

文章编号: 0583-1431(2019)02-0247-08

文献标识码: A

Smarandache 函数的 几类相关方程的解

白海荣 廖群英

四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610066

E-mail: baihairong2007@163.com; qunyingliao@sicnu.edu.cn

摘 要 设 $\varphi(n), S(n)$ 分别表示正整数 n 的 Euler 函数和 Smarandache 函数, 利用初等的方法和技巧, 依据 Smarandache 函数计算公式, 给出 k 的方程 $\varphi(p^\alpha m) = S(p^{\alpha k})$ 的所有解, 其中 p 为素数, α, m 为正整数且 $\gcd(m, p) = 1$, 由此得到方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 的所有解 (n, k) . 进而确定了满足条件 $S(n) | \sigma(n)$ 的全部正整数 n . 最后, 根据莫比乌斯变换反演定理证明了方程 $\varphi(n) = \sum_{d|n} S(d)$ 仅有两个解, 分别为 $n = 2^5$ 和 $n = 3 \times 2^5$.

关键词 Smarandache 函数; 因数和函数; Mobius 变换

MR(2010) 主题分类 11A25, 11Y70

中图分类 O156.1

On the Solutions for Several Classes of Equations Related to the Smarandache Function

Hai Rong BAI Qun Ying LIAO

*Institute of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P. R. China*

E-mail: baihairong2007@163.com; qunyingliao@sicnu.edu.cn

Abstract Let $\varphi(n), S(n)$ be the Euler function and the Smarandache function of the positive integer n , respectively. Based on elementary methods and techniques, according to the algorithm formula of the Smarandache function, all solutions of the equation $\varphi(p^\alpha m) = S(p^{\alpha k})$ are given, where p is a prime, α and m are both positive integers, and $\gcd(m, p) = 1$. And then we get the solutions of the equation $\varphi(n) = S(n^k)$. Furthermore, all positive integers n satisfying the condition $S(n) | \sigma(n)$ are determined. At last, basing on the Mobius transformation inversion theorem, we prove that the equation $\varphi(n) = \sum_{d|n} S(d)$ has only two solutions, namely, $n = 2^5$ and $n = 3 \times 2^5$.

Keywords Smarandache function; function of divisor; Mobius transformation

MR(2010) Subject Classification 11A25, 11Y70

Chinese Library Classification O156.1

收稿日期: 2017-07-23; 接受日期: 2018-08-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11401408); 四川省科技厅资助项目 (2016JY0134)

通讯作者: 廖群英

1 引言及主要结果

早在 1993 年, Smarandache 定义了正整数 n 的 Smarandache 函数

$$S(n) = \min\{m : m \in N, n | m!\}.$$

熟知, 函数 $S(n)$ 的性质及其相关方程是数论及其应用领域十分引人注目的研究课题之一. 迄今为止, 已经有很多相关研究成果^[1-14]. 文 [3, 6, 10, 11] 给出 $S(p^\alpha)$ 的上下界与均值, 其中 p 为素数, α 为正整数. 文 [1, 7] 给出了 $S(n)$ 的计算公式. 文 [2, 8] 和 [13] 研究了关于函数 $S(n)$ 的几类方程的解.

本文继续该问题的研究, 利用初等的方法和技巧得到几类相关数论函数方程的解. 具体地说, 若 $\varphi(n)$ 为正整数 n 的 Euler 函数, 正整数 n 的标准分解式为

$$n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \quad \text{且} \quad S(n) = S(p^\alpha) = \max\{S(p_i^{\alpha_i}), 1 \leq i \leq m\}.$$

利用初等的方法和技巧, 依据 Smarandache 函数计算公式, 给出关于 k 的方程 $\varphi(p^\alpha m) = S(p^{\alpha k})$ 的所有解, 其中 p 为素数, α, m 为正整数且 $\gcd(m, p) = 1$. 由此得到方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 的所有解 (n, k) . 进而, 依据指数相关性给出满足 $S(n) | \sigma(n)$ 的所有正整数 n . 最后, 根据 Mobius 反演定理将方程 $\varphi(n) = \sum_{d|n} S(d)$ 转化为 $S(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即将 $S(n)$ 解出, 进而得到方程仅有两个解, 分别为 $n = 2^5$ 和 $n = 3 \times 2^5$. 事实上, 本文证明了如下主要结果:

定理 1.1 设 p 为素数, α, m 为正整数, 且 $\gcd(m, p) = 1$. 设 $\varphi(p^\alpha m) = \sum_{i=1}^n a_i p^{k_i}$ 为按升幂排列的 p 进制表达式, $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i}-1}{p-1}$, 则关于 k 的方程

$$\varphi(p^\alpha m) = S(p^{k\alpha}) \quad (1.1)$$

的解数为 $t = [\frac{\beta}{\alpha}] - [\frac{\beta-k_1}{\alpha}]$. 进而当 $t \geq 1$ 时, 全部解为 $k = [\frac{\beta}{\alpha}], \dots, [\frac{\beta}{t\alpha}]$.

由定理 1.1, 易知当 $\gcd(p, \varphi(m)) = 1$ 时, 若 $\alpha | (\beta + 1)(\beta - k_1)$, 则方程 (1.1) 无解, 否则恰有唯一解 $k = [\frac{\beta}{\alpha}]$. 当 $\gcd(p, \varphi(m)) > 1$ 时, 方程 (1.1) 至少有一个解. 进而, 当方程 (1.1) 有解时, 上述定理 1.1 给出了其全部的解 (p, α, m, k) .

2012 年, 文 [2] 给出了方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 在 $k = 8, 9$ 时的解, 并证明了对任意正整数 k , 该方程的解数均有限等结果. 由定理 1.1 通过对每个 n 给出 k 取值, 可以确定该方程的所有解 (n, k) , 即如下的:

推论 1.2 设 $n = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$ 为标准分解式, $S(n^k) = S(p_1^{k\alpha_1})$, $m = \prod_{i=2}^l p_i^{\alpha_i}$, 则方程

$$\varphi(n) = S(n^k) \quad (1.2)$$

等价于方程组

$$\begin{cases} \varphi(p_1^{\alpha_1} m) = S(p_1^{k\alpha_1}), \\ S(m^k) \leq S(p_1^{k\alpha_1}). \end{cases}$$

由上述推论解出 (p, α, m, k) 即可构造每个 n 及其对应的 k , 即得到所有解 (n, k) . 特别地, 若存在素数 q , 使得 $m = q^\beta$ 且 $q\beta \leq (p_1 - 1)\alpha_1$, 则 $S(m^k) \leq S(p_1^{k\alpha_1})$ ($\forall k \in \mathbf{Z}^+$). 此时若方程 $\varphi(p_1^{\alpha_1} m) = S(p_1^{k\alpha_1})$ 有解 k , 则 (n, k) 是方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 的解, 其中 $n = p_1^{\alpha_1} q^\beta$.

为方便, 记 $S(p^\alpha)!$ 中任意素数 u 的指数为 I^u . 注意到, 对任意素数 p, q , 若 $p < q$, 则 $I^p \geq I^q$. 当 $u \geq \max\{p : p \leq S(p^\alpha)\}$ 时, 规定 $I^u = 0$.

定理 1.3 设 q 为素数, 若 $q^n \parallel S(p^\alpha)$, 记 $A_q^u = \{\mu^t : q^n \mid \sigma(\mu^t), S(\mu^t) \leq S(p^\alpha)\}$, 则

$$\begin{aligned} A_q^u &= \{\mu^t : q^n \mid \sigma(\mu^t), t \leq I^u\} \\ &= \left\{ u^{r \cdot \alpha \cdot q^{n-t}-1} \mid r \cdot \alpha \cdot q^{n-t} - 1 \leq I^u, q^t \parallel \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}, r \in \mathbf{Z}^+ \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 2, & q = 2, \\ \min\{\gamma : q \mid u^\gamma - 1\}, & q \neq 2. \end{cases}$$

定理 1.4 设 p 为素数, α 为正整数, $S(p^\alpha) = \prod_{i=1}^m q_i^{t_i}$ 为标准分解式, 其中 $p = q_1$. 若下面两个条件同时成立:

- (1) $B_{q_i} \neq \phi$ ($i = 1, \dots, m$),
- (2) 若存在 i, j ($0 \leq i \neq j \leq m$), 使得 $B_{q_i} = A_{q_i}^q$ 且 $B_{q_j} = A_{q_j}^q$, 则 $A_{q_i}^q \cap A_{q_j}^q \neq \phi$, 则方程组

$$\begin{cases} S(n) = S(p^\alpha), \\ S(n) \mid \sigma(n) \end{cases}$$

有正整数解 n , 且全部解的标准分解式形如:

$$n = p^{\alpha'} \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m'} r_j^{t_j} (p^{\alpha'} \in B_{q_0}, p_i^{\alpha_i} \in B_{q_i}, t_j \leq I^{r_j}),$$

其中 $B_{q_i} = \bigcup_j A_{q_i}^{p^{ij}}, B_{q_0} = A_{q_0}^p = \{p^{\alpha'} \mid S(p^{\alpha'}) = S(p^\alpha)\}$.

实际上, 容易验证定理 1.4 中的条件也是充要的.

另一方面, 文 [13] 研究了另一类方程的解, 即如下

命题 1.5 [13] 方程 $\varphi(n) = \sum_{d \mid n} S(d)$ 没有形如 $n = \prod_{i=1}^m p_i$ 的解, 其中 p_i 为不同素数.

利用本文的方法可以完全确定上述命题中的方程的全部解, 即证明了如下的

定理 1.6 关于正整数 n 的方程

$$\varphi(n) = \sum_{d \mid n} S(d) \tag{1.3}$$

只有两个解, 分别为 $n = 2^5$ 和 $n = 3 \times 2^5$.

2 一些引理

为证明本文的主要结果, 需要如下几个引理:

为方便, 记

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i} - 1}{p - 1} \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_n, k_i \in \mathbf{Z}^+, 1 \leq a_i \leq p - 1, i = 1, 2, \dots, n \right\} \cup \{0\}.$$

引理 2.1 [1] (1) 设 $\beta \in T$ 且 $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i} - 1}{p - 1} = \sum_{i=1}^m b_i \frac{p^{t_i} - 1}{p - 1}$, 其中

$$k_n > \dots > k_1 \geq 1, t_m > \dots > t_1 \geq 1, k_i, t_j, n, m \in \mathbf{Z}^+,$$

则 $n = m, k_i = t_i$, 且 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 即 β 的表示式唯一.

(2) 设 $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i}-1}{p-1}$ ($1 \leq k_1 < \cdots < k_n$, $1 \leq a_i \leq p-1$), 则对任意正整数 α ,

$$S(p^\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i p^{k_i} \iff \beta - k_1 < \alpha \leq \beta.$$

引理 2.2 设 p, q 为互异素数, 若 $p^t \parallel \frac{q^\alpha-1}{q-1}$, 则对任意正整数 $n > t$, 均有

$$p^n \parallel \frac{q^{\alpha p^{n-t}} - 1}{q-1},$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 2, & q = 2, \\ \min\{\gamma : p \mid q^\gamma - 1\}, & q \neq 2. \end{cases}$$

证明 (1) 当 $p = 2$, 先证明结论 1. 若 $2^r \parallel q^2 - 1$, 则对于任意正整数 n , 均有 $2^{n+r-1} \parallel q^{2^n} - 1$.

结论 1 $n = 1$ 时显然成立. 若 $1 \leq n \leq m$ 时结论 1 成立, 显然 q 为奇数, 不妨设 $q^{2^m} = 2^{m+r-1} \times k + 1$, $\gcd(2, k) = 1$, 则

$$q^{2^{m+1}} - 1 = (2^{m+r-1} \times k + 1)^2 - 1 = 2^{2(m+r-1)} \times k^2 + 2^{m+r-1} \times 2k.$$

注意到 $2^{m+1+r-1} \parallel 2^{m+r-1} \times 2k$, 故 $2^{m+1+r-1} \parallel q^{2^{m+1}} - 1$, 即结论 1 得证.

回到 $p = 2$ 的证明: 若 $2^t \parallel q + 1$, 因 $2^r \parallel q^2 - 1$, 故 $2^{r-t} \parallel q - 1$. 于是由结论 1 知, 对任意正整数 n , 均有 $2^{n+r-1-(r-t)} \parallel \frac{q^{2^n}-1}{q-1}$, 即 $2^{n+t-1} \parallel \frac{q^{2^n}-1}{q-1}$. 因此, 对任意正整数 $n \geq t$,

$$2^n \parallel \frac{q^{2^{n-(t-1)}} - 1}{q-1}.$$

(2) 当 $p > 2$, 先证明结论 2. 对于任意素数 $p \geq 3$, 若 $p^r \parallel q^\alpha - 1$, 则对于任意正整数 n , 均有 $p^{n+r} \parallel q^{\alpha p^n} - 1$.

结论 2 $n = 0$ 时显然成立. 设当 $0 \leq n \leq m$ 时结论 2 成立. 现设 $q^{\alpha p^m} = kp^{m+r} + 1$, $\gcd(p, k) = 1$, 则

$$q^{\alpha p^{m+1}} - 1 = (kp^{m+r} + 1)^p - 1 = \sum_{t=0}^{p-2} C_p^t (kp^{m+r})^{p-t} + C_p^{p-1} kp^{m+r}.$$

注意到 $\gcd(p, k) = 1$, 故 $p^{m+r+1} \parallel C_p^{p-1} kp^{m+r}$, 从而 $p^{m+r+1} \parallel q^{\alpha p^{m+1}} - 1$, 即 $n = m + 1$ 时结论 2 成立, 得证.

回到 $p > 2$ 的证明: 由结论 2 知, 对任意正整数 n 均有 $p^{n+r} \parallel q^{\alpha p^n} - 1$, 令 $p^u \parallel q - 1$, 取 $t = r - u$, 即有 $p^t \parallel \frac{q^\alpha-1}{q-1}$, 从而 $p^{n+t} \parallel \frac{q^{\alpha p^n}-1}{q-1}$, 即

$$p^n \parallel \frac{q^{\alpha p^{n-t}} - 1}{q-1}.$$

证毕.

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 由题设 $\varphi(p^\alpha m) = \sum_{i=1}^n a_i p^{k_i}$ 为按升幂排列的 p 进制表达式, 可知 $p^{k_1} \parallel \varphi(p^\alpha m)$. 于是由引理 2.1 知, 若

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i}-1}{p-1} - k_1 < k\alpha \leq \beta = \sum_{i=1}^n a_i \frac{p^{k_i}-1}{p-1}, \quad (3.1)$$

则 $S(p^{k\alpha}) = \sum_{i=1}^n a_i p^{k_i} = \varphi(p^\alpha m)$. 以下分两种情况讨论:

(1) 若 $p \mid \varphi(m)$, 即 $k_1 \geq \alpha$. 此时满足 (3.1) 的 k 恰有 $t = [\frac{\beta}{\alpha}] - [\frac{\beta-k_1}{\alpha}]$ 个, 故全部解为

$$k = \left[\frac{\beta}{r\alpha} \right], \quad r = 1, \dots, t.$$

(2) 若 $\gcd(p, \varphi(m)) = 1$, 即 $k_1 = \alpha - 1$. 此时, 若 $\alpha \mid (\beta - k_1)(\beta + 1)$, 则没有正整数 k 满足 (3.1), 从而方程 (1.1) 无解. 否则, 恰有唯一的 $k = [\frac{\beta}{\alpha}]$ 满足 (3.1), 相应的方程 (1.1) 恰有唯一解. 证毕.

推论 1.2 的证明 易由定理 1.1 得证.

定理 1.3 的证明 易由引理 2.2 得证.

定理 1.4 的证明 对于 $S(p^\alpha)$ 标准分解式的每一项 $q_i^{t_i}$, 对应取一项 $p_i^{\alpha_i} \in B_{q_i}$, 由题设条件及定理 1.3 易知 $q_i^{t_i} \mid \sigma(p_i^{\alpha_i})$, $S(p_i^{\alpha_i}) \leq S(p^\alpha)$. 若存在两项 $p_i^{\alpha_i} = p_j^{\alpha_j} \in A_{q_i}^q \cap A_{q_j}^q$, 此时 $q_i^{t_i} \cdot q_j^{t_j} \mid \sigma(p_i^{\alpha_i})$. 注意到 $t_j \leq I^{t_j} \iff S(r_j^{t_j}) \leq S(p^\alpha)$. 所以 $S(n) = \max\{S(p^\alpha), S(p_i^{\alpha_i}) \mid (1 \leq i \leq m)\} = S(p^\alpha)$. 又 $\sigma(n)$ 是积性函数, 故 $S(n) = S(p^\alpha) = S(p^{\alpha'}) \mid \sigma(n)$. 证毕.

定理 1.6 的证明 先证明

断言 设 p 为素数, α 为正整数. 若 $p = 2$ 且 $\alpha \geq 6$, 或 $p \geq 3$ 且 $\alpha \geq 3$, 或 $p \geq 5$ 且 $\alpha \geq 2$, 则 $(p-1)^2 p^{\alpha-2} > p\alpha$.

证明 若 $p = 2$ 且 $\alpha \geq 6$, 令 $f(\alpha) = 2^{\alpha-2} - 2\alpha$, 则 $f'(\alpha) = (\alpha-2)2^{\alpha-3} - 2 > 0$, 即 $f(\alpha)$ 严格单调递增. 又 $f(6) = 4 > 0$, 故 $f(\alpha) > 0$, 从而 $(p-1)^2 p^{\alpha-2} > p\alpha$.

当 $p \geq 3$, $\alpha \geq 3$ 时, 设 $f(\alpha) = (p-1)^2 p^{\alpha-2} - p\alpha$, 则 $f'(\alpha) = (p-1)^2 (\alpha-2) p^{\alpha-3} - p$. 若 $\alpha \geq 4$, 则

$$f''(\alpha) = (p-1)^2 p^{\alpha-3} + (p-1)^2 (\alpha-2)(\alpha-3) p^{\alpha-4} > 0, \quad f'(4) = 2(p-1)^2 p - p > 0,$$

即此时 $f'(\alpha)$ 严格递增, 故 $f'(\alpha) > 0$. 又 $f'(3) = (p-1)^2 - p = (p-1.5)^2 - 1.15 > 0$, 因此 $\alpha \geq 3$ 时, $f'(\alpha) > 0$, 从而 $f(\alpha)$ 严格单调增. 注意到 $f(3) = (p-1)^2 p - 3p = [(p-1)^2 - 3]p > 0$, 故 $f(\alpha) > 0$, 即 $(p-1)^2 p^{\alpha-2} > p\alpha$.

当 $p \geq 5$, 时, 由前面知只需证明 $\alpha = 2$ 的情形, 此时 $(p-1)^2 - 2p = (p-2)^2 - 3 > 0$, 即 $(p-1)^2 p^{\alpha-2} > p\alpha$.

综上所述, 断言得证.

回到定理的证明. 由莫比乌斯反演公式知, 方程 (1.3) 等价于 $S(n) = \sum_{d \mid n} \mu(\frac{n}{d}) \varphi(d)$. 若 $n = \prod_{i=1}^t p_i \prod_{i=t+1}^m p_i^{\alpha_i}$ 为标准分解式, 且

$$S(n) = S(p^\alpha) = \max\{S(p_i) \mid (i = 1, \dots, t), S(p_i^{\alpha_i}) \mid (i = t+1, \dots, m)\},$$

则

$$\sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d) = \prod_{i=1}^t (p_i - 2) \prod_{i=t+1}^m (p_i - 1)^2 p_i^{\alpha_i - 2}.$$

(1) 当 $p = 2$, $\alpha \geq 6$ 或 $p \geq 3$, $\alpha \geq 3$ 或 $p \geq 5$, $\alpha \geq 2$ 时, 由断言可知

$$S(n) = S(p^\alpha) < p\alpha < (p-1)^2 p^{\alpha-2} \leq \prod_{i=1}^t (p_i - 2) \prod_{i=t+1}^m (p_i - 1)^2 p_i^{\alpha_i - 2} = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d),$$

即此时方程 (1.3) 无解.

(2) 当 $p = 2$ 时. 若 $\alpha = 1$, 即 $S(n) = S(2)$, 则 $n = 2$. 此时 $S(n) = 2 \neq 0 = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即 (1.3) 无解.

若 $\alpha = 2$, 则 $S(n) = S(2^2)$, 故 $n = 2^2 \times 3^i$ ($i = 0, 1$). 此时 $S(n) = 4 \neq 1 = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha = 3$, 则 $S(n) = S(2^3)$, 故 $n = 2^3 \times 3^i$ ($i = 0, 1$). 此时 $S(n) = 4 \neq 2 = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha = 4$, 则 $S(n) = S(2^4)$, 故 $n = 2^4 \times 3^i \times 5^j$ ($i = 0, 1, 2, j = 0, 1$). 此时 $S(n) = 6 \neq 4m = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha = 5$, 则 $S(n) = S(2^5)$, 故 $n = 2^5 \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^t$ ($i = 0, 1, 2, j = 0, 1, t = 0, 1$), 从而 $S(n) = 8$ 且 $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d) = 8m$. 因此方程 (1.3) 成立当且仅当 $m = 1$, 即 $n = 2^5, 3 \times 2^5$.

若 $\alpha \geq 6$, 则属于情况 (1), 已证明.

(3) 当 $p = 3$ 时, 若 $\alpha = 1$, 则 $S(n) = S(3)$, 故 $n = 2^i \times 3$ ($i = 0, 1$). 此时 $S(n) = 3 \neq 2^j = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$ ($j = 0, 1$), 即方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha = 2$, 则 $S(n) = S(3^2)$, 故 $n = 2^i \times 3^2 \times 5^j$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, j = 0, 1$). 此时 $S(n) = 6 \neq 4m = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 即方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha \geq 3$, 则属于情况 (1), 已证明.

(4) 当 $p \geq 5, \alpha = 1$ 且 $n = p$ 时, $S(n) = S(p) = p > p - 2 = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d)$, 故 (1.3) 无解. 若 $n = \prod_{i=1}^t p_i \prod_{i=t+1}^m p_i^{\alpha_i}$, 则 $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\varphi(d) = (p-2)\gamma$. 注意到 $\gcd(p-2, p) = 1$, 故

$$S(n) = S(p) = p \neq (p-2)\gamma = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d),$$

即此时方程 (1.3) 无解.

若 $\alpha \geq 2$, 则属于情况 (1), 已证明. 这就完成了定理 1.6 的证明.

4 应用举例

本节给出一些具体例子.

例 4.1 计算方程 $\varphi(77 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$ 与 $\varphi(92 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$ 的解.

解 (1) 易计算得 $\varphi(77 \times 5^{86}) = 5^{88} + 4 \cdot 5^{87} + 3 \cdot 5^{86}$, 令 $\beta = \frac{5^{88}-1}{5-1} + 4\frac{5^{87}-1}{5-1} + 3\frac{5^{86}-1}{5-1}$, 根据引理 1.1 知, 当 $\beta - 86 < 86k \leq \beta$ 时, $S(5^{86k}) = \varphi(77 \times 5^{86})$. 注意到 $\beta \equiv 40 \pmod{86}$, 所以有 $[\frac{\beta}{\alpha}] - [\frac{\beta-k_1}{86}] = 1$, 即方程 $\varphi(77 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$ 有唯一解 $k = \frac{\beta-40}{86}$.

另一方面, 直接计算 $\varphi(77 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$, 得到 $k = \frac{\beta-40}{86}$.

(2) 易计算得 $\varphi(92 \times 5^{86}) = 5^{88} + 2 \cdot 5^{87} + 5^{85}$, 令 $\gamma = \frac{5^{88}-1}{5-1} + 2\frac{5^{87}-1}{5-1} + \frac{5^{85}-1}{5-1}$, 根据引理 1.1 知 $\gamma - 85 < 86k \leq \gamma$ 时, $S(5^{86k}) = \varphi(92 \times 5^{86})$, 注意到 $\gcd(5, \varphi(92)) = 1, \gamma \equiv 47 \pmod{86}$, 根据定理 1 知方程 $\varphi(92 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$ 有唯一解 $k = \frac{\gamma-47}{86}$.

另一方面, 直接计算 $\varphi(92 \times 5^{86}) = S(5^{86k})$, 得到 $k = \frac{\gamma-47}{86}$.

进而, 注意到 $\max\{7k, 11k, 4k, 23k\} \leq 4 \cdot 86k$, 故由推论 1.2 知方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 当 $n = 77 \times 5^{86}$ 时, 有唯一解 $k = \frac{\beta-40}{86}$, 当 $n = 92 \times 5^{86}$ 时, 有唯一解 $k = \frac{\gamma-47}{86}$.

例 4.2 计算方程组

$$\begin{cases} S(n) = S(5^{104}), \\ S(n) | \sigma(n) \end{cases}$$

的解.

解 根据引理 2.1 易计算得 $S(5^{104}) = S(5^{105}) = 425 = 5^2 \cdot 17$.

(1) 首先计算 $B_5 = \bigcup_j A_5^{p_{1j}}$. 注意到 $\varphi(5) = 4$. 任意素数 p, q , 若 $p < q$, 则有 $I^p \geq I^q$.

当 $q \equiv 1 \pmod{5}$ 时, q 模 5 的指数 $\alpha = 1, t = 0$, 前两个素数为 $q = 11, 31$. 易计算得 I^q 分别为 41, 13. 根据引理 2.2 知 $5^2 \parallel \frac{q^{5^2}-1}{q-1}$, 根据定理 1.3 可知 $A_5^q \neq \phi \iff I^q \geq 25$, 所以满足条件的素数只有 $q = 11$, 根据定理 1.3 易计算 $A_5^{11} = \{11^{24}\}$.

当 $q \equiv 4 \pmod{5}$ 时, q 模 5 的指数 $\alpha = 2$, 类似知满足条件的素数只有 $q = 19, 29, t = 1; 149, 199, 349, t \geq 2$, 对应 $A_5^{19} = \{19^{10r-1}, r = 1, 2\}, A_5^{29} = \{29^9\};$

$$A_5^{149} = \{149^r, r = 1, 2\}, A_5^{199} = \{199^r, r = 1, 2\}, A_5^{349} = \{349\}.$$

当 $q \equiv 2, 3 \pmod{5}$ 时, q 模 5 的指数 $\alpha = 4$, 类似知满足条件的素数只有 $q = 2, 3, 13, 17, t = 1; 7, 43, 107, t \geq 2$, 对应

$$A_5^2 = \{2^{20r-1}, 1 \leq r \leq 21, 1 \leq r \leq 10\}, A_5^3 = \{3^{20r-1}, 1 \leq r \leq 10\},$$

$$A_5^{13} = \{13^{19}\}, A_5^{17} = \{17^{19}\};$$

$$A_5^7 = \{7^{4r-1}, 1 \leq r \leq 17\}, A_5^{43} = \{43^{4r-1}, r = 1, 2\}, A_5^{107} = \{107\}.$$

综上可知 $B_5 = \bigcup_j A_5^{p_{1j}} = \bigcup_{q \in D_1} A_5^q \neq \phi$, 其中

$$D_1 = \{2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 43, 107, 149, 199, 349\}.$$

同样的方法计算得到

$$\begin{aligned} B_{17} &= \bigcup_j A_{17}^{p_{2j}} = \bigcup_{q \in D_2} A_{17}^q \neq \phi, D_2 \\ &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 43, 47, 53, 59, 67, 89, 101, 271, 373\}, \end{aligned}$$

其中

$$A_{17}^2 = \{47^{8r-1}, 1 \leq r \leq 52\}, A_{17}^3 = \{3^{16r-1}, 1 \leq r \leq 13\}, A_{17}^5 = \{5^{16r-1}, 1 \leq r \leq 6\},$$

$$A_{17}^7 = \{7^{16r-1}, r = 1, 2, 3, 4\}, A_{17}^{11} = \{11^{16r-1}, r = 1, 2\}, A_{17}^{13} = \{13^{4r-1}, 1 \leq r \leq 8\},$$

$$A_{17}^{19} = \{19^{8r-1}, r = 1, 2, 3\}, A_{17}^{23} = \{23^{15}\}, A_{17}^{43} = \{43^7\}, A_{17}^{47} = \{47^{4r-1}, r = 1, 2\},$$

$$A_{17}^{53} = \{53^7\}, A_{17}^{59} = \{59^7\}, A_{17}^{67} = \{67^{2r-1}, r = 1, 2, 3\}, A_{17}^{89} = \{89^3\},$$

$$A_{17}^{101} = \{101^{2r-1}, r = 1, 2\}, A_{17}^{271} = \{271\}, A_{17}^{373} = \{373\}.$$

易计算 $D_1 \cap D_2 = \{2, 3, 7, 11, 13, 19, 43\}$,

$$\begin{aligned} B_5 \cap B_{17} &= \left(\bigcup_q A_5^q \right) \cap \left(\bigcup_q A_{17}^q \right) = \bigcup_{q \in D_1 \cap D_2} (A_5^q \cap A_{17}^q) \\ &= \{2^{40t-1}, t \leq 10; 3^{80t-1}, t = 1, 2; 7^{16t-1}, t = 1, 2, 3, 4; 13^{19}; 43^7\} \neq \phi. \end{aligned}$$

(2) 因为 $B_5 \neq \phi, B_{17} \neq \phi, B_5 \cap B_{17} \neq \phi$, 根据定理 1.4 知方程组

$$\begin{cases} S(n) = S(5^{104}), \\ S(n) | \sigma(n) \end{cases}$$

有正整数解 n , 且全部解的标准分解式形如:

$$n = 5^{\alpha'} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \prod_{j=1}^m r_j^{t_j}, \quad \alpha' \in \{104, 105\},$$

其中 $p_1^{\alpha_1} \in B_5$, $p_2^{\alpha_2} \in B_{17}$, $r_j^{t_j} \in \{q^t, t \leq I^q, 2 \leq q \leq 425\} = \{2^t, t \leq 420; 3^t, t \leq 209; 5^t, t \leq 105; 7^t, t \leq 69; 11^t, t \leq 41; 13^t, t \leq 34; 17^t, t \leq 26; 19^t, t \leq 23; p^t, t \leq [\frac{425}{p}], 23 \leq p \leq 425\}$.

因为 $B_5 \cap B_{17} \neq \emptyset$, 所以可取 $p_1^{\alpha_1} = p_2^{\alpha_2} \in B_5 \cap B_{17}$ 并视为一项.

参 考 文 献

- [1] Bai H. R., Liao Q. Y., Some generalizations of Smarandache function, *J. Sichuan Normal Univ.*, 2018, **41**(1): 32–38.
- [2] Chen B., An equation involving Smarandache function and the Euler function, *J. Southwest Univ.*, 2012, **34**: 70–73.
- [3] Farris M., Mitchell P., Bounding the Smarandache function, *Smarandache Notions Journal*, 2002, **13**: 37–42.
- [4] Gorski D., The Pseudo-smarandache Function, *Smarandache Notions Journal*, 2002, **13**(1–3): 140–149.
- [5] Kashiwara K., Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems, New Mexico Erhus University Press, ??, 1996.
- [6] Le M. H., A lower bound for $(2^{p-1}(2^p - 1))$, *Smarandache Notions Journal*, 2001, **12**(1): 217–218.
- [7] Liao Q. Y., Luo W. L., The explicit formula for the Smarandache function and solutions of the related equations, *J. Sichuan Normal Univ.*, 2017, **40**: 1–10.
- [8] Liu Y. M., On the solutions of an equation involving the Smarandache function, *Scientia Magna*, 2006, **2**(1): 76–79.
- [9] Smarandache F., Only Problems, Not Solution, Xiquan Publishing House, Chicago, 1993.
- [10] Wen T. D., A lower bound estimate of the Smarandache function (in Chinese), *Pure and Applied Mathematics*, 2010, **26**(3): 413–416.
- [11] Xu Z. F., the value distribution of Smarandache function (in Chinese), *Acta Mathematica Sinica*, 2006, **49**(5): 1009–1012.
- [12] Xing W. Y., On the Smarandache function, *Research on Smarandache Problem in Number Theory*, 2005, **2**: 103–106.
- [13] Yi Y., An equation involving the Euler function and Smarandache function, *Scientia Magna*, 2005, **1**(2): 172–175.
- [14] Zhang W. P., On two problems of the Smarandache function, *Journal of Northwest University*, 2008, **38**(2): 173–176.