第62卷第2期 数学学报中文版 Vol.62, No.2
2019年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)02-0177-14 **文献标识码: A**

Minkowski 空间的等价性定理及在 Finsler 几何的应用

李 明

重庆理工大学理学院 重庆 400054
E-mail: mingli@cqut.edu.cn

摘 要 首先利用中心仿射几何中的结果建立了 Minkowski 空间的等价性定理. 作为在 Finsler 几何中的应用, 我们证明满足一定条件的 Landsberg 空间为 Berwald 空间, 这些条件可以是具有闭的 Cartan 型形式, S 曲率为零或平均 Berwald 曲率为零.

关键词 Minkowski 空间; 卵形超曲面; Cartan 型形式; 平行移动; Berwald 空间
MR(2010) 主题分类 53B40, 53A15, 53A35
中图分类 O186.14

On Equivalence Theorems of Minkowski Spaces and Applications in Finsler Geometry

Ming LI

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, P. R. China
E-mail: mingli@cqut.edu.cn

Abstract We first establish an equivalence theorem of Minkowski spaces by using results in centro-affine differential geometry. As applications in Finsler geometry, we prove that a Finsler manifold is a Berwald space if it is a Landsberg space and satisfies one of the following conditions: closed Cartan-type form, vanishing S curvature or vanishing mean Berwald curvature.

Keywords Minkowski space; hyperovaloid; Cartan-type form; parallel transport; Berwald space
MR(2010) Subject Classification 53B40, 53A15, 53A35
Chinese Library Classification O186.14

1 引言

本文中, Minkowski 空间指具有光滑的强凸 Minkowski 范数 $\mathbf{F}$ 的 n 维实向量空间 V, 这里

收稿日期: 2018-03-01; 接受日期: 2018-05-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501067, 11571184);
the Marie Cuire IRSES project (PIRSES-GA-2012-317721-LIE-DIFF-GEOM)

的光滑性指 $\mathbf{F}$ 在 $V_0 := V \setminus \{0\}$ 上光滑. 两个 Minkowski 空间 $(V_1, \mathbf{F}_1)$ 和 $(V_2, \mathbf{F}_2)$ 称为是等价的, 如果存在非退化的线性变换 $L : V_1 \to V_2$, 使得 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \circ L$ 成立. 例如, 若 n 维 Minkowski 空间的范数由内积诱导, 则其等价于 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, 其中 $\|y\| = \sqrt{\sum(y^i)^2}$, $\forall\, y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$.

在 Minkowski 空间 $(V, \mathbf{F})$ 上, 基本张量 $\hat{g}$ 和 Cartan 张量 $\hat{A}$ 是由范数 $\mathbf{F}$ 导出的两个基本不变量. $\hat{A}$ 的迹称为 Cartan 形式 η. 在第 2 节中, 将利用这些几何不变量建立下述 Minkowski 空间的等价性定理.

定理 1.1 设 $(V_1, \mathbf{F}_1)$ 和 $(V_2, \mathbf{F}_2)$ 为两个 Minkowski 空间, 具有维数 $n > 2$. 设映射 $f : V_1 \to V_2$ 保持范数并且为 $(V_1)_0$ 到 $(V_2)_0$ 的微分同胚, 而且满足

$$f(tv) = tf(v), \quad \forall\, v \in V_1, \quad \forall\, t > 0.$$

那么 $\hat{g}_1 = f^*\hat{g}_2$ 且 $\eta_1 = f^*\eta_2$ 当且仅当存在非退化线性变换 $L \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, 使得 $f = L$ 且

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \circ L.$$

上述定理推广了 Minkowski 平面的等价性定理 (文 [4, 命题 4.4.1]). 我们的证明思路是建立 Minkowski 空间的微分几何与范数单位球的中心仿射微分几何的对应, 然后应用 Schneider [20] 关于仿射凸超曲面的刚性定理. 这种思想已被多位学者提及 [2, 5, 6, 10, 13–15, 18], 而上述对应首先由 Laugwitz 引入 [13–15]. 然而为了方便读者, 我们会在文章中给出一些细节.

接下来探讨 Finsler 几何中有关非 Riemann 曲率的一些问题. 设 M 为 n 维光滑流形, $\pi : TM \to M$ 是 M 的切丛. 令 $TM_0 = TM \setminus 0$, 其中 0 指 TM 的零截面. M 上的 Finsler 结构指函数 $\mathbf{F} : TM \to \mathbb{R}$, 要求 $\mathbf{F}$ 连续且在 TM_0 光滑, 并且在 $p \in M$ 处的切空间的限制 $\mathbf{F}_{T_pM}$ 是 Minkowski 范数. Finsler 结构 $\mathbf{F}$ 诱导 TM_0 上的喷射结构, 由此进一步导出 $T(TM_0)$ 的水平子丛或 M 的非线性联络.

一方面, $T(TM_0)$ 的分裂允许我们引入 TM_0 上的三个垂直张量 $\hat{g}$, $\hat{A}$ 和 η. 对任意 $p \in M$, 上述张量在 $T_pM \setminus \{0\}$ 的限制 $i_p^*\hat{g}$, $i_p^*\hat{A}$ 以及 $i_p^*\eta$ 分别为 $(T_pM, \mathbf{F}_{T_pM})$ 的基本张量, Cartan 张量以及 Cartan 形式. 这三个张量作为几何不变量独立于 Finsler 流形 $(M, \mathbf{F})$ 的线性联络的选取.

另一方面, Finsler 流形 $(M, \mathbf{F})$ 的非线性联络导出平行移动的概念. 令 $\sigma : [a, b] \to M$ 为 $\sigma(a) = p$ 到 $\sigma(b) = q$ 的分段光滑曲线. 平行移动指映射

$$P_{\sigma,t} : T_pM \to T_{\sigma(t)}M, \quad \forall\, t \in [a, b],$$

可以证明限制映射 $P_{\sigma,t} : T_pM \setminus \{0\} \to T_{\sigma(t)}M \setminus \{0\}$ 为保持范数的微分同胚, 而且

$$P_{\sigma,t}(\lambda y) = \lambda P_{\sigma,t}(y), \quad \forall\, \lambda > 0, \quad \forall\, y \in T_pM \setminus \{0\}.$$

平行移动一般是非线性映射. 事实上, $(M, \mathbf{F})$ 为 Berwald 流形当且仅当平行移动均为线性映射 (文 [3, 4, 8]). 对于 Berwald 流形这种方式的刻画首先由 Ichijyō [11] 给出. 将这个事实与定理 1 结合起来, 马上得到下面的结果.

定理 1.2 设 $(M, \mathbf{F})$ 是维数 $n > 2$ 的 Finsler 流形. $(M, \mathbf{F})$ 是 Berwald 空间当且仅当垂直张量 $\hat{g}$ 和 η 在平行移动下保持不变.

在文 [1, 3, 8, 12] 中证明 $\hat{g}$ 在平行移动下保持不变当且仅当 $(M, \mathbf{F})$ 是 Landsberg 流形, 即 Landsberg 曲率为零 (Landsberg 曲率在文 [28] 中也被称为第二 Cartan 张量).

由定理 1.2 以及之前我们在文 [9, 27] 的工作, 可得关于 Berwald 流形的新的刻画.

定理 1.3 对于维数 $n > 2$ 的 Finsler 流形, 下述命题等价:

(1) M 是具有零 S- 曲率的 Landsberg 流形;

(2) M 是 Landsberg 流形且 η 为恰当形式;

(3) M 是 Landsberg 流形且 $d\eta = 0$;

(4) M 是 Berwald 流形.

Finsler 几何中一个长期未解决的问题是: 是否所有的 Landsberg 流形均为 Berwald 流形? 该问题也称为独角兽问题. 沈忠民曾提出一个相关问题: 若 Landsberg 流形的平均 Berwald 曲率为零, 该流形是否为 Berwald 流形 (文 [26, 第 322 页])? 下面的结果是对后者的肯定回答.

定理 1.4 若 Landsberg 流形的平均 Berwald 曲率为零, 则其为 Berwald 流形.

本文第 1 节简要回顾实线性空间中非退化超曲面的中心仿射微分几何的一些结果. 第 2 节建立 Minkowski 空间与包含原点在内部的卵形超曲面的对应. 然后证明定理 1.1. 第 3 节运用 Chern 联络研究 Finsler 流形的一些局部几何不变量. 最后, 运用平行移动来刻画具有一些特殊性质的 Finsler 流形, 然后给出定理 1.2–1.4 的证明.

本文中, 小写拉丁字母表示的指标变化范围从 1 到 n, 小写的希腊字母表示的指标变化范围从 1 到 $n-1$. 我们采用 Einstein 求和约定. 全文假设 $n > 2$.

2 超曲面的中心仿射微分几何简介

本节简要介绍具有中心仿射法化的超曲面的基本方程与一些必要的相关结果 [16, 19, 22].

2.1 非退化超曲面的中心仿射法化

设 V 是定向的 n 维向量空间. 令 V^* 为 V 的对偶空间, 并且 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}$ 为配对映射. V 具有典型的光滑流形结构以及平坦仿射联络 $\bar\nabla$.

设 $x : M \to V$ 是 $n-1$ 维定向的连通的光滑流形 M 的浸入映射. 对任意 $p \in M$, $dx(T_pM)$ 是 $T_{x(p)}V$ 的 $n-1$ 维子空间. 由此可定义 $C_pM = \{v_p^* \in V^* \mid \ker v_p^* = dx(T_pM)\} \subset T^*_{x(p)}V$. 平凡线丛 $CM = \bigcup_p C_pM$ 称为 x 的余法丛.

令 Y 为 CM 的处处不为零的截面. 若 $\operatorname{rank}(dY, Y) = n$, 则 x 称为非退化超曲面. 非退化性不依赖于余法向量场 Y 的选取. 本文将只涉及非退化超曲面. 定义向量场 $y : M \to V$ 为 $y(p) = -x(p)$, $\forall\, p \in M$. 若 $\langle Y, y\rangle = 1$, 那么 $\{Y, y\}$ 称为 x 的中心仿射法化.

下面列出 $x(M)$ 相对于中心仿射法化 $\{Y, y\}$ 的结构方程

$$
\begin{aligned}
&\bar\nabla_v y = dy(v) = -dx(v),\\
&\bar\nabla_v dx(w) = dx(\nabla_v w) + h(v,w)y,\\
&\bar\nabla^*_v dY(w) = dY(\nabla^*_v w) - h(v,w)Y,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 h 是非退化的 $(0,2)$ 型对称张量, 称为仿射度量. ∇ 和 ∇^* 均为无挠的仿射联络. 这些几何量满足如下的关系式

$$
dh(v_1, v_2) = h(\nabla v_1, v_2) + h(v_1, \nabla^* v_2). \tag{2.2}
$$

三元组 $\{\nabla, h, \nabla^*\}$ 称为共轭联络. 对于任意的共轭联络三元组 $\{\nabla, h, \nabla^*\}$, 可以定义 $C = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^*) \in \Omega^1(M, \operatorname{End}(TM))$. 由 (2.2) 式, $(0,3)$- 型张量 $\hat C := h \circ C$ 是对称张量, 称为 $\{\nabla, h, \nabla^*\}$ 的

3- 形式. 关于 $\hat{C}$ 有下面的公式成立:

$$\hat{C} = -\frac{1}{2}\nabla h. \tag{2.3}$$

对于 $\{\nabla, h, \nabla^*\}$, Tchebychev 形式 $\hat{T}$ 定义为 C 的迹, $\hat{T} = \frac{1}{n-1}\operatorname{tr} C$. Tchebychev 向量场 T 为 $\hat{T}$ 关于仿射度量 h 的对偶.

令 $\omega(h)$ 为 $x(M)$ 上仿射度量 h 的黎曼体积元, 而 ω 为 $x(M)$ 上由 V 的定向诱导的体积元. 可以证明

$$\hat{T} = \frac{1}{n-1} d \log \left| \frac{\omega}{\omega(h)} \right|. \tag{2.4}$$

2.2 卵形超曲面的一个刚性定理

非退化超曲面的局部存在和唯一性定理是仿射微分几何的经典结果 (文 [22, 6.3.3]). 对于卵形超曲面而言, 有不平凡的整体唯一性结果. 首先回顾卵形超曲面的一些基本性质.

引理 2.1 令 M 为 $n-1$ 维连通的光滑闭流形. 令 $x: M \to V$ 为 M 到 n 维实向量空间 V 的浸入. 如果 $x(M)$ 的中心仿射法化非退化, 那么 $x(M)$ 为卵形超曲面.

引理 2.2 (文 [19, Chapter III, 命题 7.3]) 设 $x: M \to V$ 为 $n-1$ 维卵形超曲面. 那么有下述结果:

(i) M 微分同胚于 $n-1$ 维标准球面 $\mathbb{S}^{n-1}$;

(ii) x 为嵌入映射;

(iii) $x(M)$ 是一个强凸的凸体的边界, 且该凸体包含原点在其内部.

注 2.3 文 [19] 中含有两种描述凸性的概念, 分别为 "局部严格凸" 和 "整体严格凸". 但在文 [4] 中, 上述 "局部严格凸" 被称为 "强凸", 而 "整体严格凸" 被称为 "严格凸". 可以证明 [4] 强凸蕴含严格凸, 反之不成立. 本文采用文 [4] 中的术语.

接下来引述 Schneider 在文 [20] 中证明的卵形超曲面的整体唯一性定理.

引理 2.4 (文 [20, Satz 4.2]) 设 $x_i: M \to V_i$ 为 $n-1$ 维连通的光滑闭流形 M 到 $n > 2$ 维实向量空间 V_i 的非退化浸入, 并且具有中心仿射法化 $\{Y_i, y_i\}$, $i = 1, 2$. 设 h_i 和 $\hat{T}_i$ 分别为 x_i 仿射度量和 Tchebychev 形式, $i = 1, 2$.

那么 $h_1 = h_2$ 且 $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$ 当且仅当存在非退化线性同态 $L \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$, 使得 $x_2 = L \circ x_1$.

3 Minkowski 空间的等价性定理

为完备起见, 首先重新建立 Minkowski 空间微分几何与其单位球的中心仿射微分几何之间的典型对应. 然后应用引理 2.4 来证明等价性定理 1.1.

3.1 Minkowski 空间及其单位球

设 V 为 n 维实向量空间, 具有给定的定向. 令 $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ 为 V 一个定向基底. 定义映射 $\phi: V \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\phi(y) = (y^1, \ldots, y^n)^T, \quad \forall\, y = y^i \mathbf{b}_i \in V,$$

此映射给出了 V 的标准光滑结构. 令 $\{\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ 为对偶基. V 的定向由 n 形式 $\omega = \mathbf{b}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_n^*$ 给出, ω 也给出 V 的一个体积形式.

对任意的函数 $\mathbf{f}: V \to \mathbb{R}$, 记 $f = \mathbf{f} \circ \phi^{-1}$. $\mathbf{f}$ 称为 V 上的光滑函数, 如果 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数.

定义 3.1 令 V 是 n 维实向量空间, 具有标准的光滑结构 $(y^i;\phi)$. V 上的 Minkowski 范数指函数 $\mathbf{F}: V \to [0,+\infty)$, 满足

(i) $\mathbf{F}$ 在 V 上连续, 在 $V_0 := V \setminus \{0\}$ 上光滑;

(ii) $\mathbf{F}(\lambda v) = \lambda \mathbf{F}(v)$, $\forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+$;

(iii) $\mathbf{F}$ 具有强凸性, 即, 对称张量 $\bar{g} := \bar{\nabla} d \left[\frac{1}{2}\mathbf{F}^2\right]$ 处处正定.

带有 Minkowski 范数 $\mathbf{F}$ 的向量空间 V 称为一个 Minkowski 空间, 记作 $(V,\mathbf{F})$.

根据定义, $(V_0,\bar{g})$ 是与 Minkowski 空间 $(V,\mathbf{F})$ 相伴的 Riemann 流形. $(V_0,\bar{g})$ 的 Riemann 几何非常基本并且在 Finsler 几何中有很多应用. 下面的几何对象几乎给出了 Minkowski 空间的所有几何信息.

定义 3.2 设 $(V,\mathbf{F})$ 为 n 维 Minkowski 空间,

$$\mathbf{I_F} := \{v \in V \mid \mathbf{F}(v) = 1\} \tag{3.1}$$

称为 $(V,\mathbf{F})$ 的单位球面.

$\mathbf{I_F}$ 可以作为 $(V_0,\bar{g})$ 的子流形加以研究, 详细内容可见文 [4]. 下面研究 $\mathbf{I_F}$ 的中心仿射微分几何. 事实上, 我们可以说明 $\mathbf{I_F}$ 的这两种几何是完全相同的. 然而中心仿射微分几何更加适合讨论等价性问题.

定义 3.3 (见文 [4, 4.2 节]) 令 $(V,\mathbf{F})$ 和 $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$ 分别为 n 维 Minkowski 空间. 若存在同态 $L \in \mathrm{Hom}(\tilde{V},V)$, 使得 $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\circ L$. 那么称 $(V,\mathbf{F})$ 和 $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$ 是等价的, 记作 $(V,\mathbf{F}) \sim (\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$.

很明显 "$\sim$" 是全体 n 维 Minkowski 空间构成的集合上的等价关系. 根据定义可直接验证下面的命题.

引理 3.4 令 $(V,\mathbf{F})$ 和 $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$ 分别为 n 维 Minkowski 空间. 令 $\mathbf{I_F}$ 和 $\mathbf{I_{\tilde{F}}}$ 分别为相应的单位球面. 那么 $(V,\mathbf{F}) \sim (\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$ 当且仅当 $\mathbf{I_F} = L(\mathbf{I_{\tilde{F}}})$, 其中 $L \in \mathrm{Hom}(\tilde{V},V)$.

接下来引入 $(V_0,\bar{g})$ 上的三个基本张量.

定义 3.5 令 $(V,\mathbf{F})$ 为 n 维 Minkowski 空间. 定义共形度量 $\hat{g}$ 为 $\hat{g} = \frac{1}{\mathbf{F}^2}\bar{g}$. Cartan 张量定义为 $\hat{A} = \frac{1}{2\mathbf{F}^2}\bar{\nabla}\bar{g}$. 令 $|\mathscr{G}| = \left|\frac{\omega(\bar{g})}{\omega}\right|$ 为 $\bar{g}$ 的 Riemann 测度相对于 $\omega = \mathbf{b}_1^*\wedge\cdots\wedge\mathbf{b}_n^*$ 的 Radon–Nikodym 导数. 那么 Cartan 形式定义为 $\eta = d\log|\mathscr{G}|$.

引理 3.6 张量 $\hat{g}$, $\hat{A}$ 和 η 对于 Minkowski 空间等价性决定的等价关系而言是相对不变量.

证明 令 $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ 为 V 的一组定向基底. 令 ϕ 是 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的坐标映射. 那么 $d\mathbf{F} = \phi^* dF$, 而且

$$\bar{g} = \phi^*((F_{y^i}F_{y^j} + FF_{y^iy^j})dy^i \otimes dy^j),$$

其中 $F = \mathbf{F}\circ\phi^{-1}$.

令 $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{F}})$ 与 $(V,\mathbf{F})$ 等价. 因此, 存在 $L \in \mathrm{Hom}(\tilde{V},V)$, 使得 $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\circ L$. 令 $\tilde{\mathbf{b}}_i = L^{-1}(\mathbf{b}_i)$, $i = 1,\ldots,n$. 令 $\tilde{\phi}$ 为 $\tilde{V}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的坐标映射. 因此 $\tilde{\phi} = \phi\circ L$. 由此可得 $\tilde{F} = \tilde{\mathbf{F}}\circ\tilde{\phi}^{-1} = (\mathbf{F}\circ L)\circ(\phi\circ L)^{-1} = F$. 所以

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{g}} &= \tilde{\phi}^*((\tilde{F}_{y^i}\tilde{F}_{y^j} + \tilde{F}\tilde{F}_{y^iy^j})dy^i \otimes dy^j)\\ &= L^*\circ\phi^*((F_{y^i}F_{y^j} + FF_{y^iy^j})dy^i \otimes dy^j) = L^*\bar{g}.\end{aligned}$$

同理可证 $\tilde{\hat{A}} = L^*\hat{A}$ 以及 $\tilde{\eta} = L^*\eta$. 证毕.

接下来, 具体给出 Minkowski 空间单位球面的中心仿射几何量.

引理 3.7 设 $\mathbf{I_F}$ 为 Minkowski 空间 $(V,\mathbf{F})$ 的单位球面. 那么, 恒同映射 $i:\mathbf{I_F}\to V$ 为嵌入. $\forall v\in\mathbf{I_F}$, 若取 $y=-v\in T_vV$, $Y=-d\mathbf{F}\in T_v^*V$, 那么 $\{Y,y\}$ 正是 $\mathbf{I_F}$ 的中心仿射法化.

证明 因为 $\mathbf{F}:V_0\to\mathbb{R}^+$ 为光滑映射, 以及 $\mathbf{F}(\lambda v)=\lambda\mathbf{F}(v)$, $\forall\lambda>0$, 故

$$\mathbf{F}_{*v}\left(\frac{v}{\mathbf{F}(v)}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\in T_{\mathbf{F}(v)}\mathbb{R}^+,\quad v\in T_vV.$$

所以 $\mathbf{F}$ 为淹没. 根据正则值原像定理, $\mathbf{I_F}=\mathbf{F}^{-1}(1)$ 为 V_0 的嵌入子流形.

对于任意的光滑曲线 $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbf{I_F}$, 且满足 $\gamma(0)=v\in\mathbf{I_F}$, 显然有 $\mathbf{F}(\gamma(t))=1$. 因此

$$0=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathbf{F}(\gamma(t))=\langle d\mathbf{F},\dot\gamma(0)\rangle,$$

从而 $-d\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{I_F}$ 的余法向量场.

由齐次函数的 Euler 引理,

$$\langle -d\mathbf{F},-v\rangle|_v=\left.\left\langle F_{y_i}dy^i,y^j\frac{\partial}{\partial y^j}\right\rangle\right|_{\phi(v)}=F_{y_i}y^i|_{\phi(v)}=1,$$

其中 $F=\mathbf{F}\circ\phi^{-1}$. 从而 $\{Y=-d\mathbf{F},y=-v\}$ 正是 $\mathbf{I_F}$ 的中心仿射法化. 证毕.

由引理 3.7, 以及 Guass 方程 (2.1), 可得到 $\mathbf{I_F}$ 上的仿射度量 h 的表达式如下.

引理 3.8 中心仿射度量 h 由下式给出

$$h=i^*\hat g=i^*\mathbf{h},\tag{3.2}$$

其中 $i:\mathbf{I_F}\to V$ 是恒同映射, 而 $\mathbf{h}:=\mathbf{F}\bar\nabla d\mathbf{F}$ 通常称为角度量. 由此可知, h 正定且 $\mathbf{I_F}$ 为卵形超曲面.

证明 Gauss 方程 (2.1) 此时写为

$$\bar\nabla_u i_*w=i_*(\nabla_u w)+h(u,w)y,$$

其中 $u,w\in\Gamma(T\mathbf{I_F})$ 为 $\mathbf{I_F}$ 上的光滑向量场, 而 ∇ 是诱导的仿射联络.

因为 $\hat g=\mathbf{F}^{-2}(d\mathbf{F}\otimes d\mathbf{F}+\mathbf{F}\bar\nabla d\mathbf{F})$, 所以

$$\begin{aligned}i^*\hat g(u,w)&=\mathbf{F}^{-2}(d\mathbf{F}\otimes d\mathbf{F}+\mathbf{F}\bar\nabla d\mathbf{F})(i_*u,i_*w)=\bar\nabla d\mathbf{F}(i_*u,i_*w)\\&=\langle\bar\nabla_u d\mathbf{F},i_*w\rangle=\langle -d\mathbf{F},\bar\nabla_u i_*w\rangle=h(u,w).\end{aligned}$$

证毕.

引理 3.9 3 形式 $\hat C$ 由下式给出

$$\hat C=-i^*\hat A,\tag{3.3}$$

Tchebychev 形式为

$$\hat T=-\frac{1}{n-1}i^*\eta.\tag{3.4}$$

证明 令 $u,w,z\in\Gamma(T\mathbf{I}_F)$ 为 $\mathbf{I_F}$ 上的光滑向量场. 因为

$$A=\frac{1}{2\mathbf{F}^2}\bar\nabla(d\mathbf{F}\otimes d\mathbf{F}+\mathbf{F}\bar\nabla d\mathbf{F})=\frac{1}{2\mathbf{F}^2}(\bar\nabla d\mathbf{F}\otimes d\mathbf{F}+2d\mathbf{F}\otimes\bar\nabla d\mathbf{F}+\mathbf{F}\bar\nabla\bar\nabla d\mathbf{F}),$$

以及

$$\bar\nabla d\mathbf{F}(u,y)=\langle\bar\nabla_u d\mathbf{F},y\rangle=\langle -d\mathbf{F},\bar\nabla_u y\rangle=\langle -d\mathbf{F},-i_*u\rangle=0.$$

根据 (2.3) 可知

$$\begin{aligned}2i^*A(z,u,w)&=\frac{1}{\mathbf{F}^2}(\bar{\nabla}d\mathbf{F}\otimes d\mathbf{F}+2d\mathbf{F}\otimes\bar{\nabla}d\mathbf{F}+\mathbf{F}\bar{\nabla}\bar{\nabla}d\mathbf{F})(i_*z,i_*u,i_*w)\\&=\bar{\nabla}\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*z,i_*u,i_*w)=(\bar{\nabla}_z(\bar{\nabla}d\mathbf{F}))(i_*u,i_*w)\\&=z(\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*u,i_*w))-\bar{\nabla}d\mathbf{F}(\bar{\nabla}_zi_*u,i_*w)-\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*u,\bar{\nabla}_zi_*w)\\&=z(\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*u,i_*w))-\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*(\nabla_zu),i_*w)-\bar{\nabla}d\mathbf{F}(i_*u,i_*(\nabla_zu))\\&=z(i^*(\bar{\nabla}d\mathbf{F})(u,w))-i^*(\bar{\nabla}d\mathbf{F})(\nabla_zu,w)-i^*(\bar{\nabla}d\mathbf{F})(u,\nabla_zw)\\&=z(h(u,w))-h(\nabla_zu,w)-h(u,\nabla_zw)=(\nabla_zh)(u,w)\\&=-2\hat{C}(z,u,w).\end{aligned}$$

所以 (3.3) 得证. 根据 (2.4), 类似可证 (3.4). 证毕.

前面的引理表明如何从 Minkowski 范数导出单位球面的中心仿射几何量. 反过来, 一个包含原点在其内部的卵形超曲面 M 可以定义 Minkowski 范数 $\mathbf{F}$, 使得 $\mathbf{I_F}=M$.

引理 3.10　设 V 为 n 维实向量空间. 设 M 一个包含原点在其内部的卵形超曲面. 那么存在 V 上的 Minkowski 范数 $\mathbf{F}$, 使得 $\mathbf{I_F}=M$.

证明　因为 M 强凸, 故对于 $\tilde{v}\in V_0$, 射线 $\{t\tilde{v}\,|\,t>0\}$ 与 M 有唯一的交点 v. 设 $\tilde{v}=\lambda v$. 我们可定义函数 $\mathbf{F}:V_0\to(0,+\infty)$ 为

$$\mathbf{F}(\tilde{v})=\lambda.$$

显然, $\mathbf{F}$ 是 1 阶正齐次函数. 令 (U,ψ) 为 M 的一个局部坐标系, 坐标映射为 $\psi:U\to\mathbb{R}^{n-1}$. 数乘运算 $s:\mathbb{R}^+\times V\to V$ 是光滑映射. 因 M 为光滑子流形, 从而 s 在 $\mathbb{R}^+\times U$ 的限制也光滑, 记 $\mathbb{R}^+U:=s(\mathbb{R}^+\times U)$. 由于 s 在 (λ,v) 的 Jacobian 为 $J=\lambda^{n-1}(v,dv)=(-1)^n\lambda^{n-1}(y,dy)$, 其中 $y=-v$ 为 M 在 v 点处的中心法向. 因此 J 非退化. 由反函数定理, $s:\mathbb{R}^+\times U\to\mathbb{R}^+U$ 为微分同胚. 令 $\tilde{\phi}=(i\times\psi)\circ s^{-1}$ 是从 $\mathbb{R}^+U$ 到 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}=\mathbb{R}^n$ 的映射. 那么 $\tilde{\phi}$ 给出了 $\mathbb{R}^+U$ 的坐标映射, 并且 $\mathbf{F}\circ\tilde{\phi}^{-1}(\lambda,\psi(U))=\lambda$, 因此 $\mathbf{F}$ 在 V_0 上光滑.

类似于引理 3.7, $\{-v,-d\mathbf{F}\}$ 为 M 在点 $v\in M$ 处的中心仿射法化. 进一步, 有

$$s^*\bar{g}=s^*\left(\bar{\nabla}d\left[\frac{1}{2}\mathbf{F}^2\right]\right)=d\lambda\otimes d\lambda+\lambda h,$$

其中 h 是 M 的中心仿射度量. 所以我们证明了 $\mathbf{F}$ 是 V 上的 Minkowski 范数. 根据定义可知 $\mathbf{I_F}=M$. 证毕.

3.2　定理 1.1 的证明

证明　充分性由引理 3.6 可直接得到. 下证必要性. 显然 f 诱导单位球面间的微分同胚 $f:\mathbf{I}_{\mathbf{F}1}\to\mathbf{I}_{\mathbf{F}2}$. 作为引理 3.8, 3.9 和 2.4 的推论, f 为线性映射. 应用引理 3.4, 定理得证. 证毕.

4　Finsler 流形的三个特殊张量的一些性质

4.1　Finsler 流形的陈联络

设 M 为 n 维光滑流形, $\pi:TM\to M$ 为 M 的切丛. 设 $(U;\phi(x)=(x^1,x^2,\dots,x^n))$ 为 M 的一个局部坐标系. 由此可诱导 $\pi^{-1}(U)$ 上的局部坐标映射 $\psi(x,y)=(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$. 记 $TM_0=TM\setminus 0$, 其中 0 表示 TM 的零截面. 那么 $\psi(x,y)$ 另加约束条件 $y\neq 0$ 后, 成为 TM_0 的

坐标映射.

定义 4.1 M 上的 Finsler 结构指连续函数 $\mathbf{F}: TM \to \mathbb{R}$, 但在 TM_0 上光滑, 并且对于任意 $x \in M$, $\mathbf{F}|_{T_xM}$ 为 Minkowski 范数. 具有一个 Finsler 结构 $\mathbf{F}$ 的流形 M 称为一个 Finsler 流形, 记作 $(M, \mathbf{F})$.

令 $F = \mathbf{F} \circ \psi^{-1}$, 那么 F 是具有 $2n$ 个变量的函数. 根据 Minkowski 空间的定义, $n \times n$ 矩阵
$$(g_{ij}) := \left(\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}\right)$$
处处正定.

利用 Finsler 结构 $\mathbf{F}$, 可以计算 M 上曲线能量的变分. 一阶变分的 Euler–Lagrange 方程中涉及下面的几何量
$$G^i = \frac{1}{4}g^{ij}([F^2]_{y^jx^k}y^k - [F^2]_{x^j}), \quad i = 1, \ldots, n,$$
其中 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. G^i 通常在文献中被称为喷射系数. 显然有
$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \quad \lambda > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$
而 Finsler 流形 $(M, \mathbf{F})$ 的喷射结构 $\mathbf{G}$ 是指定义在 TM_0 上的光滑向量场
$$\mathbf{G} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

令 $\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial G^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$, $\frac{\delta}{\delta y^i} := F\frac{\partial}{\partial y^i}$. 显然可知, 向量场
$$\left\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \frac{\delta}{\delta x^2}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x^n}, \frac{\delta}{\delta y^1}, \frac{\delta}{\delta y^2}, \ldots, \frac{\delta}{\delta y^n}\right\} \tag{4.2}$$
构成 TM_0 的局部切标架场. 由此, Finsler 结构 $\mathbf{F}$ 给出了 $T(TM_0)$ 的一个分裂:
$$T(TM_0) = H(TM_0) \oplus V(TM_0),$$
其中 $H(TM_0) = \operatorname{span}\left\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x^n}\right\}$, 而 $V(TM_0) = \operatorname{span}\left\{\frac{\delta}{\delta y^1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta y^n}\right\}$. 下面的线性映射 $J: T(TM_0) \to T(TM_0)$,
$$J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \frac{\delta}{\delta y^i}, \quad J\left(\frac{\delta}{\delta y^i}\right) = -\frac{\delta}{\delta x^i}$$
给出了 TM_0 的一个近复结构. 令 $\{\delta x^1, \delta x^2, \ldots, \delta x^n, \delta y^1, \delta y^2, \ldots, \delta y^n\}$ 为 (4.2) 的对偶标架场. 那么
$$\delta x^i = dx^i, \quad \delta y^i = \frac{1}{F}\left(dy^i + \frac{\partial G^i}{\partial y^j}dx^j\right),$$
并且
$$J^*(\delta x^i) = -\delta y^i, \quad J^*(\delta y^i) = \delta x^i, \tag{4.3}$$
其中 J^* 记 J 的对偶映射.

现在 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ 定义了拉回丛 $\pi^*TM \to TM_0$ 上的一个欧氏度量. 值得注意的是, π^*TM 有一个整体截面 $l: TM_0 \to \pi^*TM$, 定义为 $l(x, y) = \left(x, y, \frac{y}{F(x,y)}\right)$.

对于 (π^*TM, g) 的任意局部幺正标架场 $\{e_1, \ldots, e_n\}$, 其中特别选择 $e_n = l$, 令 $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ 为对偶标架场. 显然, ω^i 可是自然地视为 TM_0 的局部 1 形式. 而 ω^n 正是 Hilbert 形式, ω^n 是整体定义的 1 形式并且 $\omega^n = F_{y^i}\delta x^i$. 令
$$\omega^{n+i} = J^*(\omega^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

以及

$$\theta = \{\omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{n+1}, \dots, \omega^{2n}\}, \tag{4.4}$$

其中 $\omega^{2n} = -F_{y^i}\delta y^i = -d\log F$. θ 给出了 TM_0 的局部余标架场. 而张量

$$g^{T(TM_0)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \otimes \omega^i + \sum_{i=1}^{n} \omega^{n+i} \otimes \omega^{n+i}$$

定义了 TM_0 的一个 Riemann 度量. 令 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n}\}$ 记 θ 的对偶标架场. 那么显然有

$$H(TM_0) = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}. \tag{4.5}$$

记 $\omega^j = v_i^j \delta x^i$, $\omega^{n+j} = J^*(v_i^j \delta x^i) = -v_i^j \delta y^i$. 那么有

$$\mathbf{e}_i = u_i^j \frac{\delta}{\delta x^j} \quad 和 \quad \mathbf{e}_{n+i} = -u_i^j \frac{\delta}{\delta y^j}, \tag{4.6}$$

其中 $(u_j^i) = (v_i^j)^{-1}$. 易知 $v_i^n = F_{y^i}$ 以及 $u_n^i = \frac{y^i}{F}$.

记 ∇^{Ch} 为陈联络, 即 $\nabla^{\mathrm{Ch}} : \Omega^*(TM_0; H(TM_0)) \to \Omega^{*+1}(TM_0; H(TM_0))$. 在文 [9] 中, 我们证明陈联络的对称化正是 Cartan 联络 ∇^{Ca}. ∇^{Ca} 和 ∇^{Ch} 的差称为 Cartan 变换

$$H = \nabla^{\mathrm{Ca}} - \nabla^{\mathrm{Ch}} \in \Omega^1(TM_0, \mathrm{End}(H(TM_0))).$$

令 $H = H_{ij}\omega^j \otimes \mathbf{e}_i$. 根据文 [9, 引理 3, 4] 可知, 相对于标架变换 (4.6), $H_{ij} = H_{ji} = H_{ij\gamma}\omega^{n+\gamma}$ 由下式给出 $H_{ij\gamma} = -A_{pqk}u_i^p u_j^q u_\gamma^k$, 其中 $A_{ijk} = \frac{1}{4}F[F^2]_{y^iy^jy^k}$.

令 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_j^i)$ 为陈联络在局部幺正标架场 (4.5) 下的联络矩阵

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j.$$

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_j^i)$ 由下面的结构方程唯一确定 [4, 8, 17]

$$\begin{cases} d\vartheta = -\boldsymbol{\omega} \wedge \vartheta, \\ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^t = -2H, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $\vartheta = (\omega^1, \dots, \omega^n)^t$. 进一步, 有 $\omega_\alpha^n = -\omega_n^\alpha = \omega^{n+\alpha}$ 和 $\omega_n^n = 0$.

注 4.2 (4.7) 中的第一个方程描述了陈联络的无挠性. (4.7) 中的第二个方程表明陈联络几乎保度量. 该联络最早是陈省身在研究 Finsler 空间的局部等价性问题 [7] 时构造的. 在文 [9] 中, 我们证明了陈联络正是叶状结构理论下 $H(TM_0)$ 上的 Bott 联络 [29].

令 $R^{\mathrm{Ch}} = \left(\nabla^{\mathrm{Ch}}\right)^2$ 为陈联络 ∇^{Ch} 的曲率. 令 $\Omega = \left(\Omega_j^i\right)$ 为 R^{Ch} 对应的曲率形式矩阵. 那么 $\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i$. 根据 (4.7) 可知 $\Omega_j^i = \frac{1}{2}R_j{}^i{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l + P_j{}^i{}_{k\gamma}\omega^k \wedge \omega^{n+\gamma}$, 其中 $R_j{}^i{}_{kl} = -R_j{}^i{}_{lk}$. 按照文 [17] 中的术语, 曲率 R^{Ch} 中 “$h-h$” 部分

$$R := \frac{1}{2}R_j{}^i{}_{kl}(\omega^k \wedge \omega^l) \otimes \omega^j \otimes \mathbf{e}_i$$

称为陈联络的 Riemann 曲率. 而 “$h-v$” 部分

$$P := P_j{}^i{}_{k\gamma}(\omega^k \wedge \omega^{n+\gamma}) \otimes \omega^j \otimes \mathbf{e}_i$$

称为陈联络的 Minkowski 曲率. Landsberg 曲率定义为

$$L := P_n{}^i{}_{k\gamma}(\omega^k \wedge \omega^{n+\gamma}) \otimes \mathbf{e}_i,$$

而平均 Landsberg 曲率定义为 $\mathbf{J}=\mathrm{tr}\,L$. 若 Finsler 流形满足条件 $P=0$, $L=0$ 或 $\mathbf{J}=0$, 那么它相应地称为 Berwald, Landsberg 或弱 Landsberg 流形.

4.2 垂直基本张量, 垂直 Cartan 张量以及 Cartan 型形式

下面定义 TM_0 上的两个对称张量场

$$\hat{g}=\sum_{j=1}^{n}\omega^{n+j}\otimes\omega^{n+j},\quad \hat{A}=H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}.$$

对任意 $p\in M$, $\hat{g}$ 和 $\hat{A}$ 在纤维 $T_pM\setminus\{0\}$ 上的限制正好分别给出 Minkowski 空间 $(T_pM,\mathbf{F}_{T_pM})$ 的基本张量和 Cartan 张量.

命题 4.3 $\hat{g}$ 和 $\hat{A}$ 沿水平方向的李导数分别为

$$\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\hat{g}\equiv -2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}P_{n\ i\alpha}^{\ \beta}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n) \tag{4.8}$$

和

$$\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\hat{A}\equiv Z_{\alpha\beta\gamma i}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n), \tag{4.9}$$

其中 $Z_{\alpha\beta\gamma i}=H_{\alpha\beta\gamma|i}-H_{\mu\beta\gamma}P_{n\ i\alpha}^{\ \mu}-H_{\alpha\mu\gamma}P_{n\ i\beta}^{\ \mu}-H_{\alpha\beta\mu}P_{n\ i\gamma}^{\ \mu}$.

令 Z 是由 $Z_{\alpha\beta\gamma i}$ 定义的张量, 那么 $Z=0$ 当且仅当 $P=0$.

证明 因为 $\Omega_n^\alpha=d\omega_n^\alpha-\omega_n^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha=-d\omega^{n+\alpha}+\omega^{n+\beta}\wedge\omega_\beta^\alpha$, 所以

$$d\omega^{n+\alpha}=-\Omega_n^\alpha+\omega^{n+\beta}\wedge\omega_\beta^\alpha=-\frac{1}{2}R_{n\ jk}^{\ \alpha}\omega^j\wedge\omega^k-P_{n\ j\beta}^{\ \alpha}\omega^j\wedge\omega^{n+\beta}+\omega^{n+\beta}\wedge\omega_\beta^\alpha.$$

根据 Cartan 同伦公式, 可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\alpha}&=(i_{\mathbf{e}_i}d+di_{\mathbf{e}_i})\,\omega^{n+\alpha}\\&=i_{\mathbf{e}_i}\left[-\frac{1}{2}R_{n\ jk}^{\ \alpha}\omega^j\wedge\omega^k-P_{n\ j\beta}^{\ \alpha}\omega^j\wedge\omega^{n+\beta}+\omega^{n+\beta}\wedge\omega_\beta^\alpha\right]\\&=-R_{n\ ik}^{\ \alpha}\omega^k-P_{n\ i\beta}^{\ \alpha}\omega^{n+\beta}-\omega_\beta^\alpha(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\beta}.\end{aligned}$$

根据 $\mathbf{e}_i(F)=0$ 以及 $\omega^{2n}=-d\log F$, 可知 $\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{2n}=0$. 所以

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\omega^{n+j}\otimes\omega^{n+j}\right)&=\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{n-1}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left[\left(\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\alpha}\right)\otimes\omega^{n+\alpha}+\omega^{n+\alpha}\otimes\left(\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\alpha}\right)\right]\\&=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\Big[\left(-R_{n\ ik}^{\ \alpha}\omega^k-P_{n\ i\beta}^{\ \alpha}\omega^{n+\beta}-\omega_\beta^\alpha(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\beta}\right)\otimes\omega^{n+\alpha}\\&\quad+\omega^{n+\alpha}\otimes\left(-R_{n\ ik}^{\ \alpha}\omega^k-P_{n\ i\beta}^{\ \alpha}\omega^{n+\beta}-\omega_\beta^\alpha(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\beta}\right)\Big]\\&\equiv-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(P_{n\ i\beta}^{\ \alpha}+\omega_\beta^\alpha(\mathbf{e}_i)\right)\left(\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\alpha}+\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\right)\\&\equiv-2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}P_{n\ i\alpha}^{\ \beta}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n),\end{aligned}$$

其中用到了下面的恒等式

$$P_{n\ i\beta}^{\alpha} = P_{n\ i\alpha}^{\beta} \quad 和 \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\gamma}.$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}(H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma})\\
&\quad= \mathbf{e}_i(H_{\alpha\beta\gamma})\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma} + H_{\alpha\beta\gamma}(\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\alpha})\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad + H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes(\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\beta})\otimes\omega^{n+\gamma} + H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes(\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\omega^{n+\gamma})\\
&\quad\equiv \mathbf{e}_i(H_{\alpha\beta\gamma})\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma} - H_{\alpha\beta\gamma}(P_{n\ i\mu}^{\ \alpha} + \omega_\mu^\alpha(\mathbf{e}_i))\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad - H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes(P_{n\ i\mu}^{\ \beta} + \omega_\mu^\beta(\mathbf{e}_i))\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad - H_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes(P_{n\ i\mu}^{\ \gamma} + \omega_\mu^\gamma(\mathbf{e}_i))\omega^{n+\mu}\\
&\quad\equiv \mathbf{e}_i(H_{\alpha\beta\gamma})\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma} - H_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu^\alpha(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad - H_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu^\beta(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\gamma} - H_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu^\gamma(\mathbf{e}_i)\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\mu}\\
&\qquad - H_{\alpha\beta\gamma}P_{n\ i\mu}^{\ \alpha}\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma} - H_{\alpha\beta\gamma}P_{n\ i\mu}^{\ \beta}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\mu}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad - H_{\alpha\beta\gamma}P_{n\ i\mu}^{\ \gamma}\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\mu}\\
&\quad\equiv (\mathbf{e}_i(H_{\alpha\beta\gamma}) - H_{\mu\beta\gamma}\omega_\alpha^\mu(\mathbf{e}_i) - H_{\alpha\mu\gamma}\omega_\beta^\mu(\mathbf{e}_i) - H_{\alpha\beta\mu}\omega_\gamma^\mu(\mathbf{e}_i))\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\qquad - (H_{\mu\beta\gamma}P_{n\ i\alpha}^{\ \mu} + H_{\alpha\mu\gamma}P_{n\ i\beta}^{\ \mu} + H_{\alpha\beta\mu}P_{n\ i\gamma}^{\ \mu})\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\\
&\quad\equiv (H_{\alpha\beta\gamma\,|\,i} - H_{\mu\beta\gamma}P_{n\ i\alpha}^{\ \mu} - H_{\alpha\mu\gamma}P_{n\ i\beta}^{\ \mu} - H_{\alpha\beta\mu}P_{n\ i\gamma}^{\ \mu})\omega^{n+\alpha}\otimes\omega^{n+\beta}\otimes\omega^{n+\gamma}\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n).
\end{aligned}$$

根据 Z 的定义以及下面的 Bianchi 恒等式 [4, 8, 17]

$$P_{n\ k\gamma}^{\ i} = -H_{ki\gamma|n} \tag{4.10}$$

和

$$P_{j\ k\gamma}^{\ i} = H_{ij\beta}H_{k\beta\gamma|n} + H_{ki\beta}H_{j\beta\gamma|n} - H_{jk\beta}H_{i\beta\gamma|n} - H_{ij\gamma|k} - H_{ki\gamma|j} + H_{jk\gamma|i} \tag{4.11}$$

可知, $Z=0$ 蕴含 $Z_{\alpha\beta\gamma|n} = -P_{n\ \alpha\gamma}^{\beta} = 0$ 以及 $H_{\alpha\beta\gamma|i} = 0$. 再次利用 (4.10) 和 (4.11) 式可知 $Z=0$ 蕴含 $P=0$. $P=0$ 蕴含 $Z=0$ 是直接的. 证毕.

接下来给出 Cartan 型形式的一些性质. 令 $\eta = \mathrm{tr}[H] \in \Omega^1(TM_0)$. 在文 [9] 中, 我们称其为 Cartan 型形式. Cartan 型形式具有下面的局部表达式

$$\eta = \sum_{i=1}^n H_{ii\gamma}\omega^{n+\gamma} =: H_\gamma\omega^{n+\gamma}.$$

η 在 TM_0 的纤维上的限制正是对应的 Minkowski 空间的 Cartan 形式.

注 4.4 在有关文献中, Finsler 流形的 Cartan 形式定义为 $I = H_\gamma\omega^\gamma$. 这是我们称 η 为 Cartan 型形式的原因. 一些简单的计算表明 η 和 I 具有不同的性质. 例如, $dI=0$ 蕴含 M 为 Riemann 流形. 但是, 下面的命题说明存在非 Riemann 度量使得 $d\eta = 0$.

命题 4.5 [27] η 的外微分满足

$$d\eta = -\mathrm{tr}[R^{\mathrm{Ch}}]. \tag{4.12}$$

因此 $d\eta$ 具有局部表达式

$$d\eta = d(H_\gamma\omega^{n+\gamma}) = -\frac{1}{2}R_{i\ kl}^{\ i}\omega^k\wedge\omega^l - P_{i\ k\gamma}^{\ i}\omega^k\wedge\omega^{n+\gamma}.$$

根据命题 4.5, Berwald 流形必然具有闭的 Cartan 型形式.

命题 4.6 η 沿着水平方向的李导数为

$$\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\eta \equiv -i_{\mathbf{e}_i}\mathrm{tr}P \ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n), \quad i=1,\dots,n. \tag{4.13}$$

证明 根据命题 4.5, 可知

$$\mathscr{L}_{\mathbf{e}_i}\eta = (di_{\mathbf{e}_i} + i_{\mathbf{e}_i}d)\eta = i_{\mathbf{e}_i}d\eta \equiv -i_{\mathbf{e}_i}\mathrm{tr}P \ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n).$$

证毕.

在文 [27] 中探讨了 η 与 S 曲率间的联系. 关于 S 曲率的系统研究和更多的性质可见文 [8, 23–26] 及其参考文献. 下面的性质是我们需要的.

命题 4.7 [27] 对于 Finsler 流形 $(M,\mathbf{F})$, 令 τ 为相对于 M 上某个体积元的畸变 (distorsion). 那么 $\eta = d\tau$ 当且仅当 $S=0$ 且 $\mathbf{J}=0$.

5 某些特殊 Finsler 流形的刻画

本节将利用平行移动来刻画一些具有特殊曲率性质的 Finsler 流形. 关于 Finsler 几何中的平行移动的详细讨论, 可以参考 [1, 3, 8] 等文献.

令 $(M,\mathbf{F})$ 为 Finsler 流形. 设 $\sigma:[0,1]\to M$ 是以 $\sigma(0)=p$ 为起点, 以 $\sigma(1)=q$ 为终点的分段光滑曲线, 那么可定义平行移动

$$P_{\sigma,t}: T_pM \to T_{\sigma(t)}M, \quad \forall\, t\in[0,1].$$

进一步, 映射的限制 $P_{\sigma,t}: T_pM\setminus\{0\} \to T_{\sigma(t)}M\setminus\{0\}$ 为保持范数的微分同胚, 并且满足

$$P_{\sigma,t}(\lambda y) = \lambda P_{\sigma,t}(y), \quad \forall\ \lambda>0, \quad \forall\, y\in T_pM\setminus\{0\}. \tag{5.1}$$

设 T 为 TM_0 上的垂直协变张量, 即 $T\equiv 0$ (mod $\omega^{n+1},\dots,\omega^{2n}$). T 称为在沿曲线 σ 的平行移动下保持不变, 如果

$$P^*_{\sigma,t}T_{\sigma(t)} = T_p \quad \forall\, t\in[0,1],$$

其中 $T_x = i_x^*T$ 记 T 在 $T_xM\setminus\{0\}$ 的限制, 而 $i_x: T_xM \hookrightarrow TM$ 为自然嵌入映射, $\forall\, x\in M$.

引理 5.1 令 T 为 TM_0 上的垂直协变张量场. 那么沿着任意的曲线的平行移动都保持 T 不变当且仅当

$$\mathscr{L}_X T \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n)$$

对任意的水平向量场 $X\in\Gamma(H(TM_0))$ 成立.

证明 如果 X 为水平向量场而 T 为垂直张量, 那么 $\mathscr{L}_XT$ 关于 X 为 $C^\infty(TM_0)$ 线性. 所以只需要处理 X 是底流形向量场水平提升的情形.

该问题是局部的, 所以假设 $\sigma:(-2\epsilon,2\epsilon)\to M$ 是过 $\sigma(0)=p\in M$ 的光滑曲线, 其中 $\epsilon>0$. 在 $\pi^{-1}(\sigma):=\bigcup_t T_{\sigma(t)}M$ 上, 令 X 是 σ 的切向量场 $\dot\sigma$ 的水平提升. 而 σ 的水平提升正是 X 的积分曲线. 在局部坐标系下, X 的积分曲线为 $\hat\sigma(t)=(\sigma(t),y(t))=(\sigma^i(t);y^i(t))$ 满足下面的常微分方程组

$$\frac{dy^i}{dt} + \frac{d\sigma^j}{dt}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(\sigma(t),y(t)) = 0, \quad i=1,\dots,n. \tag{5.2}$$

根据 (4.1), (5.2) 式和常微分方程理论, X 定义了局部单参数变换群

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \pi^{-1}(\tilde{\sigma}) \to \pi^{-1}(\sigma),$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 为 σ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上的限制. 令 $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$, 根据平行移动的定义可知

$$\varphi_t(y) = P_{\sigma,t}(y), \quad \forall\, y \in T_pM, \ \ \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

换言之

$$\varphi_t \circ i_p = i_{\sigma(t)} \circ P_{\sigma,t}, \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

因此

$$i_p^* \mathscr{L}_X T = i_p^* \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* T - T}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{\sigma,t}^* i_{\sigma(t)}^* T - T_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{\sigma,t}^* T_{\sigma(t)} - T_p}{t}.$$

由于 $\mathscr{L}_X T \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \ldots, \omega^n)$ 当且仅当 $i_p^* \mathscr{L}_X T = 0$ 对任意 $p \in M$ 成立, 证明结束.

在文 [12] 中, Ichijyō 证明了 Finsler 流形为 Landsberg 流形当且仅当平行移动保持 $\hat{g}$ 不变. 这个结果的证明可见文 [3, 8]. 沿着同样的思路, 根据引理 5.1, 命题 4.3 和 4.6, 可得下面的性质.

命题 5.2 设 $(M, \mathbf{F})$ 为 Finsler 流形. 那么

(i) M 为 Berwald 流形当且仅当平行移动保持 $\hat{A}$ 不变.

(ii) M 满足曲率条件 $\mathrm{tr}P = 0$ 当且仅当平行移动保持 η 不变.

定理 1.2 的证明 设 M 为 Berwald 流形, 引理 5.1, 命题 4.3 和 4.6 说明 $\hat{g}$ 和 η 在平行移动下保持不变. 反过来, 定理 1.1 和 (5.1) 表明平行移动为线性映射. 那么引理 3.6 表明 $\hat{A}$ 在平行移动下保持不变. 因此性质 5.2 中的 (i) 说明 M 为 Berwald 流形.

我们将下面的结论作为上述结果的推论, 尽管证明是间接的.

推论 5.3 [11] 设 $(M, \mathbf{F})$ 为 Finsler 流形. M 为 Berwald 流形当且仅当所有的平行移动为线性映射.

证明 若 M 为 Berwald 流形, 那么 $\hat{g}$ 和 η 在平行移动下保持不变. 根据定理 1.1 和 (5.1), 所有的平行移动均为线性映射. 反过来, 若平行移动均为线性映射, 引理 3.6 表明 $\hat{A}$ 在平行移动下保持不变. 性质 5.2 表明 M 为线性映射. 证毕.

定理 1.3 的证明 (1)⇒(2) 根据命题 4.7, 条件 $L = 0$ 和 $S = 0$ 蕴含 $\eta = d\tau$.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 根据 (4.12), $d\eta = 0$ 蕴含 $\mathrm{tr}P = 0$. $L = 0$ 和 $\mathrm{tr}P = 0$ 蕴含 $\hat{g}$ 和 η 在平行移动下保持不变. 定理 1.2 说明 M 为 Berwald 流形.

(4)⇒(1) 显然.

定理 1.4 的证明 对于 Landsberg 流形, 平均 Berwald 曲率与陈联络的平均 “$h - v$” 曲率 $\mathrm{tr}P$ 一致 (见文 [4, 第 67 页]). 与定理 1.3 的证明中 (3)⇒(4) 的部分类似, 可知该流形为 Berwald 流形. 定理得证.

注 5.4 在 Finsler 几何中, 一些概念是比线性联络更加基本的, 也因此是独立于线性联络的对象. 喷射, 非线性联络, 平行移动以及张量 $\hat{g}$, $\hat{A}$ 和 η 就是这样的对象. Berwald 流形和 Landsberg 流形通常通过线性联络的概念来定义. 但是, Ichijyō 的结果表明这些概念是独立于线性联络的. 很多作者都曾研究 Berwald 流形与 Landsberg 流形间的关系, 如文 [28, 定理 6.3 和 6.12]. 不同的是, 本文的结果不依赖于线性联络.

致谢 感谢冯惠涛教授长期以来的支持和鼓励. 同时也非常感谢王国芳教授的支持和指导, 本文的部分结果是 2014 年作者在德国 Freiburg 大学数学所期间得到.

参 考 文 献

[1] Aikou T., Some remarks on Berwald manifolds and Landsberg manifolds, *Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 2010, **26**: 39–148.

[2] Álvarez Paiva J. C., Some Problems on Finsler Geometry, Handbook of Differential Geometry, Vol. 2, North-Holland, Elsevier, 2006.

[3] Bao D., On two curvature-driven problems in Riemann–Finsler geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics, *Math. Soc. Japan*, 2007, **48**: 19–71.

[4] Bao D., Chern S. S., Shen Z., An Introduction to Riemann–Finsler Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 200, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie, Springer, Berlin, 1923.

[6] Bryant R. L., Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature, *Houston J. Math.*, 2002, **28**: 161–203.

[7] Chern S. S., Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler Spaces, Chern Selected Papers, II, 95–121, 1989.

[8] Chern S. S., Shen Z., Riemann–Finsler Geometry, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 6, World Scientific, Singapore, 2005.

[9] Feng H., Li M., Adiabatic limit and connections in Finsler geometry, *Communications in Analysis and Geometry*, 2013, **21**: 607–624.

[10] Hildebrand R., Centro-affine hypersurface immersions with parallel cubic form, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 2015, **56**: 593–640.

[11] Ichijyō Y., Finsler manifolds modeled on a Minkowski space, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1976, **16**: 639–652.

[12] Ichijyō Y., On special Finsler connections with the vanishing hv-curvature tensor, *Tensor* (*N.S.*), 1978, **32**: 149–155.

[13] Laugwitz D., Differentialgeometrie in Vektorräumen, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1965.

[14] Laugwitz D., Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finsler-Räume, *Math. Z.*, 1957, **67**: 63–74.

[15] Laugwitz D., Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen*, 1957, **5**: 72–76.

[16] Li A., Simon U., Zhao G., Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, W. de Gruyter, Berlin-New York, 1993.

[17] Mo X., An Introduction to Finsler Geometry, Peking University Series in Math., Vol. 1, World Scientific, Singapore, 2006.

[18] Mo X., Huang L., On characterizations of Randers norms in a Minkowski space, *International Journal of Mathematics*, 2010, **21**: 523–535.

[19] Nomizu K., Sasaki T., Affine Differential Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[20] Schneider R., Zur affinen Differentialgeometrie im Großen, I, *Math. Z.*, 1967, **101**: 375–406.

[21] Schneider R., Zur affinen Differentialgeometrie im Großen, II, *Math. Z.*, 1967, **102**: 1–8.

[22] Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H., Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, Science University Tokyo, Tokyo, 1991.

[23] Shen Y., Shen Z., Introduction to Modern Finsler Geometry, World Scientific, Singapore, 2016.

[24] Shen Z., Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[25] Shen Z., Lectures on Finsler Geometry, World Scientific, Singapore, 2001.

[26] Shen Z., Landsberg Curvature, S-curvature and Riemann Curvature, Riemann–Finsler Goemetry, MSRI Publications, 2004, **50**: 303–355.

[27] Song P., Li M., On some properties of the Cartan type one form of a Finsler manifold, *Journal of Southwest University* (*Natural Science Edition*), 2014, **36**(10): 119–123.

[28] Szilasi J., Vincze C., A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 2000, **16**: 33–63.

[29] Zhang W., Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 4, World Scientific, Singapore, 2001.