第61卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.5
2018年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)05-0835-08 **文献标识码:** A

双扭曲积 Hermitian 流形

何 勇

新疆师范大学数学科学学院 乌鲁木齐 830053
E-mail: heyong@xjnu.edu.cn

张晓玲

新疆大学数学与系统科学学院 乌鲁木齐 830046
E-mail: zhangxiaoling0910@126.com

摘 要 主要研究双扭曲积 Hermitian 流形的各种曲率, 给出了紧致非平凡的双扭曲积 Hermitian 流形具有常全纯截面曲率的充要条件, 得到了一种构造满足第一或第二爱因斯坦条件的 Hermitian 流形的有效方法.

关键词 双扭曲积; 陈 Ricci 数量曲率; 全纯截面曲率; 爱因斯坦条件
MR(2010) 主题分类 53C60, 53C40
中图分类 O174.56

On Doubly Warped Product of Hermitian Manifolds

Yong HE

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University,
Urumqi 830053*, P. R. China*
E-mail: *heyong@xjnu.edu.cn*

Xiao Ling ZHANG

College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University,
Urumqi 830046*, P. R. China*
E-mail: *zhangxiaoling*0910*@*126*.com*

Abstract This paper is concerned with curvatures of doubly warped product (DWP) of Hermitian manifolds. The necessary and sufficient conditions for a compact nontrivial DWP-Hermitian manifold to have constant holomorphic sectional curvature were obtained. This study provides us an effective way to construct new Hermitian manifolds which satisfy the first or the second Einstein condition.

Keywords doubly warped product; Chern Ricci scalar curvature; holomorphic sectional curvature; Einstein condition
MR(2010) Subject Classification 53C60, 53C40
Chinese Library Classification O174.56

收稿日期: 2017-09-20; 接受日期: 2017-12-20
基金项目: 国家自然科学基金 (11761069, 11461064); 新疆师范大学博士科研启动基金 (XJNUBS1626)
通讯作者: 张晓玲

1 引言

扭曲积的概念是曲面旋转概念的推广, 最早是 O'Neill 和 Bishop [7] 在研究具有负曲率的黎曼流形时引入的. 近期研究表明扭曲积在理论物理, 尤其是广义相对论中有广泛的应用 [5, 10].

O'Neill [14] 用黎曼流形 M 和 N 的曲率表示出扭曲积黎曼流形 $M \times_f N$ 的曲率. Dobarro 和 Lami [8] 建立了扭曲积黎曼流形 $M \times_f N$ 的数量曲率与其分量流形 M 和 N 上的数量曲率之间的关系. Bertola 和 Gouthier [6] 分类了具有常截面曲率或者满足爱因斯坦条件的扭曲积黎曼流形.

后来, Asanov [1, 2] 将扭曲积的概念推广到了实 Finsler 流形. Kozma, Peter 和 Varga [12] 研究了实 Finsler 流形的扭曲积. 他们建立了实 Finsler 扭曲积流形 $M \times_f N$ 上的 Cartan 联络与其分量流形 M 和 N 上的 Cartan 联络之间的关系. Baagherzadeh 和 Rezaii [3] 刻画了具有常曲率或常数量曲率的实 Finsler 扭曲积流形.

最近, 何勇和钟春平 [9] 将扭曲积的概念推广到了复 Finsler 流形, 系统地研究了复 Finsler 双扭曲积流形, 用双扭曲积给出了一种构造弱复 Berwald 度量的有效方法.

在 Hermitian 几何中, Hermitian 流形的曲率性质吸引了众多学者的研究 [13]. 本文旨在研究双扭曲积 Hermitian 流形的各种曲率性质, 重点研究具有常全纯截面曲率或满足爱因斯坦条件的双扭曲积 Hermitian 流形.

文章第 2 节简要介绍所需的 Hermitian 几何的基础知识和相关记号. 第 3 节将扭曲积的概念推广到 Hermitian 几何, 并导出双扭曲积 Hermitian 流形上的陈联络. 第 4 节建立了双扭曲积 Hermitian 流形 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 上的曲率 (如陈曲率, 陈 Ricci 曲率和陈 Ricci 数量曲率) 与 (M_1, g) 和 (M_2, h) 上的相应曲率之间的关系. 第 5 节给出了紧致非平凡的双扭曲积 Hermitian 流形具有常全纯截面曲率的充要条件. 第 6 节研究了满足第一或第二爱因斯坦条件的双扭曲积 Hermitian 流形.

2 预备知识

设 (M, J, G) 是 $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ 维 Hermitian 流形, 其中 J 是复结构, G 是 Hermitian 度量. 对任意的 $p \in M$, 复切丛 $T_p^{\mathbb{C}} M = T_p M \otimes C$ 可分解为

$$T_p^{\mathbb{C}} M = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M,$$

其中 $T_p^{1,0} M$ 和 $T_p^{0,1} M$ 是 J 的分别对应于特征值 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 的特征向量.

本文中, 记 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, $\partial_{\bar\alpha} = \frac{\partial}{\partial \bar z^\alpha}$. 设 $z = (z^1, \ldots, z^n)$ 为 M 上的局部全纯坐标, 则向量场 $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ 构成 $T_p^{1,0} M$ 的一个基.

在 Hermitian 全纯向量丛 $(T^{1,0} M, G)$ 上, 陈联络 ∇ 是唯一的既与 Hermitian 度量又与复结构相容的联络. 陈联络的系数 (不可能为零) [11] 为

$$\varGamma^\beta_{\gamma\alpha} = G^{\beta\bar\delta} \partial_\gamma G_{\alpha\bar\delta}, \tag{2.1}$$

及其共轭.

陈曲率张量 K (陈联络 ∇ 的曲率张量) 的系数 [11] 为

$$K^\varepsilon_{\alpha\gamma\bar\delta} = -\partial_{\bar\gamma} \varGamma^\varepsilon_{\gamma\alpha}, \tag{2.2}$$

$$K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} = -G_{\varepsilon\bar\beta} K^\varepsilon_{\alpha\gamma\bar\delta}. \tag{2.3}$$

众所周知, 第一陈 Ricci 曲率 [13]

$$K^{(1)} = -\sqrt{-1}K^{(1)}_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha} \wedge d\overline{z^{\beta}}, \tag{2.4}$$

表示 M 的第一陈类 $c_1(M)$, 其中

$$K^{(1)}_{\alpha\bar{\beta}} = G^{\gamma\bar{\delta}}K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -\frac{\partial^2 \log \det(G_{\gamma\bar{\delta}})}{\partial z^{\alpha}\partial\overline{z^{\beta}}}. \tag{2.5}$$

第二陈 Ricci 曲率 $K^{(2)} = -\sqrt{-1}K^{(2)}_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha} \wedge d\overline{z^{\beta}}$, 其中

$$K^{(2)}_{\alpha\bar{\beta}} = G^{\gamma\bar{\delta}}K_{\gamma\bar{\delta}\alpha\bar{\beta}}. \tag{2.6}$$

陈 Ricci 曲率 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 生成一个数量曲率 S_G:

$$S_G = G^{\alpha\bar{\beta}}K^{(1)}_{\alpha\bar{\beta}} = G^{\alpha\bar{\beta}}K^{(2)}_{\alpha\bar{\beta}} \tag{2.7}$$

被称为陈数量曲率.

定义 2.1 [4] 设 (M, J, G, ∇) 是一个 Hermitian 流形. G 沿着非零向量 $v = (v^i, v^{i'}) \in T^{1,0}_z M$ 的全纯截面曲率定义为

$$K_G(v) = -\frac{1}{G^2(v,\bar{v})}K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}v^{\alpha}\overline{v^{\beta}}v^{\gamma}\overline{v^{\delta}}. \tag{2.8}$$

3 双扭曲积 Hermitian 流形

设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 是两个 Hermitian 流形, 且 $\dim_{\mathbb{C}}M_1 = m$, $\dim_{\mathbb{C}}M_2 = n$, 则 $M = M_1 \times M_2$ 是一个维数为 $\dim_{\mathbb{C}}M = m + n$ 的 Hermitian 流形.

设 $\pi_1 : M \to M_1$ 和 $\pi_2 : M \to M_2$ 表示自然投影, 即对任意的 $z = (z_1, z_2) \in M$, $z_1 = (z^1, \dots, z^m) \in M_1$, $z_2 = (z^{m+1}, \dots, z^{m+n}) \in M_2$, 有 $\pi_1(z) = z_1$ 和 $\pi_2(z) = z_2$ 成立.

设 $d\pi_1 : T^{1,0}(M) \to T^{1,0}M_1$ 和 $d\pi_2 : T^{1,0}(M) \to T^{1,0}M_2$ 分别表示由 π_1 和 π_2 诱导的全纯切映射. 则对任意的 $v = (v_1, v_2) \in T^{1,0}_z(M)$, 其中 $v_1 = (v^1, \dots, v^m) \in T^{1,0}_{z_1}M_1$, $v_2 = (v^{m+1}, \dots, v^{m+n}) \in T^{1,0}_{z_2}M_2$, 有 $d\pi_1(z, v) = (z_1, v_1)$ 和 $d\pi_2(z, v) = (z_2, v_2)$ 成立.

定义 3.1 设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 是两个 Hermitian 流形, $f_1 : M_1 \to (0, +\infty)$ 和 $f_2 : M_2 \to (0, +\infty)$ 是两个光滑函数. 双扭曲积 Hermitian 流形 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 是赋予如下 Hermitian 度量 $G : M \to \mathbb{R}^+$ 的乘积流形 $M = M_1 \times M_2$:

$$G(z, v) = (f_2 \circ \pi_2)^2(z)g(\pi_1(z), d\pi_1(v)) + (f_1 \circ \pi_1)^2(z)h(\pi_2(z), d\pi_2(v)), \tag{3.1}$$

其中 $z = (z_1, z_2) \in M$ 和 $v = (v_1, v_2) \in T^{1,0}_z M$. 称 G 为度量 g 和 h 的双扭曲积度量, 称 f_1 和 f_2 为扭曲函数.

如果 $f_1 \equiv 1$ 与 $f_2 \equiv 1$ 有且仅有一个成立, 则其为单扭曲积 Hermitian 流形. 如果 $f_1 \equiv 1$ 且 $f_2 \equiv 1$, 则其为乘积 Hermitian 流形. 如果 f_1 和 f_2 都不恒等于常数, 则称之为非平凡的双扭曲积 Hermitian 流形.

本文中, 小写希腊字母指标 α, β, γ 变化范围为 1 到 $m + n$; 小写拉丁字母指标 i, j, k, s, t 变化范围为 1 到 m; 带撇号的小写拉丁字母指标 i', j', k' 变化范围为 $m + 1$ 到 $m + n$. 与 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 有关的几何量, 分别在其正上方加指标 1 和 2 以示区别, 如 $\overset{1}{\varGamma}{}^{i}_{jk}$ 和 $\overset{2}{\varGamma}{}^{i'}_{j'k'}$.

记

$$g_{i\bar{j}}=\frac{\partial^2 g}{\partial v^i\partial\overline{v^j}},\quad h_{i'\bar{j}'}=\frac{\partial^2 h}{\partial v^{i'}\partial\overline{v^{j'}}},\tag{3.2}$$

则 G 的基本张量矩阵为

$$(G_{\alpha\bar{\beta}})=\left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha\partial\overline{v^\beta}}\right)=\begin{pmatrix} f_2^2 g_{i\bar{j}} & 0\\ 0 & f_1^2 h_{i'\bar{j}'}\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

其逆矩阵 $(G^{\bar{\beta}\alpha})$ 为

$$(G^{\bar{\beta}\alpha})=\begin{pmatrix} f_2^{-2} g^{\bar{j}i} & 0\\ 0 & f_1^{-2} h^{\bar{j}'i'}\end{pmatrix}.\tag{3.4}$$

引理 3.2 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则 G 的 Hermitian 联络系数如下:

$$\begin{aligned}&\Gamma^i_{jk}=\overset{1}{\Gamma^i_{jk}},\quad \Gamma^i_{j'k}=2f_2^{-1}\frac{\partial f_2}{\partial z^{j'}}\delta^i_k,\quad \Gamma^{i'}_{jk'}=2f_1^{-1}\frac{\partial f_1}{\partial z^j}\delta^{i'}_{k'},\quad \Gamma^{i'}_{j'k'}=\overset{2}{\Gamma^{i'}_{j'k'}},\\ &\Gamma^i_{jk'}=\Gamma^i_{j'k'}=\Gamma^{i'}_{jk}=\Gamma^{i'}_{j'k}=0.\end{aligned}$$

证明 根据 (2.1), (3.3) 和 (3.4), 有

$$\Gamma^i_{jk}=G^{i\bar{s}}G_{k\bar{s};j}+G^{i\bar{s}'}G_{k\bar{s}';j}=f_2^{-2}g^{i\bar{s}}f_2^2 g_{k\bar{s};j}=\overset{1}{\Gamma^i_{jk}}.$$

类似地, 可以得到引理 3.2 中的其它等式. 证毕.

4 双扭曲积 Hermitian 流形的陈 Ricci 数量曲率

本节主要推导双扭曲积 Hermitian 流形的陈曲率、陈 Ricci 曲率和陈 Ricci 数量曲率.

根据 (2.2) 和引理 3.2, 经直接计算可得

引理 4.1 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则

$$\begin{aligned}&K^t_{kj\bar{s}}=\overset{1}{K^t_{kj\bar{s}}},\quad K^t_{kj'\bar{s}'}=-2\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{z^{s'}}}\delta^t_k,\quad K^{t'}_{k'j\bar{s}}=-2\frac{\partial^2\ln f_1}{\partial z^j\partial\overline{z^s}}\delta^{t'}_{k'},\quad K^{t'}_{k'j'\bar{s}'}=f_1^2\ \overset{2}{K^{t'}_{k'j'\bar{s}'}},\\ &K^t_{k'j\bar{s}}=K^t_{kj'\bar{s}}=K^t_{kj\bar{s}'}=K^t_{k'j'\bar{s}}=K^t_{k'j\bar{s}'}=K^t_{k'j'\bar{s}'}=0,\\ &K^{t'}_{kj\bar{s}}=K^{t'}_{kj'\bar{s}}=K^{t'}_{kj\bar{s}'}=K^{t'}_{k'j'\bar{s}}=K^{t'}_{kj'\bar{s}'}=K^{t'}_{k'j\bar{s}'}=0.\end{aligned}$$

根据 (2.3) 和引理 4.1, 我们有如下引理.

引理 4.2 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则

$$K_{k\bar{i}j\bar{s}}=f_2^2\ \overset{1}{K_{k\bar{i}j\bar{s}}},\quad K_{k\bar{i}j'\bar{s}'}=-2f_2^2\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{z^{s'}}}g_{k\bar{i}},\tag{4.1}$$

$$K_{k'\bar{i}'j'\bar{s}'}=f_1^2\ \overset{2}{K_{k'\bar{i}'j'\bar{s}'}},\quad K_{k'\bar{i}'j\bar{s}}=-2f_1^2\frac{\partial^2\ln f_1}{\partial z^j\partial\overline{z^s}}h_{k'\bar{i}'},\tag{4.2}$$

$$K_{k'\bar{i}j\bar{s}}=K_{k\bar{i}j'\bar{s}}=K_{k\bar{i}j\bar{s}'}=K_{k'\bar{i}j'\bar{s}}=K_{k'\bar{i}j\bar{s}'}=K_{k'\bar{i}j'\bar{s}'}=0,\tag{4.3}$$

$$K_{k\bar{i}'j\bar{s}}=K_{k\bar{i}'j'\bar{s}}=R_{k\bar{i}'j\bar{s}'}=K_{k\bar{i}'j'\bar{s}'}=K_{k'\bar{i}'j'\bar{s}}=K_{k'\bar{i}'j\bar{s}'}=0.\tag{4.4}$$

复拉普拉斯

$$L=-G^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\overline{z^\beta}}\tag{4.5}$$

是一个具有光滑系数的二阶椭圆偏微分算子.

下文中, 用

$$\overset{1}{L}= g^{\bar{s}j}\frac{\partial^2}{\partial z^j\partial\overline{z^s}} \quad 和 \quad \overset{2}{L}= h^{\bar{s}'j'}\frac{\partial^2}{\partial z^{j'}\partial\overline{z^{s'}}}$$

分别表示 M_1 和 M_2 上的复拉普拉斯算子.

引理 4.3 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, $K^{(1)}_{\alpha\bar\beta}$ 和 $K^{(2)}_{\alpha\bar\beta}$ 分别表示第一陈 Ricci 曲率和第二陈 Ricci 曲率的系数, 则有

$$K^{(1)}_{k\bar i}=f_2^{-2}\overset{1}{K}{}^{(1)}_{k\bar i}-2f_1^{-2}f_2^2g_{k\bar i}\overset{2}{L}(\ln f_2), \quad K^{(1)}_{k'\bar i}=0, \tag{4.6}$$

$$K^{(1)}_{k'\bar i'}=f_1^{-2}\overset{2}{K}{}^{(1)}_{k'\bar i'}-2f_1^2f_2^{-2}h_{k'\bar i'}\overset{1}{L}(\ln f_1), \quad K^{(1)}_{k\bar i'}=0 \tag{4.7}$$

和

$$K^{(2)}_{k\bar i}=f_2^{-2}\overset{1}{K}{}^{(1)}_{k\bar i}-2f_1^{-2}f_2^2g_{k\bar i}\frac{\partial^2\ln f_1}{\partial z^k\partial\overline{z^i}}, \quad K^{(2)}_{k'\bar i}=0, \tag{4.8}$$

$$K^{(2)}_{k'\bar i'}=f_1^{-2}\overset{2}{K}{}^{(2)}_{k'\bar i'}-2f_1^2f_2^{-2}h_{k'\bar i'}\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{k'}\partial\overline{z^{i'}}}, \quad K^{(2)}_{k\bar i'}=0. \tag{4.9}$$

证明 由 (2.5) 和 (3.4), 有

$$K^{(1)}_{k\bar i}=G^{\gamma\bar\delta}K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}=G^{j\bar s}K_{k\bar ij\bar s}+G^{j'\bar s'}K_{k\bar ij'\bar s'}. \tag{4.10}$$

根据 (3.4) 和 (4.1), 可得

$$G^{j\bar s}K_{k\bar ij\bar s}=f_2^{-2}K_{k\bar ij\bar s}=f_2^{-2}\overset{1}{K}{}^{(1)}_{k\bar i}, \tag{4.11}$$

$$G^{j'\bar s'}K_{k\bar ij'\bar s'}=f_1^{-2}h^{j'\bar s'}\cdot 2f_2^2\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{z^{s'}}}g_{k\bar i}=-2f_1^{-2}f_2^2g_{k\bar i}\overset{2}{L}(\ln f_2). \tag{4.12}$$

将 (4.11) 和 (4.12) 代入 (4.10), 可得 (4.6) 中的第一个等式. 类似地, 可得引理 4.3 中的其它等式. 证毕.

定理 4.4 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则 G 沿非零向量

$$v=(v^i,v^{i'})\in T^{1,0}_zM$$

的陈数量曲率为

$$S_G(v)=S_g(v_1)+S_h(v_2)-2f_2^{-2}\overset{1}{L}(\ln f_1)-2f_1^{-2}\overset{2}{L}(\ln f_2), \tag{4.13}$$

其中 $S_g(v_1)$ 和 $S_h(v_2)$ 分别是 g 和 h 的陈数量曲率.

证明 根据 (2.7) 和 (3.4), G 的陈数量曲率为

$$S_G=G^{\alpha\bar\beta}K^{(1)}_{\alpha\bar\beta}=G^{k\bar i}K^{(1)}_{k\bar i}+G^{k'\bar i'}K^{(1)}_{k'\bar i'}. \tag{4.14}$$

应用 (3.4) 和 (4.6), 有

$$G^{k\bar i}K^{(1)}_{k\bar i}=S_g(v_1)-2f_1^{-2}\overset{2}{L}(\ln f_2). \tag{4.15}$$

类似地, 由 (3.4) 和 (4.7), 有

$$G^{k'\bar i'}K^{(1)}_{k'\bar i'}=S_h(v_2)-2f_2^{-2}\overset{1}{L}(\ln f_1). \tag{4.16}$$

将 (4.15) 和 (4.16) 代入 (4.14), 可得 (4.13). 证毕.

5 具有常全纯截面曲率的双扭曲积 Hermitian 流形

本节将推导双扭曲积 Hermitian 流形的全纯截面曲率, 并得到其为常数的充要条件.

定理 5.1 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则 G 沿着非零向量 $v=(v^i,v^{i'})\in T_z^{1,0}M$ 的全纯截面曲率为

$$K_G(v)=\frac{1}{G^2(v,\bar v)}\left(f_2^2g^2K_g(v_1)-2f_1^2h\frac{\partial^2\ln f_1}{\partial z^j\overline{z^s}}v^j\overline{v^s}-2f_2^2g\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\overline{z^{s'}}}v^{j'}\overline{v^{s'}}+f_1^2h^2K_h(v_2)\right).\tag{5.1}$$

证明 根据 (2.8), (4.3) 和 (4.4), G 关于 Chern–Finsler 联络的全纯截面曲率为

$$K_G(v)=-\frac{1}{G^2(v,\bar v)}\times\left(K_{k\bar i j\bar s}v^k\overline{v^i}v^j\overline{v^s}+K_{k\bar i j'\bar s'}v^k\overline{v^i}v^{j'}\overline{v^{s'}}+K_{k'\bar i' j\bar s}v^{k'}\overline{v^{i'}}v^j\overline{v^s}+K_{k'\bar i' j'\bar s'}v^{k'}\overline{v^{i'}}v^{j'}\overline{v^{s'}}\right).\tag{5.2}$$

由 (4.1) 可得

$$K_{k\bar i j\bar s}v^k\overline{v^i}v^j\overline{v^s}=f_2^2\overset{1}{K}_{k\bar i j\bar s}v^k\overline{v^i}v^j\overline{v^s}=-f_2^2g^2K_g(v_1).\tag{5.3}$$

因 $g_{k\bar i}v^k\overline{v^i}=g$, 有

$$K_{k\bar i j'\bar s'}v^k\overline{v^i}v^{j'}\overline{v^{s'}}=2f_2^2\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{s'}}g_{k\bar i}v^k\overline{v^i}v^{j'}\overline{v^{s'}}=2f_2^2g\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{s'}}v^{j'}\overline{v^{s'}}.\tag{5.4}$$

类似地, 由 (4.2) 可得

$$K_{k'\bar i' j\bar s}v^{k'}\overline{v^{i'}}v^j\overline{v^s}=f_2^2g\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\overline{z^{s'}}}v^{j'}\overline{v^{s'}},\tag{5.5}$$

$$K_{k'\bar i' j'\bar s'}v^{k'}\overline{v^{i'}}v^{j'}\overline{v^{s'}}=-f_1^2h^2K_h(v_2).\tag{5.6}$$

将 (5.3)–(5.6) 代入 (5.2), 证得 (5.1). 证毕.

定理 5.2[4] 设 M 是具有度量 G 的紧致 Hermitian 流形, 则 M 具有常全纯截面曲率 κ 的充要条件是在 M 的每一点处都有下式成立:

$$\Theta_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}=-\frac{1}{2}\kappa\left(G_{\alpha\bar\beta}G_{\gamma\bar\delta}+G_{\alpha\bar\delta}G_{\gamma\bar\beta}\right),\tag{5.7}$$

其中

$$\Theta_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}=\frac{1}{4}\left(K_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}+K_{\gamma\bar\delta\alpha\bar\beta}+K_{\alpha\bar\delta\gamma\bar\beta}+K_{\gamma\bar\beta\alpha\bar\delta}\right).\tag{5.8}$$

根据 (5.8) 和引理 4.2, 经过直接计算可得下面的引理.

引理 5.3 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个双扭曲积 Hermitian 流形, 则

$$\Theta_{k\bar i j\bar s}=f_2^2\overset{1}{\Theta}_{k\bar i j\bar s},\quad \Theta_{k'\bar i' j'\bar s'}=f_1^2\overset{2}{\Theta}_{k'\bar i' j'\bar s'},\tag{5.9}$$

$$\Theta_{k'\bar i' j\bar s}=\Theta_{k'\bar s j\bar i'}=\Theta_{k\bar i' j'\bar s}=\Theta_{j\bar s k'\bar i'}=-\frac{1}{2}\left(f_1^2\frac{\partial^2\ln f_1}{\partial z^j\partial\overline{z^s}}h_{k'\bar i'}-f_2^2\frac{\partial^2\ln f_2}{\partial z^{j'}\partial\overline{z^{s'}}}g_{k\bar i}\right),\tag{5.10}$$

$$\Theta_{k'\bar i j\bar s}=\Theta_{k\bar i j'\bar s}=\Theta_{k\bar i j\bar s'}=\Theta_{k'\bar i j'\bar s}=\Theta_{k'\bar i j'\bar s'}=0,\tag{5.11}$$

$$\Theta_{k\bar i' j\bar s}=\Theta_{k\bar i' j\bar s'}=\Theta_{k\bar i' j'\bar s'}=\Theta_{k'\bar i' j'\bar s}=\Theta_{k'\bar i' j\bar s'}=0.\tag{5.12}$$

定理 5.4 设 $({}_{f_2}M_1\times_{f_1}M_2,G)$ 是一个紧致非平凡的双扭曲积 Hermitian 流形, 则 G 具有常全纯截面曲率 κ 的充要条件是 $\kappa\equiv 0$, 且以下方程成立

$$\begin{cases}\overset{1}{\Theta}_{k\bar i j\bar s}=\overset{2}{\Theta}_{k'\bar i' j'\bar s'}=0,\\ f_1^2\overset{1}{L}(\ln f_1)+f_2^2\overset{2}{L}(\ln f_2)=0.\end{cases}\tag{5.13}$$

证明 根据定理 5.2, $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 具有常全纯截面曲率的充要条件是

$$\begin{cases} \Theta_{k\bar{i}j\bar{s}} = -\kappa(G_{k\bar{i}}G_{j\bar{s}} + G_{k\bar{s}}G_{j\bar{i}}), \\ \Theta_{k'\bar{i}'j'\bar{s}'} = -\kappa(G_{k'\bar{i}'}G_{j'\bar{s}'} + G_{k'\bar{s}'}G_{j'\bar{i}'}), \\ -\dfrac{1}{2}\left(f_1^2\dfrac{\partial^2 \ln f_1}{\partial z^j \partial \overline{z^s}} h_{k'\bar{i}'} - f_2^2 \dfrac{\partial^2 \ln f_2}{\partial z^{k'}\partial \overline{z^{i'}}} g_{j\bar{s}}\right) = -\kappa(G_{k'\bar{i}'}G_{j\bar{s}} + G_{k'\bar{s}}G_{j\bar{i}'}), \end{cases} \tag{5.14}$$

其等价于以下方程

$$\begin{cases} \overset{1}{\Theta}_{k\bar{i}j\bar{s}} = -\kappa f_2^2(g_{k\bar{i}}g_{j\bar{s}} + g_{k\bar{s}}g_{j\bar{i}}), \\ \overset{2}{\Theta}_{k'\bar{i}'j'\bar{s}'} = -\kappa f_1^2(h_{k'\bar{i}'}h_{j'\bar{s}'} + h_{k'\bar{s}'}h_{j'\bar{i}'}), \\ f_1^2 \overset{1}{L}(\ln f_1) + f_2^2 \overset{2}{L}(\ln f_2) = 2\kappa f_1^2 f_2^2. \end{cases} \tag{5.15}$$

事实上, 将 (3.3) 和 (5.9) 分别代入 (5.14) 的第一个和第二个等式, 可分别得到 (5.15) 的第一个和第二个等式. 将式 (3.3) 和 (5.10) 代入 (5.14) 的第三个方程, 可得

$$-\frac{1}{2}\left(f_1^2\frac{\partial^2 \ln f_1}{\partial z^j \partial \overline{z^s}} h_{k'\bar{i}'} - f_2^2 \frac{\partial^2 \ln f_2}{\partial z^{k'}\partial \overline{z^{i'}}} g_{j\bar{s}}\right) = -\kappa f_1^2 f_2^2 h_{k'\bar{i}'} g_{j\bar{s}}. \tag{5.16}$$

(5.16) 相继与 $h^{\bar{i}'k'}$ 和 $g^{\bar{s}j}$ 缩并, 并注意到

$$\overset{1}{L} = g^{\bar{s}j}\frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{z^s}} \quad 和 \quad \overset{2}{L} = h^{\bar{i}'k'}\frac{\partial^2}{\partial z^{k'}\partial \overline{z^{i'}}},$$

可得 (5.15) 的第三个方程.

如果 $\kappa = 0$, 且 (5.13) 中的方程成立. 易验证 (5.15) 中的方程成立, 即 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 具有常全纯截面曲率 κ.

下面证明必要性. 假设 $\kappa \neq 0$, 由于 $\overset{1}{\Theta}_{k\bar{i}j\bar{s}}$ 和 $g_{k\bar{i}}g_{j\bar{s}} + g_{k\bar{s}}g_{j\bar{i}}$ 只依赖于 z_1, 故得出 f_2 在 M_2 上恒为常数. 类似地, 由 (5.15) 的第二个方程, 可得 f_1 在 M_1 上恒为常数, 这与 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 是一个非平凡的双扭曲积 Hermitian 流形矛盾. 因此 $\kappa \equiv 0$, 且 (5.15) 可化简为 (5.13). 证毕.

6 爱因斯坦条件

定义 6.1 [4] 设 (M, J, G) 是一个 Hermitian 流形, 如果其第一 (或第二) 陈 Ricci 曲率张量具有分量 $\lambda G(p)$, 其中 λ 是一个实函数, 则称 Hermitian 度量 G 满足第一 (或第二) 爱因斯坦条件.

设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 满足第一 (第二) 爱因斯坦条件, 一个自然的问题是双扭曲积 Hermitian 流形 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 是否也满足第一 (第二) 爱因斯坦条件. 本节将对此问题作出解答.

定理 6.2 如果 $\overset{1}{L}(\ln f_1) = 0$ 和 $\overset{2}{L}(\ln f_2) = 0$ 成立, 则双扭曲积 Hermitian 流形 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 满足第一爱因斯坦条件等价于 (M_1, g) 和 (M_2, h) 都满足第一爱因斯坦条件.

证明 根据定义 6.1, $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 满足第一爱因斯坦条件当且仅当 $K^{(1)}_{\alpha\bar{\beta}} = \lambda(z)G_{\alpha\bar{\beta}}$, 这等价于下式成立

$$\begin{cases} K^{(1)}_{k\bar{i}} = \lambda(z)G_{k\bar{i}}, \\ K^{(1)}_{k'\bar{i}'} = \lambda(z)G_{k'\bar{i}'}. \end{cases} \tag{6.1}$$

因为 $K_{k'\bar{i}^{(1)}} = \lambda(z)G_{k'\bar{i}} = 0$ 和 $K^{(1)}_{k\bar{i}'} = \lambda(z)G_{k\bar{i}'} = 0$ 成立. 将 (4.6), (4.7) 代入 (6.1). 又注意到

$$\overset{1}{L}(\ln f_1) = 0 \quad 和 \quad \overset{2}{L}(\ln f_2) = 0$$

成立, 可得

$$\begin{cases} \overset{1}{K}{}^{(1)}_{k\bar{i}} = \lambda(z) g_{k\bar{i}}, \\ \overset{2}{K}{}^{(1)}_{k'\bar{i}'} = \lambda(z) h_{k'\bar{i}'}. \end{cases} \tag{6.2}$$

因为 $\overset{1}{K}{}^{(1)}_{k\bar{i}}$ 和 $g_{k\bar{i}}$ 只依赖于 z_1, 因此, 根据 (6.2) 中的第一个方程可知 $\lambda(z)$ 仅与 z_1 有关. 类似地, 由 (6.2) 的第二个方程, 可知 $\lambda(z)$ 只与 z_2 有关. 故而得知 $\lambda(z)$ 是常数. 因此, 根据 (6.2) 中的第一个和第二个方程可分别推出 (M_1, g) 和 (M_2, h) 满足第一爱因斯坦条件. 证毕.

类似地, 由 (4.8), (4.9) 和定义 6.1, 可得下面定理.

定理 6.3 如果 $\ln f_1$ 和 $\ln f_2$ 分别是 M_1 和 M_2 上的多重次调和函数, 则双扭曲积 Hermitian 流形 $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, G)$ 满足第二爱因斯坦条件等价于 (M_1, g) 和 (M_2, h) 都满足第二爱因斯坦条件.

定理 6.2 和 6.3 分别为构造满足第一或第二爱因斯坦条件的 Hermitian 流形提供了一种新的有效的方法.

参 考 文 献

[1] Asanov G. S., Finslerian extension of Schwarzschild metric, *Fortschr. Phys.*, 1992, **40**: 667–693.

[2] Asanov G. S., Finslerian metric functions over the product $R \times M$ and their potential applications, *Rep. Math.* 23 *Phys.*, 1998, **41**: 117–132.

[3] Baagherzadeh H. A., Rezaii M. M., On the curvature of warped product Finsler spaces and the Laplacian of the Sasaki–Finsler metrics, *J. Geom. Phys.*, 2012, **62**: 2077–2098.

[4] Balas A., Compact Hermitian manifolds of constant holomorphic sectional curvature, *Math. Z.*, 1985, **189**(27): 193–210.

[5] Beem J. K., Ehrlich P. E., Powell T. G., Warped Product Manifolds in Relativity, in Selected Studies: Physics29 Astrophysics, Mathematics, History of Science, North-Holland, Amsterdam, New York, 1982: 41–56.

[6] Bertola M., Gouthier D., Warped products with special Riemannian curvature, *Bol. Soc. Brasil. Math.* (*N.S.*), 2001, **31**(32): 45–62.

[7] Bishop R. L., O'Neill B., Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, **145**: 1–49.

[8] Dobarro F., Lami D. E., Scalar curvature and warped products of Riemann manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1987, **34**(303): 161–168.

[9] He Y., Zhong C., On doubly warped product of complex finsler manifolds, *Acta Math. Sci. Ser. Engl. Ed.*, 2016, **36**(6): 1747–1766.

[10] Katanaev M. O., Klosch T. I., Kummer W., Global properties of warped solutions in general relativity, *Ann.,* 2 *Physics*, 1999, **276**: 191–222.

[11] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry. Vol. II, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[12] Kozma L., Peter R., Varga C., Warped product of Finsler manifolds, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 2002, **44**(2001): 157–170.

[13] Liu K., Yang X., Ricci Curvatures on Hermitian Manifolds, ArXiv *e*-prints, 2014.

[14] O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry, Vol. 103, Academic Press, Inc., New York, 1983.