文章编号: 0583-1431(2019)01-0001-12 **文献标识码: A**

单个生成元 Walsh p- 进制平移不变空间伸缩的交与并

张 岩

北方民族大学数学与信息科学学院 银川 750021
E-mail: yzhangbun@163.com

李云章

北京工业大学应用数理学院 北京 100124
E-mail: yzlee@bjut.edu.cn

摘 要 p- 进制 MRA 与 GMRA 是构造 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中小波框架的重要工具. $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中嵌套子空间序列交集为 $\{0\}$, 并集为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 是其构成 p- 进制 MRA 与 GMRA 的基本要求. 本文研究单个生成元 Walsh p- 进制平移不变子空间伸缩的交与并, 证明了: 对任意单个生成元 Walsh p- 进制平移不变子空间, 其 p- 进制伸缩的交是 $\{0\}$; 若生成元 ϕ 为 Walsh p- 细分函数, 则其 p- 进制伸缩的并是 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中一个 Walsh p- 进制约化子空间. 特别地, 其伸缩构成 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 p- 进制 GMRA 当且仅当 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} p^j \operatorname{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)=\mathbb{R}_+$, 其中 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 为定义在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上的 Walsh p- 进制傅里叶变换. 值得注意的是: 形式上, 我们的结果类似于通常 $L^2(\mathbb{R})$ 的情形, 然而其证明不是平凡的. 这是因为定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的 p- 进制加法 "$\oplus$" 不同于定义在 $\mathbb{R}$ 上的通常加法 "$+$".

关键词 框架; p- 进制小波框架; Walsh p- 进制细分函数
MR(2010) 主题分类 42C15, 42C40
中图分类 O174.2

The Intersection and Union of Dilates of Singly Generated Walsh p-adic Shift-invariant Spaces

Yan ZHANG

School of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan 750021, *P. R. China*
E-mail: yzhangbun@163.com

Yun Zhang LI

College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, *P. R. China*
E-mail : yzlee@bjut.edu.cn

收稿日期: 2018-05-14; 接受日期: 2018-08-15
基金项目: 国家自然科学基金资助课题 (11501010, 11271037); 宁夏高等学校科学研究项目 (NGY2018-163)
通讯作者: 李云章

Abstract p-adic MRA and GMRA are important tools for constructing wavelet frames in $L^2(\mathbb{R}_+)$. That a nested subspace sequence in $L^2(\mathbb{R}_+)$ has trivial intersection and $L^2(\mathbb{R}_+)$ union is a fundamental requirement for it to form a p-adic MRA and GMRA. This paper addresses the intersection and union of p-adic dilates of a singly generated p-adic shift-invariant subspace. We prove that, for a singly generated p-adic shift-invariant subspace, the intersection of its p-adic dilates is $\{0\}$, and the union of its p-adic dilates is a Walsh p-adic reducing subspace of $L^2(\mathbb{R}_+)$ if the generator ϕ is Walsh p-adic refinable in addition. In particular, the dilates form a p-adic GMRA for $L^2(\mathbb{R}_+)$ if and only if $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} p^j \mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi) = \mathbb{R}_+$, where $\widetilde{\mathscr{F}}$ is the Walsh p-adic Fourier transform on $L^2(\mathbb{R}_+)$. It is worth noticing that our results are similar to the case of usual $L^2(\mathbb{R})$, while their proofs are nontrivial. It is because the p-adic addition $\oplus$ on $\mathbb{R}_+$ is different from the usual addition $+$ on $\mathbb{R}$.

Keywords frame; p-adic wavelet frame; Walsh p-adic refinable function
MR(2010) Subject Classification 42C15, 42C40
Chinese Library Classification O174.2

1 引言

过去三十余年来, $L^2(\mathbb{R})$- 小波框架被广泛研究, 并应用于信号处理与数值应用等诸多领域. 1989 年, Mallat 在文 [31] 中引入了多分辨分析 (MRA) 的概念, 其提供了一种构造 $L^2(\mathbb{R})$- 小波的一般方法. 自此以后, 许多变形 (即所谓的扩充准则) 在不同的空间背景下被研究, 如 $L^2(\mathbb{R}^d)$, Sobolev 空间以及约化子空间, 详见文 [2, 5–8, 10, 12, 13, 21, 29, 30, 33–36, 41, 43, 44].

值得注意的是: Lang 在文 [26–28], Farkov 与 Protassov 在文 [16, 17] 提出了 Cantor 二进制群上 MRA 理论, 他们称之为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的小波理论, 其中 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. 在实际应用中, 时间变量不能取负值, $L^2(\mathbb{R}_+)$ 能够模拟因果信号空间. 显然, 给定 $a > 0$, $\psi = 0$ 是方程

$$\psi(x - na) = 0, \quad \text{对任意 } x \in (-\infty, 0) \text{ 及 } n \in \mathbb{Z}$$

在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的唯一解. 这表明 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 既不容许非平凡的通常小波系也不容许 Gabor 系. 另一方面, $L^2(\mathbb{R}_+)$ 可视为 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间, 即由支撑在 $\mathbb{R}_+$ 上的 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数全体构成的空间. 基于此, 一些学者研究了 $L^2(\mathbb{R}_+)$- “小波” 框架. 这种框架不具备完全的仿射结构, 它包含边界及内部框架, 且边界框架涉及非齐次细分方程. 详见文 [9, 11, 22, 23, 42] 及其参考文献. 注意到 $\mathbb{R}$ 按通常加法作成群而 $\mathbb{R}_+$ 不能, 但是 $\mathbb{R}_+$ 关于 p- 进制运算 “$\oplus$” 作成群, 这里 p 为大于 1 的整数. 近些年, $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中联系 “$\oplus$” 的小波框架引起了不少学者的关注, 详见文 [16, 19] 及其参考文献.

我们回顾有关 “$\oplus$” 的一些基础知识以便后文使用. 设 p 为大于 1 的整数. 分别以 $\mathbb{Z}_+$ 及 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集及正整数集; 以 $\mathbb{N}_p$ 表示集合 $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. 定义 $\mathbb{N}_p$ 上的加法 $\oplus$ 和减法 $\ominus$ 为: 对 $x, y \in \mathbb{N}_p$, 有

$$x \oplus y = (x + y)(\mathrm{mod}\ p) = \begin{cases} x + y, & x + y < p; \\ x + y - p, & x + y > p, \end{cases}$$

及

$$x \ominus y = (x - y)(\mathrm{mod}\ p) = \begin{cases} x - y, & x > y; \\ x - y + p, & x < y. \end{cases}$$

给定 $x\in\mathbb{R}_+$, 以 $[x]$ 表示其整数部分, 以 $\{x\}$ 表示其分数部分, 则 x 有唯一表示

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}x_{-j}p^{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty}x_jp^{-j}=[x]+\{x\}, \tag{1.1}$$

其中对 $j\in\mathbb{Z}$, $x_j,x_{-j}\in\mathbb{N}_p$, 且当 x 为有理数时, 序列 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ 只有有限项非零. 对 $y,\omega\in\mathbb{R}_+$, 类似定义 y_j, y_{-j} 和 ω_j, ω_{-j}. 应用上述 $\mathbb{N}_p$ 中的运算, 分别定义 $\mathbb{R}_+$ 上的加法 $\oplus$ 和减法 $\ominus$ 为: 对 x, $y\in\mathbb{R}_+$, 有

$$x\oplus y=\sum_{j=1}^{\infty}(x_j\oplus y_j)\,p^{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty}(x_{-j}\oplus y_{-j})\,p^{-j},$$

及

$$x\ominus y=\sum_{j=1}^{\infty}(x_j\ominus y_j)\,p^{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty}(x_{-j}\ominus y_{-j})\,p^{-j}.$$

容易验证 $\mathbb{R}_+$ 依据此加法作成群, 且对 $k_0\in\mathbb{Z}_+$, 有 $k_0\oplus\mathbb{Z}_+=k_0\ominus\mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}_+$. 记 $\ominus x=0\ominus x$. 给定 $x,\omega\in\mathbb{R}_+$, 记

$$\chi(x,\omega)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}\sum_{j=1}^{\infty}(x_j\omega_{-j}+x_{-j}\omega_j)}, \tag{1.2}$$

则 $\{\chi(k,\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $L^2[0,1]$ 的一个标准正交基. 对 $f\in L^1(\mathbb{R}_+)$, 定义其 Walsh p- 进制傅里叶变换为: 在 $\mathbb{R}_+$ 上有

$$\widetilde{\mathscr{F}}f(\cdot)=\int_{\mathbb{R}_+}f(x)\overline{\chi(x,\cdot)}dx, \tag{1.3}$$

且对 $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$, 其 Walsh p- 进制傅里叶变换定义为

$$\widetilde{\mathscr{F}}f(\cdot)=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\overline{\chi(x,\cdot)}dx,$$

此极限为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 范数意义下的极限. 类似于通常的傅里叶变换, Walsh p- 进制傅里叶变换为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上的酉算子, 且对 $f\in L^1(\mathbb{R}_+)$, 由 $\widetilde{\mathscr{F}}f=0$ 可得 $f=0$. 有关 Walsh p- 进制傅里叶变换及 Walsh p- 进制级数的研究, 详见文 [20, 38]. 给定 $\mathbb{R}_+$ 的可测子集 Ω, 记

$$\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega)=\{f\in L^2(\mathbb{R}_+):\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}f)\subset\Omega\}, \tag{1.4}$$

其中对定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的可测函数 f, $\mathrm{supp}(f)=\{x\in\mathbb{R}_+:f(x)\neq0\}$, 它在相差一个零测集的意义下是唯一确定的.

应用运算 $\ominus$, 我们定义 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的仿射系. 分别定义伸缩算子 D 及平移算子 T_x, $x\in\mathbb{R}_+$ 为: 对 $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$Df(\cdot)=p^{\frac12}f(p\cdot),\quad T_xf(\cdot)=f(\cdot\ominus x),$$

且对 $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, 记 $f_{j,k}=D^jT_kf$. 对 $x\in\mathbb{R}_+$, $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$, 容易验证 $\widetilde{\mathscr{F}}T_xf(\cdot)=\overline{\chi(x,\cdot)}\widetilde{\mathscr{F}}f(\cdot)$. 对 $\psi\in L^2(\mathbb{R}_+)$, 定义其生成的仿射系为

$$X(\psi)=\{\psi_{j,k}:j\in\mathbb{Z},\,k\in\mathbb{Z}_+\}.$$

若 $X(\psi)$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的标准正交基 (框架), 则称其为 Walsh p- 进制小波基 (小波框架). 设 X 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的一个闭子空间, 若对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 有 $T_kX=X$, 则称 X 为 Walsh p- 进制平移不变子空间; 若 $DX=X$ 且对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 有 $T_kX=X$, 则称其为 Walsh p- 进制约化子空间.

$\mathbb{R}_+$ 上的 p- 进制小波理论在应用中较为重要. Kozyrev 发现了 $L^2(\mathbb{Q}_p)$ 中紧支 p- 进制小波基, 它是某 p- 进制拟微分算子的特征函数, 见文 [24, 25]. 此性质可用于求解 p- 进制拟微分方程. Khrennikov, Shelkovich 在文 [23] 中给出一种方法, 通过它可明确找到一大类演化线性拟微分方程的解. Benedetto 和 Benedetto 在文 [3, 4] 中讨论了是否有可能构造其它 p- 进制小波. 有关 p- 进制小波框架的研究, 详见文 [1, 14–19, 32, 39, 40] 及其参考文献. 为构造 p- 进制小波及小波框架, Lang 在文 [26–28] 及 Farkov, Protassov 在文 [17] 中将一些 MRA 理论发展至 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中, 其中 Farkov 视其为 $\mathbb{R}_+$ 上二进制加法小波理论. Lang 在文 [26, 27] 中于 Cantor 二进制群上引入了 MRA 的概念, 并构造了紧支正交小波, 且在此背景下, 将此类小波的构造简化为构造某类 Walsh 级数; 同时, 对这种 p- 进制小波提出了 Mallat 树结构算法. Farkov 在文 [19] 中导出了 Walsh p- 细分函数生成 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中正交 p-MRA 的充分必要条件; 提出了构造正交 p- 进制小波的方法. Shah 在文 [39, 40] 中研究了 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的小波包. Farkov, Maksimov 及 Stroganov 在文 [18] 中描述了一种算法, 它可用于计算 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中与 Walsh 函数相关的双正交紧支二进制小波. Meenakshi, Manchanda 及 Siddiq 在文 [32] 中研究 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中联系非一致多分辨分析的小波. Albeverio, Evdokimov 及 Skopina 在文 [1] 中基于 $L^2(\mathbb{Q}_p)$ 的背景下引入了 p-GMRA 的概念, 得到了细分函数生成 p-GMRAs 的一些充分条件; 提出了一种构造小波函数集的方法, 并证明了任一小波函数集可生成 $L^2(\mathbb{Q}_p)$ 中的 p- 进制小波框架. 所有这些工作表明: p-MRA 在 Walsh p- 进制小波及小波框架理论中有重要作用.

定义 1.1 设 m 为定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的可测函数, 且关于加法 $\oplus$ 为 $\mathbb{Z}_+$- 周期的, 即对 $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$m(\cdot \oplus k) = m(\cdot)$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立, 则称 m 为 Walsh p- 进制周期函数.

定义 1.2 设 ϕ 为定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的可测函数, 且存在 Walsh p- 进制周期函数 m_ϕ, 使得

$$\widetilde{\mathscr{F}}\phi(p\cdot) = m_\phi(\cdot)\widetilde{\mathscr{F}}\phi(\cdot)$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e 成立, 则称 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数.

定义 1.3 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的一个闭子空间序列, 且满足:

(i) 对 $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$;

(ii) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中稠密;

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(iv) $f(\cdot) \in V_j$ 当且仅当对 $j \in \mathbb{Z}$, 有 $f(p\cdot) \in V_{j+1}$;

(v) 存在 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 使得 $\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的一个标准正交基,

则称 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的 p- 进制多分辨分析 (p- 进制 MRA).

这里, 我们称 ϕ 为 p- 进制 MRA 尺度函数. 此定义由 Farkov 在文 [16] 中给出. 类似于文 [1, 定义 1], 我们引入更一般的 MRA. 为区别于定义 1.3, 我们称其为 p- 进制 GMRA.

定义 1.4 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的闭子空间序列, 且满足定义 1.3 中的(i)–(iv)及

(v′) 存在 $\phi \in V_0$, 使得

$$V_0 = \overline{\mathrm{span}\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}} \tag{1.5}$$

成立, 则称 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为广义 p- 进制多分辨分析 (p- 进制 GMRA).

注意到, 定义 1.4 不同于文 [1, 定义 1]. 那里平移指标集 I_p 不是 $\mathbb{Q}_p$ 的子群. 在定义 1.3 中, 平移指标集 $\mathbb{Z}_+$ 依据加法 "$\oplus$" 作成一个子群. 类似于 $L^2(\mathbb{R})$ 中通常 MRA 的性质, 由定义 1.4 可知: 对 $j \in \mathbb{Z}$, 有

$$V_j = \overline{\operatorname{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}}, \tag{1.6}$$

且 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数, 即对某 Walsh p- 进制周期函数 m_ϕ, 有

$$\widetilde{\mathscr{F}}\phi(p\cdot) = m_\phi(\cdot)\widetilde{\mathscr{F}}\phi(\cdot) \tag{1.7}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 反之, 对 Walsh p- 进制细分函数 ϕ, 若定义 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 如 (1.6), 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足定义 1.3, 1.4 中的 (i), (iv) 及 (v$'$). 因而, 若其再满足定义 1.3 中 (ii) 与 (iii), 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个 p- 进制 GMRA; 若其再满足定义 1.3 中 (ii), (iii) 及 (v), 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个 p- 进制 MRA. 因此, 刻画满足 (ii) 及 (iii) 的 Walsh p- 进制细分函数对我们构造 p- 进制 MRA 和 p- 进制 GMRA 尤为重要. 我们在本文中研究此问题.

对 $L^2(\mathbb{R})$ 中通常细分函数, 文献中研究了类似问题. 对 $j \in \mathbb{Z}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, 设 $\widetilde{V}_j$ 为

$$\operatorname{span}\{2^{\frac{j}{2}} f(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

的 $L^2(\mathbb{R})$- 闭包, 则由文 [6, 8] 可知 $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{V}_j = \{0\}$, 且若 f 为通常二进制细分函数, 即对 $\mathbb{R}$ 上某可测的 $\mathbb{Z}$- 周期函数 m, 有

$$\hat{f}(2\cdot) = m_f(\cdot)\hat{f}(\cdot),$$

则由这些文献可知:

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{V}_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{当且仅当} \quad \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \operatorname{supp}(\hat{f}) = \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Lian, Li 在文 [30] 及 Zhou, Li 在文 [43] 中证明了: 若 f 为通常二进制细分函数, 则

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{V}_j} = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}(\hat{g}) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \operatorname{supp}(\hat{f}) \right\}.$$

由此可得 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{V}_j}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的约化子空间.

受上述工作启发, 本文考虑形如 (1.5) 的 V_0 的所有 p- 进制伸缩的交集与并集. 我们得到如下定理:

定理 1.5　设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 且定义 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 如 (1.6), 则 $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

定理 1.6　设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 且 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数, 定义 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 如 (1.6), 则 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$ 为 Walsh p- 进制约化子空间, 且

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \widetilde{\mathscr{F}} L^2\bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} p^j \operatorname{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)\bigg).$$

作为定理 1.5 与 1.6 的直接结果, 我们有如下推论, 它刻画了 p- 进制 GMRA:

推论 1.7　设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 且 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数. 定义 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 如 (1.6), 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 p- 进制 GMRA 当且仅当

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} p^j \operatorname{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi) = \mathbb{R}_+.$$

根据推论 1.7 及下文引理 2.3 (ii), 我们有

推论 1.8 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 且 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数. 定义 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 如 (1.6), 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 p- 进制 MRA 当且仅当 $[\widetilde{\mathscr{F}}\phi, \widetilde{\mathscr{F}}\phi] = 1$, 且

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} p^j \mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi) = \mathbb{R}_+.$$

推论 1.7 及 1.8 简化了 p- 进制 GMRA 及 MRA 的定义. 我们希望: 类似于 $L^2(\mathbb{R})$- 小波框架的扩充准则, 由此出发研究 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 p- 进制小波框架不同的扩充准则. 更一般地, 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 Walsh p- 进制约化子空间背景下研究此类问题. 在第 2 节, 我们致力于证明定理 1.5 及 1.6.

2 定理 1.5 和 1.6 的证明

本节证明定理 1.5 及 1.6. 为此先引入联系 $\oplus$ 的括号积, 并建立一些引理. 对 $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 定义括号积为

$$[f, g](\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} f(\cdot \oplus k)\overline{g(\cdot \oplus k)}.$$

简单计算表明: 此定义有意义, 且括号积为 Walsh p- 进制周期函数. 下面两个引理对应于文 [7, 定理 2.9, 2.14]. 那里作者考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 通常单生成元平移不变子空间. 我们证明的想法借鉴于此, 但涉及 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 Walsh p- 进制平移不变子空间, 而非 $L^2(\mathbb{R})$ 通常平移不变子空间.

引理 2.1 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $V_0 = \overline{\mathrm{span}\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}}$, $\mathscr{P}_\phi$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 到 V_0 的正交投影算子, 则对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\mathscr{P}_\phi f = \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\tau_f \widetilde{\mathscr{F}}\phi),$$

其中 τ_f 为 Walsh p- 周期函数, 定义为: 对 $\xi \in [0, 1)$, 有

$$\tau_f(\xi) = \begin{cases} \dfrac{[\widetilde{\mathscr{F}}f, \widetilde{\mathscr{F}}\phi](\xi)}{[\widetilde{\mathscr{F}}\phi, \widetilde{\mathscr{F}}\phi](\xi)}, & \text{若 } \xi \in \Delta_\phi; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\Delta_\phi = \{\xi \in [0, 1) : [\widetilde{\mathscr{F}}\phi, \widetilde{\mathscr{F}}\phi](\xi) \neq 0\}$.

证明 由 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的酉性可知: 对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathscr{F}}^{-1}\tau_f\widetilde{\mathscr{F}}\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\tau_f\widetilde{\mathscr{F}}\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= \int_{[0,1)} |\tau_f(\xi)|^2 [\widetilde{\mathscr{F}}\phi, \widetilde{\mathscr{F}}\phi](\xi) d\xi \\ &\le \int_{[0,1)} [\widetilde{\mathscr{F}}f, \widetilde{\mathscr{F}}f](\xi) d\xi \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

定义算子 $Q : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ 为: 对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$Qf = \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\tau_f \widetilde{\mathscr{F}}\phi),$$

则 Q 为有界线性算子. 因此, 为证明引理只需证明: 对 $f \in V_0$, 有

$$Qf = f, \tag{2.1}$$

且对 $f \perp V_0$, 有

$$Qf = 0. \tag{2.2}$$

经简单计算可得对 $k \in \mathbb{Z}_+$, $\xi \in [0,1)$, 有

$$\tau_{T_k\phi}(\xi) = \begin{cases} \overline{\chi(k,\xi)}, & 若\ \xi \in \Delta_\phi; \\ 0, & 其他. \end{cases} \tag{2.3}$$

因此, 据事实 $\widetilde{\mathscr{F}} T_k \phi(\cdot) = \overline{\chi(k,\cdot)} \widetilde{\mathscr{F}} \phi$ 及 Δ_ϕ 的定义可知:

$$\widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\tau_{T_k\phi} \widetilde{\mathscr{F}} \phi) = \widetilde{\mathscr{F}}^{-1} \widetilde{\mathscr{F}} T_k \phi = T_k \phi.$$

由此表明对 $k \in \mathbb{Z}$, 有 $QT_k\phi = T_k\phi$. 因此, 由 Q 的有界性可得 (2.1).

现证明 (2.2). 对 $f \perp V_0$, 有 $[\widetilde{\mathscr{F}} f, \widetilde{\mathscr{F}} \phi] = 0$. 由此可得 $\tau_f = 0$. 因此, (2.2) 成立. 证毕.

引理 2.2 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $V_0 = \overline{\operatorname{span}\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}}$, 则

$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : \widetilde{\mathscr{F}} f = \tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi$, 其中 τ 为一个 Walsh p- 进制周期可测函数, 且满足 $\tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$.

证明 设 $\mathscr{P}_\phi$ 如引理 2.1 所示, 则 $f \in V_0$ 当且仅当对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有 $f = \mathscr{P}_\phi f$. 它进而等价于对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\widetilde{\mathscr{F}} f = \tau_f \widetilde{\mathscr{F}} \phi \ \ 且\ \widetilde{\mathscr{F}} f \in L^2(\mathbb{R}_+). \tag{2.4}$$

由此可得

$V_0 \subset \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : \widetilde{\mathscr{F}} f = \tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi$, 其中 τ 为一个 Walsh p- 进制周期可测函数, 且满足 $\tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$.

下面假设 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 使得

$$\widetilde{\mathscr{F}} f = \tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi,$$

其中 τ 为一个 Walsh p- 进制周期可测函数, 且满足 $\tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 则有

$$[\widetilde{\mathscr{F}} f, \widetilde{\mathscr{F}} \phi] = \tau [\widetilde{\mathscr{F}} \phi, \widetilde{\mathscr{F}} \phi].$$

由引理 2.1 中 τ_f 定义可知: 在 Δ_ϕ 上, 有 $\tau = \tau_f$. 再由在 $[0,1)\backslash\Delta$ 上, $\tau_f \widetilde{\mathscr{F}} \phi = \tau \widetilde{\mathscr{F}} \phi = 0$ 可得 (2.4). 故 $f \in V_0$. 因而, 反包含关系成立. 证毕.

引理 2.3 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $V_0 = \overline{\operatorname{span}\{T_k\phi :\ k \in \mathbb{Z}_+\}}$, 我们有

(i) 对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f \perp V_0$ 当且仅当 $[\widetilde{\mathscr{F}} f, \widetilde{\mathscr{F}} \phi] = 0$;

(ii) $\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的标准正交基当且仅当 $[\widetilde{\mathscr{F}} \phi, \widetilde{\mathscr{F}} \phi] = 1$.

(iii) $\{T_k\phi : k \in \mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的 Parseval 框架当且仅当 $[\widetilde{\mathscr{F}} \phi, \widetilde{\mathscr{F}} \phi] = \chi_{E_\phi}$, 其中

$$E_\phi = \{\xi \in \mathbb{R}_+ : [\widetilde{\mathscr{F}} \phi, \widetilde{\mathscr{F}} \phi](\xi) \neq 0\}.$$

(iv) 定义 $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 为

$$\widetilde{\mathscr{F}} \psi = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\mathscr{F}} \phi(\cdot)}{\sqrt{[\widetilde{\mathscr{F}} \phi, \widetilde{\mathscr{F}} \phi](\cdot)}}, & 在\ E_\phi\ 上; \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

则 $\{T_k\psi : k \in \mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的 Parseval 框架.

证明 类似 $L^2(\mathbb{R})$ 通常平移框架的情形, 可证明 (i)–(iii). 由 (iii) 及引理 2.2 可得 (iv). 证毕.

下述引理表明: 任一 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 p- 进制平移不变子空间均具有如 (1.4) 之形式, 其证明想法借鉴于文 [37, 定理 9.17], 那里考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 中通常平移不变子空间.

引理 2.4 设 X 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的闭子空间, 则 X 为 Walsh p- 进制平移不变子空间当且仅当对 $\mathbb{R}_+$ 中的可测子集 Ω, 有

$$X=\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega).$$

证明 由于 $\ominus\mathbb{R}_+=\mathbb{R}_+$, 且对 $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$, $x\in\mathbb{R}_+$, 有 $\widetilde{\mathscr{F}}T_{\ominus x}f(\cdot)=\chi(x,\cdot)\widetilde{\mathscr{F}}f$. 由此可知: X 为 Walsh p- 进制平移不变子空间当且仅当对 $x\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\widetilde{\mathscr{F}}(X)\chi(x,\cdot)=\widetilde{\mathscr{F}}(X). \tag{2.5}$$

显然, 任一形如 $X=\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega)$ 的子空间均满足 (2.5). 因此, 为完成证明只需证明: (2.5) 可导出 $X=\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega)$. 下面证明这一点.

假设 (2.5) 成立. 由于 Walsh p- 进制傅里叶变换是酉的, 则 $\widetilde{\mathscr{F}}(X)$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的闭子空间. 设 $\mathscr{P}$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 到 $\widetilde{\mathscr{F}}(X)$ 的正交投影算子, 则对 $x\in\mathbb{R}_+$, $f,g\in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}_+}(f(\xi)-\mathscr{P}f(\xi))\overline{\chi(x,\xi)\mathscr{P}g(\xi)}d\xi=0.$$

注意到 $(f(\cdot)-\mathscr{P}f(\cdot))\overline{\mathscr{P}g(\cdot)}\in L^1(\mathbb{R}_+)$. 由此可得

$$(f(\cdot)-\mathscr{P}f(\cdot))\overline{\mathscr{P}g(\cdot)}=0 \tag{2.6}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立, 等价地,

$$\overline{(f(\cdot)}-\overline{\mathscr{P}f(\cdot)})\mathscr{P}g(\cdot)=0 \tag{2.7}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 由于 f, g 任意, 由 (2.6) 可得

$$(g(\cdot)-\mathscr{P}g(\cdot))\overline{\mathscr{P}f(\cdot)}=0 \tag{2.8}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 再由 (2.7) 可知对 $f,g\in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\overline{f(\cdot)}\mathscr{P}g(\cdot)=g(\cdot)\overline{\mathscr{P}f(\cdot)} \tag{2.9}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 在 (2.9) 中取 $f=g$, 使得 $f(\cdot)\neq 0$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立, 于是

$$\lambda(\cdot)f(\cdot)=\mathscr{P}f(\cdot) \tag{2.10}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立, 其中 $\overline{\lambda(\cdot)}=\frac{\mathscr{P}f(\cdot)}{f(\cdot)}$. 由此可得

$$\lambda(\cdot)f(\cdot)=\mathscr{P}f(\cdot)=\mathscr{P}^2f(\cdot)=\mathscr{P}(\lambda(\cdot)f(\cdot))=(\lambda(\cdot))^2f(\cdot) \tag{2.11}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立, 于是有

$$\lambda(\cdot)=1\text{ 或 }0$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 因而, 存在 $\mathbb{R}_+$ 的可测子集 Ω, 使得 $\lambda(\cdot)=\chi_\Omega(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 因此, 由 (2.10) 可得对 $f\in\widetilde{\mathscr{F}}(X)$, 有

$$f(\cdot)\chi_\Omega(\cdot)=f(\cdot)$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上 a.e. 成立. 由此可得 $X=\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega)$. 证毕.

下面刻画 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中 Walsh p- 进制约化子空间.

引理 2.5 设 X 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的闭子空间, 则 X 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的 Walsh p- 进制约化子空间当且仅当

$$X = \widetilde{\mathscr{F}} L^2(\Omega),$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}_+$ 的可测子集, 且满足 $\Omega = p\Omega$.

证明 注意到对 $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\widetilde{\mathscr{F}} T_k f(\cdot) = \overline{\chi(k,\cdot)} \widetilde{\mathscr{F}} f, \quad \widetilde{\mathscr{F}} D f(\cdot) = D^{-1} \widetilde{\mathscr{F}} f(\cdot).$$

于是充分性成立.

下证必要性. 假设 X 为 Walsh p- 进制约化空间. 注意到对 $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, 我们有 $T_{p^j k} = D^{-j} T_k D_j$. 由此可得对 $(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, $f \in X$ 有 $f(\cdot \ominus p^j k) \in X$. 给定 $y \in \mathbb{R}_+$, $J \in \mathbb{N}$, 取

$$k_J = p^J \bigg(\sum_{j=1}^{\infty} y_{-j} p^{j-1} + \sum_{j=1}^{J} y_j p^{-j} \bigg),$$

则对 $x \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned} |(x \ominus y) - (x \ominus p^{-J} k_J)| &= \bigg| \sum_{j=J+1}^{\infty} (x_j \ominus y_j) p^{-j} - \sum_{j=J+1}^{\infty} x_j p^{-j} \bigg| \\ &\le 2(p-1) \sum_{j=J+1}^{\infty} p^{-j}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

由此可得当 $J \to \infty$ 时, $\{(x \ominus y) - (x \ominus p^{-J} k_J)\}_{J=1}^{\infty}$ 一致地收敛于 0. 于是, 对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 有

$$\|f(\cdot \ominus y) - f(\cdot \ominus p^{-J} k_J)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \to 0 \quad \text{当 } J \to \infty.$$

再由 X 为闭的, 且对 $y \in \mathbb{R}_+$, 有 $f(\cdot \ominus p^{-J} k_J) \in X$, 从而 X 为 Walsh p- 进制平移不变的. 于是由引理 2.4 可知

$$X = \widetilde{\mathscr{F}} L^2(\Omega), \tag{2.13}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}_+$ 的可测子集. 下证 $\Omega = p\Omega$ 以完成证明. 根据 (2.13) 有

$$\begin{aligned} D(X) &= \{Df \in L^2(\mathbb{R}_+) : \mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}} f) \subset \Omega\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : \mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}} D^{-1} f) \subset \Omega\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : \mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}} f) \subset p\Omega\}. \end{aligned}$$

再由

$$D(X) = X = \widetilde{\mathscr{F}} L^2(\Omega)$$

可得 $\Omega = p\Omega$. 证毕.

定理 1.5 证明 根据引理 2.3, 我们可以假定 $\{T_k \phi : k \in \mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的 Parseval 框架. 对 $j \in \mathbb{Z}$, 设 $\mathscr{P}_j$ 为 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 到 V_j 的正交投影算子, 且 $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. 下证 $f = 0$. 对任意 $\epsilon > 0$, 可选取 $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 使得 $\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \epsilon$, 其中 g 满足 $\mathrm{supp}(g) \subset [0, N)$, $N \in \mathbb{N}$. 由此可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= \|\mathscr{P}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \le \|\mathscr{P}_j (f-g)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\mathscr{P}_j g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &\le \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\mathscr{P}_j g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &< \epsilon + \|\mathscr{P}_j g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

因此, 为完成证明只需证明

$$\lim_{j\to-\infty}\|\mathscr{P}_j g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}=0.$$

下证 $\lim_{j\to-\infty}\|\mathscr{P}_j g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}=0$. 由于 $\{T_k\phi : k\in\mathbb{Z}_+\}$ 为 V_0 的 Parseval 框架, 且 D 是酉的. 因而, 对 $j\in\mathbb{Z}$, 有 $\{\phi_{j,k} : j\in\mathbb{Z}_+\}$ 为 V_j 的 Parseval 框架. 由此可得, 对 $j\in\mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{P}_j g\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}&=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}|\langle\mathscr{P}_j g,\phi_{j,k}\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}|\langle g,\phi_{j,k}\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|^2\\&\le\|g\|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\int_{[0,N)}|\phi_{j,k}(x)|^2dx.\end{aligned}\tag{2.15}$$

由于 $\lim_{j\to-\infty}p^jN=0$, 故存在 $j_0\in\mathbb{N}$, 使得对 $j<-j_0$, 有 $p^jN<1$. 对 $k\in\mathbb{Z}_+$ 及这样的 j, 有

$$p^j[0,N)\ominus k=p^j[0,N)+\tilde{k},$$

其中 $\tilde{k}=\ominus k$. 再由 $\ominus\mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}_+$ 可知: 对 $j<-j_0$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{P}_j g\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}&=\|g\|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\int_{p^j[0,N)+k}|\phi(x)|^2dx\\&=\|g\|^2\int_{\mathbb{R}_+}\chi_{U_j}(x)|\phi(x)|^2dx.\end{aligned}$$

又注意到对 a.e. 的 $x\in\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{Z}_+$, 有 $\lim_{j\to-\infty}\chi_{U_j}(x)=0$. 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{j\to-\infty}\|\mathscr{P}_j g\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}=0.$$

证毕.

定理 1.6 证明 由于 ϕ 为 Walsh p- 进制细分函数. 故对 $j\in\mathbb{Z}$, 有 $V_j\subset V_{j+1}$. 由此可得对任意 f, 有 $f\in V_{j_0}$, $j_0\in\mathbb{N}$. 故对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 有 $T_kf\in V_{j_0}$. 由此可知: 对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$T_k\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j\Big)\subset\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j,\quad T_{\ominus k}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j\Big)\subset\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j.$$

因而, 对 $k\in\mathbb{Z}_+$ 有

$$T_k\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j\Big)=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j.$$

另一方面, 由 V_j 的定义可知: $D(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j)=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$. 再由 D 及 T_k, $k\in\mathbb{Z}_+$ 均为酉算子可知 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}$ 为 Walsh p- 进制约化子空间. 于是, 据引理 2.5 可知: 对满足 $p\Omega=\Omega$ 的可测集 $\Omega\subset\mathbb{R}_+$, 有

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega).\tag{2.16}$$

下证 $\Omega=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)$. 由于对 $j\in\mathbb{Z}$, 有

$$D^j\phi\in\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j\quad\text{及}\quad\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}D^j\phi)=\mathrm{supp}(D^{-j}\widetilde{\mathscr{F}}\phi)=p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi).$$

故根据 (2.16) 有

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)\subset\Omega.\tag{2.17}$$

对任意 $f\in\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$, 有 $f\in V_{j_0}$, $j_0\in\mathbb{Z}$. 由此可知

$$\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}f)\subset p^{j_0}\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)\subset\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi).$$

从而对任意 $f\in\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}$, 有

$$\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}f)\subset\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi).$$

因而

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}\subset\widetilde{\mathscr{F}}L^2\bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)\bigg).$$

因而, 据 (2.16) 可得

$$\widetilde{\mathscr{F}}L^2(\Omega)\subset\widetilde{\mathscr{F}}L^2\bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi)\bigg).$$

再联合 (2.17) 可得

$$\Omega=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}p^j\mathrm{supp}(\widetilde{\mathscr{F}}\phi).$$

证毕.

致谢 感谢审稿人的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M., p-adic multiresolution analysis and wavelet frames, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2010, **16**(5): 693–714.

[2] Atreas N., Melas A., Stavropoulos T., Affine dual frames and extension principles, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2014, **36**(1): 51–62.

[3] Benedetto J. J., Benedetto R. L., A wavelet theory for local fields and related groups, *J. Geom. Anal.*, 2004, **14**(3): 423–456.

[4] Benedetto R. L., Examples of wavelets for local fields. In: Wavelets, Frames and Operator Theory. Contemp. Math., vol. 345, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, pp. 27–47.

[5] Benedetto J. J., Li S., The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1998, **5**(4): 389–427.

[6] de Boor C., DeVore R. A., Ron A., On the construction of multivariate (pre)wavelets, *Constr. Approx.*, 1993, **9**(2/3): 123–166.

[7] de Boor C., DeVore R. A., Ron A., Approximation from shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, **341**(2): 787–806.

[8] Bownik M., Rzeszotnik Z., Construction and reconstruction of tight framelets and wavelets via matrix mask functions, *J. Funct. Anal.*, 2009, **256**(4): 1065–1105.

[9] Chen Z. Y., Micchelli C. A., Xu Y. S., A construction of interpolating wavelets on invariant sets, *Math. Comp.*, 1999, **68**(228): 1569–1587.

[10] Christensen O., An Introduction to Frames and Riesz Bases, Springer, Birkhäuser, 2016.

[11] Dahmen W., Han B., Jia R. Q., et al., Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines, *Constr. Approx.*, 2000, **16**(2): 221–259.

[12] Daubechies I., Han B., Ron A., et al., Framelets, MRA-based constructions of wavelet frames, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2003, **14**(1): 1–46.

[13] Ehler M., Han B., Wavelet bi-frames with few generators from multivariate refinable functions, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2008, **25**(3): 407–414.

[14] Evdokimov S., Skopina M., On orthogonal p-adic wavelet bases, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **424**(2): 952–965.

[15] Farkov Yu. A., Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Math.*, 2005, **69**: 193–220; *English transl. Izv. Math.*, 2005, **69**: 623–650.

[16] Farkov Yu. A., Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$, In: Wavelets and Splines, St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2005, pp. 4–26.

[17] Farkov Yu. A., Protasov V. Y., Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line, *English Transl. Sb. Math.*, 2006, **197**(9/10): 1529–1558.

[18] Farkov Yu. A., Maksimov A. Y., Stroganov S. A., On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2011, **9**(3): 485–499.

[19] Farkov Yu. A., On wavelets related to the Walsh series, *J. Approx. Theory*, 2009, **161**(1): 259–279.

[20] Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A., Walsh Series Transforms, Nauka, Moscow, 1987; English transl., Kluwer, Dordrecht, 1991.

[21] Jia H. F., Li Y. Z., Refinable function-based construction of weak (quasi-)affine bi-frames, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, **20**(6): 1145–1170.

[22] Jia R. Q., Jiang Q. T., Shen Z. W., Convergence of cascade algorithms associated with nonhomogeneous refinement equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, **129**(2): 415–427.

[23] Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., An infinite family of p-adic non-Haar wavelet bases and pseudo-differential operators, *p-adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 2009, **1**(3): 204–216.

[24] Kozyrev S. V., Wavelet analysis as a p-adic spectral analysis, *Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, 2002, **66**(2): 149–158.

[25] Kozyrev S. V., p-adic pseudo-differential operators and p-adic wavelets, *Theor. Math. Phys.*, 2004, **138**(3): 1–42.

[26] Lang W. C., Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group, *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, **27**(1): 305–312.

[27] Lang W. C., Wavelet analysis on the Cantor dyadic group, *Houston J. Math.*, 1998, **24**(3): 533–544.

[28] Lang W. C., Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1998, **21**(2): 307–317.

[29] Li Y. Z., Zhou F. Y., GMRA-based construction of framelets in reducing subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2011, **9**(2): 237–268.

[30] Lian Q. F., Li Y. Z., Reducing subspace frame multiresolution analysis and frame wavelets, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2007, **6**(3): 741–756.

[31] Mallat S. G., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, **315**(1): 69–87.

[32] Meenakshi, Manchanda P., Siddiqi A. H., Wavelets associated with nonuniform multiresolution analysis on positive half-line, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2012, **10**(2), 1250018, 27 pp.

[33] Petukhov A. P., Explicit construction of framelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2001, **11**(2): 313–327.

[34] Romero J. R., Alexander S. K., Baid S., et al., The geometry and the analytic properties of isotropic multiresolution analysis, *Adv. Comput. Math.*, 2009, **31**(1–3): 283–328.

[35] Ron A., Shen Z., Affine systems in $L^2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator, *J. Funct. Anal.*, 1997, **148**(2): 408–447.

[36] Ron A., Shen Z., Affine systems in $L^2(\mathbb{R}^d)$ II: Dual systems, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, **3**(5): 617–637.

[37] Rudin W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[38] Schipp, F., Wade W. R., Simon P., Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol/New York, 1990.

[39] Shah F. A., Construction of wavelet packets on p-adic field, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2009, **7**(5): 553–565.

[40] Shah F. A., On some properties of p-wavelet packets via the Walsh-Fourier transform, *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 2012, **3**(2): 185–193.

[41] Stavropoulos T., The Geometry of Extension Principles, *Houston J. Math.*, 2012, **38**(3): 833–853.

[42] Sun Q., Homogeneous and nonhomogeneous refinable distributions in $F^{q,\gamma}$, Wavelet analysis and applications (Guangzhou, 1999), 235-244, AMS/IP Stud. Adv. Math., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[43] Zhou F. Y., Li Y. Z., Multivariate FMRAs and FMRA frame wavelets for reducing subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Kyoto J. Math.*, 2010, **50**(1): 83–99.

[44] Zhou F. Y., Li Y. Z., Generalized multiresolution structures in reducing subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Sci. China Math.*, 2013, **56**(3): 619–638.