\&\quad=3p^3-2p^2-2p^2\left(\frac{-1}{p}\right).\end{aligned}\tag{3.1}$$
注意到, 如果 $p\equiv 1 \bmod 4$, 那么 $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$; 如果 $p\equiv 3 \bmod 4$, 那么 $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$. 由此及 (3.1) 立刻推出定理 1.

此外, 应用引理 3 及 4 并注意 $p \geq 11$, 立刻推出渐近公式

$$\sum_{m=1}^{p-1} \left| \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^5+na}{p}\right) \right|^4 = 3p^3 + H(p),$$

其中 $H(p)$ 满足估计式

$$|H(p)| \leq 4p^2 + 4p + 12p^{\frac{3}{2}} + 64p^2 \leq 73 \cdot p^2.$$

于是完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Apostol T. M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Burgess D. A., On Dirichlet characters of polynomials, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1963, **13**: 537–548.

[3] Cochrane T., Exponential sums modulo prime powers, *Acta Arithmetica*, 2002, **101**: 131–149.

[4] Cochrane T., Pinner C., Using Stepanov's method for exponential sums involving rational functions, *Journal of Number Theory*, 2006, **116**: 270–292.

[5] Zhang H., Zhang W. P., The fourth power mean of two-term exponential sums and its application, *Mathematical Reports*, 2017, **19**: 75–83.

[6] Zhang H., Zhang W. P., On the fourth power mean of the two-term exponential sums, *The Scientific World Journal*, 2014, 2014, Article ID: 724840.

[7] Zhang T. P., On mixed two-term exponential sums, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2010, **47**: 1107–1122.

[8] Zhang W. P., On the number of the solutions of one kind congruence equation mod p, *Journal of Northwest University* (Natural Science Edition), 2016, **46**: 313–316.

[9] Zhang W. P., Han D., On the sixth power mean of the two-term exponential sums, *Journal of Number Theory*, 2014, **136**: 403–413.

[10] Zhang W. P., Hu J. Y., The number of solutions of the diagonal cubic congruence equation mod p, *Mathematical Reports*, 2018, **20**: 73–80.