文章编号: 0583-1431(2018)05-0801-10 **文献标识码: A**

素环上强保持 2-Jordan 乘积的映射

齐霄霏 王胜利

山西大学数学科学学院 太原 030006
E-mail: qixf1980@126.com; 2377871502@qq.com

摘 要 对于给定的正整数 $k\geq 1$, 环 $\mathscr{R}$ 上的元 x,y 的 k-Jordan 乘积定义为 $\{x,y\}_k=\{\{x,y\}_{k-1},y\}_1$, 其中 $\{x,y\}_0=x$, $\{x,y\}_1=xy+yx$. 假设 $\mathscr{R}$ 是包含有单位元与一非平凡幂等元的素环. 本文证明了 $\mathscr{R}$ 上的满射 f 满足 $\{f(x),f(y)\}_2=\{x,y\}_2$ 对所有 $x,y\in\mathscr{R}$ 成立当且仅当存在 $\lambda\in\mathscr{C}$($\mathscr{R}$ 的可扩展中心) 且 $\lambda^3=1$, 使得下列之一成立: (1) 若 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, 则 $f(x)=\lambda x$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立; (2) 若 $\mathscr{R}$ 的特征为 2, 则 $f(x)=\lambda x+\mu(x)$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立, 其中 $\mu:\mathscr{R}\to\mathscr{C}$ 是一个映射. 作为应用, 得到了因子 von Neumann 代数上保持上述性质映射的结构.

关键词 因子 von Neumann 代数; 素环; Jordan 乘积
MR(2010) 主题分类 47B49
中图分类 O177.1

Strong 2-Jordan Product Preserving Maps on Prime Rings

Xiao Fei QI Sheng Li WANG

Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan 030006*, P. R. China*
E-mail: *qixf*1980*@*126*.com*; 2377871502*@qq.com*

Abstract For any $k\geq 1$, k-Jordan product of two elements x,y in a ring $\mathscr{R}$ is defined by $\{x,y\}_k=\{\{x,y\}_{k-1},y\}_1$, where $\{x,y\}_0=x$ and $\{x,y\}_1=xy+yx$. Assume that $\mathscr{R}$ is a unital prime ring with a nontrivial idempotent. It is shown that a surjective map $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ satisfies $\{f(x),f(y)\}_2=\{x,y\}_2$ for all $x,y\in\mathscr{R}$ if and only if there exists some $\lambda\in\mathscr{C}$ (the extended centroid of $\mathscr{R}$) with $\lambda^3=1$ such that one of the following statements holds: (1) if the characteristic of $\mathscr{R}$ is not 2, then $f(x)=\lambda x$ holds for all $x\in\mathscr{R}$; (2) if the characteristic of $\mathscr{R}$ is 2, then $f(x)=\lambda x+\mu(x)$ holds for all $x\in\mathscr{R}$, where $\mu:\mathscr{R}\to\mathscr{C}$ is a map. As an appication, such maps on factor von Neumann algebras are characterized.

Keywords factor von Neumann algebras; prime rings; Jordan products
MR(2010) Subject Classification 47B49
Chinese Library Classification O177.1

收稿日期: 2016-11-28; 接受日期: 2017-12-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671006); 山西省优秀青年基金项目 (201701D211001)

1 引言

令 $\mathscr{R}$ 是一个结合环. 对任意 $x,y\in\mathscr{R}$ 和正整数 k, 定义 x,y 的 k- 交换子为 $[x,y]_k=[[x,y]_{k-1},y]_1$, 其中 $[x,y]_0=x$, $[x,y]_1=xy-yx$ 是通常的 Lie 乘积 (见文 [9]). 如果映射 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 满足对任意 $x,y\in\mathscr{R}$ 有 $[f(x),f(y)]_k=[x,y]_k$ 成立, 则称 f 强保持 k- 交换性. 近年来, 刻画强保持 k- 交换性映射的问题已吸引了国内外许多学者的关注, 并取得了许多漂亮的结果. 例如, 对 $k=1$ 情形, 文 [6] 证明了含有单位元的半素环 $\mathscr{R}$ 上的每个可加强保持交换性的映射 f 具有形式 $f(a)=\lambda a+\mu(a)$, 其中 λ 属于 $\mathscr{R}$ 的可扩展中心, 且满足 $\lambda^2=1$, μ 是中心值可加映射. 文 [16] 讨论了素环上强保持交换性的非线性满射的结构. 对 $k>1$ 情形, 文 [17] 给出了素环上强保持 2- 交换性的非线性满射的结构, 证明了含有单位元与非平凡幂等元的素环上这样的映射具有形式 $a\mapsto\alpha a+\mu(a)$, 其中 μ 为任意中心值映射, α 属于 $\mathscr{R}$ 的可扩展中心且满足条件 $\alpha^3=1$. 近来, 文 [13] 得到了标准算子代数上强保持 3- 交换性的一般映射的完全刻画, 文 [14] 则给出了二阶矩阵代数上强保持 k- 交换性的一般映射的具体形式. 对于其它相关结果, 可见文 [2, 7, 10–12] 及其参考文献.

另一方面, $\mathscr{R}$ 中还可赋予另外一类乘积, 即 Jordan 乘积. 对任意 $x,y\in\mathscr{R}$, 记 $\{x,y\}=xy+yx$ 为 x 与 y 的 Jordan 乘积. Jordan 乘积是算子代数上一类重要的乘积, 已有许多学者对这类乘积进行了研究 (见文 [3, 5, 15, 18] 及其参考文献). 受 k- 交换子概念的启发, 对任意正整数 k, 我们可以类似地定义 k-Jordan 乘积为 $\{x,y\}_k=\{\{x,y\}_{k-1},y\}_1$, 其中 $\{x,y\}_0=x$, $\{x,y\}_1=xy+yx$. 此外, 若映射 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 满足 $\{f(x),f(y)\}_k=\{x,y\}_k$ 对任意元 $x,y\in\mathscr{R}$ 成立, 则称 f 强保持 k-Jordan 乘积. 于是, 一个自然的问题是如何刻画环或代数上强保持 k-Jordan 乘积的映射. 作为尝试, 文 [8] 证明了含有单位元且特征不为 2 的环 $\mathscr{R}$ 上强保持 Jordan 乘积的映射 f 具有形式 $f(x)=f(1)x$ 对所有 x 成立, 其中 $f(1)$ 是平方为 1 的中心元.

注意到, 随着 k 的不断增加, 强保持 k-Jordan 乘积映射的刻画将变得十分困难. 本文的目的是在素环上给出强保持 2-Jordan 乘积满射的具体刻画.

下面是本文的主要结果.

定理 1.1 令 $\mathscr{R}$ 是含单位元与一非平凡幂等元的素环. 假设 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 是满射, 则 f 强保持 2-Jordan 乘积, 即 f 满足 $\{f(x),f(y)\}_2=\{x,y\}_2$ 对所有 $x,y\in\mathscr{R}$ 成立, 当且仅当存在 $\lambda\in\mathscr{C}$ ($\mathscr{R}$ 的可扩展中心) 且 $\lambda^3=1$, 使得下列之一成立:

(1) 若 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, $f(x)=\lambda x$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立;

(2) 若 $\mathscr{R}$ 的特征为 2, $f(x)=\lambda x+\mu(x)$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立, 其中 μ 是 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{C}$ 的任意映射.

由于因子 von Neumann 代数是特征不为 2 的素 C^*- 代数, 而素 C^*- 代数的可扩展中心是复数域 $\mathbb{C}$ (见文 [1, 推论 2.3]). 因此, 下面的推论是显然的.

推论 1.2 令 $\mathscr{M}$ 是因子 von Neumann 代数. 假设 $\Phi:\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ 是满射, 则 Φ 满足 $\{\Phi(A),\Phi(B)\}_2=\{A,B\}_2$ 对所有 $A,B\in\mathscr{M}$ 成立当且仅当存在数 $\lambda\in\{1,e^{\frac{2\pi i}{3}},\mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}}\}$, 使得 $\Phi(A)=\lambda A$ 对所有 $A\in\mathscr{M}$ 成立.

结束本节之前, 我们固定一些符号与概念. 令 $\mathscr{R}$ 是环, $\mathscr{Z}(\mathscr{R})\subseteq\mathscr{R}$ 表示 $\mathscr{R}$ 的中心. 对任意 $x\in\mathscr{R}$, 若存在最小的正整数 n, 使得 $nx=0$ 成立, 则称 $\mathscr{R}$ 的特征为 n, 记为 $\mathrm{char}\mathscr{R}=n$. 如果这样的 n 不存在, 则称 $\mathscr{R}$ 的特征为 0. 对任意 $x,y\in\mathscr{R}$, 若 $x\mathscr{R}y=\{0\}$ 蕴含 $x=0$ 或者 $y=0$, 那么称 $\mathscr{R}$ 是素环. 注意到, 素环的特征要么是零, 要么是一个素数. $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}_{\mathrm{mr}}(\mathscr{R})$ 表示 $\mathscr{R}$ 的极

大右商环. $\mathscr{Q}$ 的中心 $\mathscr{C}$ 称为 $\mathscr{R}$ 的可扩展中心. 如果 $\mathscr{R}$ 是素环, 那么 $\mathscr{C}$ 是一个域. 对更多关于素环的性质, 见文 [4].

下面给出本文主要结果定理 1.1 的证明.

2 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2 情形的证明

首先, 给出两个引理.

引理 2.1 令 $\mathscr{R}$ 是特征不为 2 且含有单位元 1 的素环, $t \in \mathscr{R}$. 如果 $\{t,s\}_2 = ts^2 + s^2t + 2sts = 0$ 对所有满足 $s^3 = 1$ 的 $s \in \mathscr{R}$ 成立, 那么 $t = 0$.

证明 由于 $\{t,s\}_2 = ts^2 + 2sts + s^2t = 0$, 在此式左右两边分别乘以 s, 并注意到条件 $s^3 = 1$, 可得

$$sts^2 + 2s^2ts + t = 0 \quad 和 \quad t + 2sts^2 + s^2ts = 0. \tag{2.1}$$

此蕴含 $sts^2 = s^2ts$, 即得 $s^2t = ts^2$. 将此式代入等式 (2.1) 中, 得到 $4t = 0$. 由于 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, 所以 $t = 0$. 证毕.

下面的引理来自文 [17].

引理 2.2 (见文 [17, 引理 2.4]) 假设 $\mathscr{R}$ 是含有单位元与一非平凡幂等元 e 的素环, 则 $e\mathscr{R}e$ 也是素环, 且其中心 $\mathscr{Z}(e\mathscr{R}e) \subseteq \mathscr{C}e$.

现在给出定理 1.1 在 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2 时的证明.

定理 1.1 (1) 的证明 充分性显然. 对于必要性, 我们将分几步证之.

下面总假设 $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ 是强保持 2-Jordan 乘积的满射. 令 $e \in \mathscr{R}$ 是非平凡幂等元. 记 $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e$, 则 $\mathscr{R}$ 可以分解为 $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{11} + \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21} + \mathscr{R}_{22}$, 其中 $\mathscr{R}_{ij} = e_i\mathscr{R}e_j$, $i, j \in \{1, 2\}$.

第一步 $f(1)^3 = 1$.

由 f 的定义, 我们有 $4f(1)^3 = \{f(1), f(1)\}_2 = \{1, 1\}_2 = 4$. 因为 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, 所以 $f(1)^3 = 1$.

第二步 对任意元 $x, y \in \mathscr{R}$, 我们有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, 即 f 是可加的.

任取 $x, y \in \mathscr{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\{f(x+y) - f(x) - f(y), f(1)\}_2 &= \{f(x+y), f(1)\}_2 - \{f(x), f(1)\}_2 - \{f(y), f(1)\}_2 \\ &= \{x+y, 1\}_2 - \{x, 1\}_2 - \{y, 1\}_2 = 0.\end{aligned}$$

对该式运用引理 2.1 与第一步, 可得 $f(x + y) - f(x) - f(y) = 0$.

第三步 $f(e_i) \in \mathscr{R}_{ii}$ 且 $f(e_i)^3 = e_i$, $i = 1, 2$.

由 f 的性质, 有 $4f(e_1)^3 = \{f(e_1), f(e_1)\}_2 = \{e_1, e_1\}_2 = 4e_1 \in \mathscr{R}_{11}$. 由于 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, 因此 $f(e_1)^3 = e_1$.

记 $f(e_1) = s_{11} + s_{12} + s_{21} + s_{22}$. 注意到

$$\begin{aligned}f(e_1)^3 &= (s_{11} + s_{12} + s_{21} + s_{22})^3 \\ &= s_{11}^3 + s_{11}s_{12}s_{21} + s_{12}s_{21}s_{11} + s_{12}s_{22}s_{21} + s_{11}^2s_{12} + s_{11}s_{12}s_{22} \\ &\quad + s_{12}s_{21}s_{12} + s_{12}s_{22}^2 + s_{21}s_{11}^2 + s_{22}s_{21}s_{11} + s_{21}s_{12}s_{21} \\ &\quad + s_{22}^2s_{21} + s_{21}s_{11}s_{12} + s_{22}s_{21}s_{12} + s_{21}s_{12}s_{22} + s_{22}^3.\end{aligned}$$

由此可得

$$s_{11}^3+s_{11}s_{12}s_{21}+s_{12}s_{21}s_{11}+s_{12}s_{22}s_{21}=e_1, \tag{2.2}$$

$$s_{11}^2s_{12}+s_{11}s_{12}s_{22}+s_{12}s_{21}s_{12}+s_{12}s_{22}^2=0 \tag{2.3}$$

与

$$s_{21}s_{11}^2+s_{22}s_{21}s_{11}+s_{21}s_{12}s_{21}+s_{22}^2s_{21}=0. \tag{2.4}$$

任取 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, 由 f 的满射性知, 存在元 $t\in\mathscr{R}$, 使得 $f(t)=x_{11}$. 由于

$$\{x_{11},f(e_1)\}_2=\{f(t),f(e_1)\}_2=\{t,e_1\}_2=te_1+e_1t+2e_1te_1\in\mathscr{R}_{11}+\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21},$$

所以

$$0=e_2\{x_{11},f(e_1)\}_2e_2=e_2(x_{11}f(e_1)^2+f(e_1)^2x_{11}+2f(e_1)x_{11}f(e_1))e_2=2s_{21}x_{11}s_{12}.$$

此蕴含 $s_{21}x_{11}s_{12}=0$ 对所有 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$ 成立, 即有 $s_{21}xs_{12}=0$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立. 因为 $\mathscr{R}$ 是素环, 所以有

$$s_{12}=0 \ \text{ 或者 } \ s_{21}=0. \tag{2.5}$$

该式与等式 (2.2) 蕴含

$$s_{11}^3=e_1. \tag{2.6}$$

接着, 任取 $x_{22}\in\mathscr{R}_{22}$. 利用与 x_{11} 类似的证明方法, 可证

$$\begin{aligned}0&=e_2\{x_{22},f(e_1)\}_2e_2=e_2(x_{22}f(e_1)^2+f(e_1)^2x_{22}+2f(e_1)x_{22}f(e_1))e_2\\&=x_{22}(s_{21}s_{12}+s_{22}^2)+(s_{21}s_{12}+s_{22}^2)x_{22}+2s_{22}x_{22}s_{22}.\end{aligned}$$

该式与等式 (2.5) 结合, 得到

$$s_{22}^2x_{22}+x_{22}s_{22}^2+2s_{22}x_{22}s_{22}=0 \ \text{ 对所有 } x_{22}\in\mathscr{R}_{22} \text{ 成立}. \tag{2.7}$$

特别地, 取 $x_{22}=e_2$, 可得 $4s_{22}^2=0$, 即得 $s_{22}^2=0$. 这样, 等式 (2.7) 约简为 $s_{22}x_{22}s_{22}=0$, 即 $s_{22}xs_{22}=0$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立. 再一次利用 $\mathscr{R}$ 的素性, 得到

$$s_{22}=0. \tag{2.8}$$

现在, 结合等式 (2.3)–(2.5) 与等式 (2.8), 得到 $s_{11}^2s_{12}=s_{21}s_{11}^2=0$. 该式与等式 (2.6) 蕴含 $s_{12}=s_{21}=0$. 因而 $f(e_1)=s_{11}\in\mathscr{R}_{11}$ 且满足 $f(e_1)^3=e_1$.

对于 e_2 的情形, 类似可证.

第四步 $f(\mathscr{R}_{ii})\subseteq\mathscr{R}_{ii}$, $i=1,2$.

任取 $x_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, 并记 $f(x_{22})=s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}$. 由第三步知, 可设 $f(e_1)=t_{11}$ 且满足 $t_{11}^3=e_1$. 由于 $\{f(x_{22}),f(e_1)\}_2=\{x_{22},e_1\}_2=0$, 且

$$\{f(x_{22}),f(e_1)\}_2=s_{11}t_{11}^2+s_{21}t_{11}^2+t_{11}^2s_{11}+t_{11}^2s_{12}+2t_{11}s_{11}t_{11},$$

所以

$$s_{11}t_{11}^2+t_{11}^2s_{11}+2t_{11}s_{11}t_{11}=0 \tag{2.9}$$

且

$$t_{11}^2s_{12}=s_{21}t_{11}^2=0. \tag{2.10}$$

注意到 $\mathscr{R}_{11}$ 也是特征不为 2 的素环, 且单位元为 e_1. 因此, 对等式 (2.9) 运用引理 2.1, 可得 $s_{11}=0$. 又注意到 $t_{11}^3=e_1$. 易知等式 (2.10) 蕴含 $s_{12}=s_{21}=0$. 因而 $f(x_{22})=s_{22}\in\mathscr{R}_{22}$.

类似可证 $f(\mathscr{R}_{11})\subseteq\mathscr{R}_{11}$.

第五步 对任意元 $x_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}$ $(1\leq i\neq j\leq 2)$, 我们有 $f(x_{12})=f(e_1)x_{12}$ 与 $f(x_{21})=x_{21}f(e_1)$.

仍然只给出情形 $\{i=1,j=2\}$ 的证明, 另一情形类似可证.

对任意元 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$, 记 $f(x_{12})=s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}$. 仍设 $f(e_1)=t_{11}$ 且满足 $t_{11}^3=e_1$. 我们有

$$\{f(x_{12}),f(e_1)\}_2=\{x_{12},e_1\}_2=x_{12}$$

和

$$\{f(x_{12}),f(e_1)\}_2=s_{11}t_{11}^2+s_{21}t_{11}^2+t_{11}^2s_{11}+t_{11}^2s_{12}+2t_{11}s_{11}t_{11}.$$

上面两式蕴含

$$s_{11}t_{11}^2+t_{11}^2s_{11}+2t_{11}s_{11}t_{11}=0, \tag{2.11}$$

$$s_{21}t_{11}^2=0 \tag{2.12}$$

和

$$x_{12}=t_{11}^2s_{12}. \tag{2.13}$$

对等式 (2.11) 应用引理 2.1 可得 $s_{11}=0$; 等式 (2.12) 与事实 $t_{11}^3=e_1$ 蕴含 $s_{21}=0$; 等式 (2.13) 与事实 $t_{11}^3=e_1$ 蕴含 $s_{12}=t_{11}x_{12}=f(e_1)x_{12}$.

为完成该步的证明, 仍需验证 $s_{22}=0$. 为此, 对关系式 $\{f(x_{12}),f(e_2)\}_2=\{x_{12},e_2\}_2=x_{12}$ 进行类似于 $s_{11}=0$ 的证明方法, 易证 $s_{22}=0$. 该步成立.

第六步 存在 $\mathscr{R}$ 的扩展中心元 $\lambda\in\mathscr{C}$ 且 $\lambda^3=1$, 使得 $f(e_1)=\lambda e_1$.

对任意元 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ 和 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, 由第四、五步有

$$x_{11}^2x_{12}=\{x_{12},x_{11}\}_2=\{f(x_{12}),f(x_{11})\}_2=f(x_{11})^2f(e_1)x_{12},$$

即有

$$(f(x_{11})^2f(e_1)-x_{11}^2)xe_2=0\quad \text{对所有 } x\in\mathscr{R} \text{ 成立.}$$

那么, $\mathscr{R}$ 的素性蕴含 $f(x_{11})^2f(e_1)-x_{11}^2=0$. 在等式两边同时右乘 $f(e_1)^2$, 可得

$$f(x_{11})^2=x_{11}^2f(e_1)^2. \tag{2.14}$$

另一方面, 再任取元 $y_{21}\in\mathscr{R}_{21}$. 由第二步、第四步和第五步, 有

$$\begin{aligned}2y_{21}x_{11}x_{12}&=e_2\{x_{11},x_{12}+y_{21}\}_2e_2\\&=e_2\{f(x_{11}),f(x_{12})+f(y_{21})\}_2e_2=2f(y_{21})f(x_{11})f(x_{12})\\&=2y_{21}f(e_1)f(x_{11})f(e_1)x_{12}.\end{aligned}$$

因为 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2, 所以 $y_{21}f(e_1)f(x_{11})f(e_1)x_{12}=y_{21}x_{11}x_{12}$, 即有 $e_2y(f(e_1)f(x_{11})f(e_1)-x_{11})xe_2=0$ 对所有 $x,y\in\mathscr{R}$ 成立. 两次利用 $\mathscr{R}$ 的素性, 可证

$$f(e_1)f(x_{11})f(e_1)=x_{11}\quad \text{对所有 } x_{11}\in\mathscr{R}_{11} \text{ 成立.}$$

在上式左右两边同时乘以 $f(e_1)^2$, 并注意到 $f(e_1)^3=e_1$, 得到 $f(x_{11})=f(e_1)^2x_{11}f(e_1)^2$, 进而有 $f(x_{11})^2=f(e_1)^2x_{11}f(e_1)x_{11}f(e_1)^2$. 该式与等式 (2.14) 结合即得 $f(e_1)^2x_{11}f(e_1)x_{11}f(e_1)^2=x_{11}^2f(e_1)^2$. 两边同乘以 $f(e_1)$, 可得

$$x_{11}f(e_1)x_{11}=f(e_1)x_{11}^2 \text{ 对所有 } x_{11}\in\mathscr{R}_{11} \text{ 成立.}$$

在上式中用 $x_{11}+e_1$ 代替 x_{11} 并整理, 得到

$$x_{11}f(e_1)x_{11}+x_{11}f(e_1)=f(e_1)x_{11}^2+f(e_1)x_{11}.$$

进而得到 $f(e_1)x_{11}=x_{11}f(e_1)$ 对所有 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$ 成立. 现利用引理 2.2 知, $f(e_1)\in\mathscr{Z}(\mathscr{R}_{11})\subseteq\mathscr{C}e_1$. 此蕴含存在 $\lambda\in\mathscr{C}$, 使得 $f(e_1)=\lambda e_1$.

最后, 注意到 $f(e_1)^3=e_1$(第三步知). 因而 $\lambda^3=1$.

第七步 对任意元 $x_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}$, 我们有 $f(x_{ij})=\lambda x_{ij}$, $1\le i,j\le 2$.

由第五步与第六步知, 对任意元 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ 与 $x_{21}\in\mathscr{R}_{21}$,

$$f(x_{12})=\lambda x_{12} \text{ 且 } f(x_{21})=\lambda x_{21}. \tag{2.15}$$

对任意元 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, 利用第四步, 有

$$4x_{11}=\{x_{11},e_1\}_2=\{f(x_{11}),f(e_1)\}_2=\{f(x_{11}),\lambda e_1\}_2=4\lambda^2f(x_{11}).$$

由于 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2 且 $\lambda^3=1$, 上式即蕴含 $f(x_{11})=\lambda x_{11}$.

对任意元 $x_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, 利用关系式 $\{x_{22},x_{12}+x_{21}\}_2=\{f(x_{22}),f(x_{12})+f(x_{21})\}_2$ 与等式 (2.15), 简单计算可得 $x_{12}(\lambda^2f(x_{22})-x_{22})x_{21}=0$. 对该式两次利用 $\mathscr{R}$ 的素性, 即证 $f(x_{22})=\lambda x_{22}$. 该步成立.

第八步 对任意元 $x\in\mathscr{R}$, 我们有 $f(x)=\lambda x$. 定理成立.

对任意元 $x\in\mathscr{R}$, 结合第二、七步, 易验证该步成立, 完成了 $\mathscr{R}$ 的特征不为 2 时定理 1.1 的证明.

3 $\mathscr{R}$ 的特征为 2 的情形的证明

本节将给出 $\mathscr{R}$ 的特征为 2 时定理 1.1 的证明.

引理 3.1 (见文 [17, 引理 2.2]) 令 $\mathscr{R}$ 是素环. 那么 $\mathscr{Z}(\mathscr{R})=\{z\in\mathscr{R}:[z,x]_2=0$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立$\}$.

注意到, 若素环 $\mathscr{R}$ 的特征为 2, 那么对任意元 $x,y\in\mathscr{R}$, $[x,y]_2=0$ 当且仅当 $\{x,y\}_2=0$. 因此, 由引理 3.1 即可得下面的结论.

引理 3.2 令 $\mathscr{R}$ 是特征为 2 的素环. 那么, $\mathscr{Z}(\mathscr{R})=\{z\in\mathscr{R}:\{z,x\}_2=0$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立$\}$.

定理 1.1 (2) 的证明 仍然, 充分性是显然的, 只需证明必要性. 分几步证之.

第一步 对任意元 $x,y\in\mathscr{R}$, 存在依赖于 x,y 的中心元 $z_{x,y}\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 使得 $f(x+y)=f(x)+f(y)+z_{x,y}$.

任取元 $x,y,z\in\mathscr{R}$. 由 f 的满射性, 存在 $t\in\mathscr{R}$, 使得 $f(t)=z$. 我们有

$$\begin{aligned}\{f(x+y)-f(x)-f(y),z\}_2&=\{f(x+y),z\}_2-\{f(x),z\}_2-\{f(y),z\}_2\\&=\{x+y,t\}_2-\{x,t\}_2-\{y,t\}_2=0.\end{aligned}$$

现利用引理 3.2 知, $f(x+y)-f(x)-f(y)\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 即存在依赖于 x,y 的中心元 $z_{x,y}\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 使得 $f(x+y)=f(x)+f(y)+z_{x,y}$. 该步成立.

第二步 $f(\mathscr{Z}(\mathscr{R}))=\mathscr{Z}(\mathscr{R})$.

任取 $z\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$. 对任意元 $x\in\mathscr{R}$, 由 f 的满射性知, 存在 $t\in\mathscr{R}$, 使得 $f(t)=x$. 利用 $\mathscr{R}$ 的特征为 2 的性质, 我们有

$$0=2zt^2=\{z,t\}_2=\{f(z),x\}_2.$$

现在利用引理 3.2, 可得 $f(z)\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 即 $f(\mathscr{Z}(\mathscr{R}))\subseteq\mathscr{Z}(\mathscr{R})$. 另一包含关系类似可证.

第三步 对任意元 $x\in\mathscr{R}$, 存在元 $0\neq\lambda,\ \mu\in\mathscr{C}$, 使得 $f(e_1)=\lambda e_1+\mu$.

记 $f(e_1)=s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}$. 首先任取 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$. 由 f 的满射性知, 存在元 $t=t_{11}+t_{12}+t_{21}+t_{22}$, 使得 $f(t)=x_{12}$. 我们有

$$\{x_{12},f(e_1)\}_2=\{t,e_1\}_2=t_{12}+t_{21}\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}$$

和

$$\begin{aligned}\{x_{12},f(e_1)\}_2=&(x_{12}s_{21}s_{11}+x_{12}s_{22}s_{21})+(s_{21}s_{11}x_{12}+s_{22}s_{21}x_{12})\\&+(x_{12}s_{22}^2+x_{12}s_{21}s_{12}+s_{12}s_{21}x_{12}+s_{11}^2x_{12})\in\mathscr{R}_{11}+\mathscr{R}_{22}+\mathscr{R}_{21}.\end{aligned}$$

结合上面两式可得 $x_{12}s_{21}s_{11}+x_{12}s_{22}s_{21}=0$, 即有

$$e_1xe_2(s_{21}s_{11}+s_{22}s_{21})=0\ \text{ 对所有 } x\in\mathscr{R} \text{ 成立.}$$

由于 $\mathscr{R}$ 是素的, 上式蕴含

$$s_{21}s_{11}+s_{22}s_{21}=0. \tag{3.1}$$

其次, 对任意元 $x_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ 采取与上面类似的方法, 可得

$$s_{11}s_{12}+s_{12}s_{22}=0. \tag{3.2}$$

接着, 任取 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$. 由 f 的满射性知, 存在元 $z=z_{11}+z_{12}+z_{21}+z_{22}\in\mathscr{R}$, 使得 $f(z)=x_{11}$. 则有

$$\{x_{11},f(e_1)\}_2=\{z,e_1\}_2=z_{12}+z_{21}\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}.$$

注意到, 利用等式 (3.1) 和等式 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}\{x_{11},f(e_1)\}_2=&(x_{11}s_{11}^2+x_{11}s_{12}s_{21}+s_{11}^2x_{11}+s_{12}s_{21}x_{11})\\&+x_{11}(s_{11}s_{12}+s_{12}s_{22})+(s_{21}s_{11}+s_{22}s_{21})x_{11}\\=&x_{11}s_{11}^2+x_{11}s_{12}s_{21}+s_{11}^2x_{11}+s_{12}s_{21}x_{11}\in\mathscr{R}_{11}.\end{aligned}$$

上面两式蕴含 $z_{12}=z_{21}=0$. 因此

$$f(z_{11}+z_{22})=x_{11}. \tag{3.3}$$

另一方面, 注意到 $\mathscr{R}$ 的特征为 2, 我们有

$$s_{11}x_{11}^2+s_{21}x_{11}^2+x_{11}^2s_{11}+x_{11}^2s_{12}=\{f(e_1),x_{11}\}_2=\{e_1,z_{11}+z_{22}\}_2=0.$$

因此

$$x_{11}^2s_{12}=s_{21}x_{11}^2=0 \tag{3.4}$$

和

$$s_{11}x_{11}^2+x_{11}^2s_{11}=0 \tag{3.5}$$

对所有 $x_{11}\in\mathscr{R}_{11}$ 成立. 在等式 (3.4) 中取 $x_{11}=e_1$, 可得 $s_{12}=s_{21}=0$; 注意到 $\mathscr{R}_{11}$ 也是特征为 2 的素环, 对等式 (3.5) 利用引理 3.2 和引理 2.2, 可得 $s_{11}=\lambda_1 e_1$, 其中 $\lambda_1\in\mathscr{C}$.

现在, 对任意的 $x_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, 利用与等式 (3.5) 类似的证明, 可证存在 $\mu\in\mathscr{C}$, 使得 $s_{22}=\mu e_2$. 所以 $f(e_1)=\lambda_1 e_1+\mu e_2=\lambda e_1+\mu 1$, 其中 $\lambda=\lambda_1-\mu$.

最后仍需验证 $\lambda\neq 0$. 否则, 若 $\lambda=0$, 那么 $f(e_1)=\mu 1\in\mathscr{C}\cap\mathscr{R}=\mathscr{Z}(\mathscr{R})$. 利用第二步得 $e_1\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 矛盾. 该步成立.

注意到 $\mathscr{C}$ 是域. 因此 $\lambda\in\mathscr{C}$ 可逆. 记 $\alpha=\lambda^{-1}$.

第四步 对任意元 $x_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}$, 存在元 $\mu_{ij}(x_{ij})\in\mathscr{C}$, 使得 $f(x_{ij})=\alpha^2x_{ij}+\mu_{ij}(x_{ij})$ 成立, 其中 $1\leq i\neq j\leq 2$.

这里, 只给出 x_{12} 的证明. 对于 x_{21}, 证明类似, 故省略之.

任取 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$, 令 $f(x_{12})=s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}$. 由第三步有

$$x_{12}=\{x_{12},e_1\}_2=\{f(x_{12}),f(e_1)\}_2=\{f(x_{12}),\lambda e_1+\mu 1\}_2=\lambda^2(s_{21}+s_{12}).$$

因此 $\lambda^2 s_{21}=0$ 且 $\lambda^2 s_{12}=x_{12}$. 此分别蕴含

$$s_{21}=0 \ \text{ 与 } \ s_{12}=\alpha^2x_{12}. \tag{3.6}$$

对任意元 $y=y_{11}+y_{21}+y_{22}\in\mathscr{R}$, f 的满射性蕴含存在元 $t=t_{11}+t_{12}+t_{21}+t_{22}\in\mathscr{R}$, 使得 $f(t)=y$. 由于

$$t_{12}+t_{21}=\{t,e_1\}_2=\{y,\lambda e_1+\mu\}_2=\lambda^2y_{21},$$

所以

$$t_{12}=0 \ \text{ 且 } \ \lambda^2y_{21}=t_{21}. \tag{3.7}$$

另一方面, 由等式 (3.6) 和等式 (3.7) 有

$$\begin{aligned}\{f(x_{12}),f(t)\}_2&=\{x_{12},t\}_2\\&=\lambda^2x_{12}(t_{22}y_{21}+y_{21}t_{11})+\lambda^2(t_{22}y_{21}+y_{21}t_{11})x_{12}+(x_{12}t_{22}^2+t_{11}^2x_{12})\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\{f(x_{12}),f(t)\}_2=&\ s_{11}y_{11}^2+\alpha^2x_{12}(y_{21}y_{11}+y_{22}y_{21})+y_{11}^2s_{11}+y_{11}^2s_{12}+s_{12}y_{22}^2\\&+s_{22}y_{21}y_{11}+s_{22}y_{22}y_{21}+y_{21}y_{11}s_{11}+y_{22}y_{21}s_{11}\\&+s_{22}y_{22}^2+y_{22}^2s_{22}+\alpha^2(y_{21}y_{11}+y_{22}y_{21})x_{12}.\end{aligned}$$

结合上面两式可得

$$s_{11}y_{11}^2+y_{11}^2s_{11}=x_{12}(\lambda^2t_{22}-\alpha^2y_{22})y_{21}+x_{12}y_{21}(\lambda^2t_{11}-\alpha^2y_{11}) \tag{3.8}$$

与

$$s_{22}y_{22}^2+y_{22}^2s_{22}=(\lambda^2t_{22}-\alpha^2y_{22})y_{21}x_{12}+y_{21}(\lambda^2t_{11}-\alpha^2y_{11})x_{12}. \tag{3.9}$$

特别地, 在等式 (3.8), (3.9) 中取 $y_{21}=0$, 可得 $s_{11}y_{11}^2+y_{11}^2s_{11}=\{s_{11},y_{11}\}_2=0$ 和 $s_{22}y_{22}^2+y_{22}^2s_{22}=\{s_{22},y_{22}\}_2=0$ 对所有 y_{11} 与 y_{22} 成立. 现利用引理 3.2 和 2.2, 我们得到存在元 $\mu_1,\mu_2\in\mathscr{C}$, 使得 $s_{11}=\mu_1e_1$ 和 $s_{22}=\mu_2e_2$.

为了完成该步的证明, 仍需验证 $\mu_1=\mu_2$. 为此, 利用上面证明的式子与 $\mathscr{R}$ 的特征为 2 这一事实, 可得

$$\begin{aligned}0&=\{t,x_{12}\}_2=\{f(t),f(x_{12})\}_2\\&=(\mu_1+\mu_2)\alpha^2x_{12}y_{21}+(\mu_1+\mu_2)\alpha^2y_{11}x_{12}\\&\quad+(\mu_1+\mu_2)\alpha^2x_{12}y_{22}+(\mu_1^2+\mu_2^2)y_{21}+(\mu_1+\mu_2)\alpha^2y_{21}x_{12}.\end{aligned}$$

因此有 $(\mu_1^2+\mu_2^2)y_{21}=0$, 即 $(\mu_1^2+\mu_2^2)ye_1=0$ 对所有 $y\in\mathscr{R}$ 成立. 此蕴含 $\mu_1^2+\mu_2^2=(\mu_1+\mu_2)^2=0$. 因而必有 $\mu_1=\mu_2$. 现令 $\mu_{12}(x_{12})=\mu_1=\mu_2$, 那么

$$f(x_{12})=\alpha^2x_{12}+\mu_{12}(x_{12}),$$

该步成立.

第五步 对任意元 $x_{ii}\in\mathscr{R}_{ii}$, 存在元 $\mu_{ii}(x_{ii})\in\mathscr{C}$, 使得 $f(x_{ii})=\lambda x_{ii}+\mu_{ii}(x_{ii})$ 成立, 其中 $i=1,2$.

对任意元 $x_{ii}\in\mathscr{R}_{ii}$ $(i=1,2)$, 令 $f(x_{ii})=s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}$. 因为

$$\lambda^2(s_{21}+s_{12})=\{f(x_{ii}),f(e_1)\}_2=\{x_{ii},e_1\}_2=0,$$

且 λ 可逆, 我们有

$$s_{21}=s_{12}=0.$$

任取 $y_{jj}\in\mathscr{R}_{jj}$ $(i\neq j)$. 由等式 (3.3) 与 (3.7) 的证明可知存在元 $t=t_{11}+t_{22}\in\mathscr{R}$, 使得 $f(t)=y_{jj}$. 注意到

$$s_{jj}y_{jj}^2+y_{jj}^2s_{jj}=\{s_{11}+s_{22},y_{jj}\}_2=\{f(x_{ii}),f(t)\}_2=\{x_{ii},t_{11}+t_{22}\}_2=x_{ii}t_{ii}^2+t_{ii}^2x_{ii}.$$

该式蕴含 $s_{jj}y_{jj}^2+y_{jj}^2s_{jj}=0$ 对所有 $y_{jj}\in\mathscr{R}_{jj}$ 成立. 利用引理 3.2 知存在 $\mu_{ii}(x_{ii})\in\mathscr{C}$, 使得

$$s_{jj}=\mu_{ii}(x_{ii})e_j.$$

现任取 $y_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}$ $(i\neq j)$. 由第一步、第三步和第四步得到

$$\begin{aligned}x_{ii}y_{ij}&=\{x_{ii},y_{ij}+e_1\}_2=\{f(x_{ii}),f(y_{ij}+e_1)\}_2\\&=\{s_{ii}+\mu_{ii}(x_{ii})e_j,\alpha^2y_{ij}+\lambda e_1+\mu+z\}_2\\&=\alpha(s_{ii}y_{ij}+\mu_{ii}(x_{ii})y_{ij}),\end{aligned}$$

其中 $z\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$. 整理可得 $(x_{ii}-\alpha s_{ii}-\alpha\mu_{ii}(x_{ii})e_i)ye_j=0$ 对所有 $y\in\mathscr{R}$ 成立. $\mathscr{R}$ 的素性蕴含 $s_{ii}=\lambda x_{ii}-\mu_{ii}(x_{ii})e_i$. 进而有

$$f(x_{ii})=\lambda x_{ii}+\mu_{ii}(x_{ii}).$$

第六步 $\lambda^3=1$, 且对任意元 $x\in\mathscr{R}$, 存在映射 $\mu:\mathscr{R}\to\mathscr{C}$, 使得 $f(x)=\lambda x+\mu(x)$ 成立. 定理得证.

首先证明 $\lambda^3=1$. 为此, 任取元 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ 与 $x_{21}\in\mathscr{R}_{21}$. 利用第一步与第四步, 存在中心元 $z\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 使得

$$\begin{aligned}x_{21}+x_{21}x_{12}+x_{12}x_{21}&=\{x_{21},x_{12}+e_1\}_2=\{f(x_{21}),f(x_{12}+e_1)\}_2\\&=\{\alpha^2x_{21}+\mu_{21}(x_{21}),\alpha^2x_{12}+\mu_{12}(x_{12})+\lambda e_1+\mu+z\}_2\\&=x_{21}+\alpha^3x_{21}x_{12}+\alpha^3x_{12}x_{21}.\end{aligned}$$

此蕴含 $(\alpha^3-1)x_{12}x_{21}=0$ 对所有 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ 和 $x_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ 成立. 如果 $\alpha^3\neq 1$, 则 α^3-1 可逆. 进而得到 $x_{12}x_{21}=0$ 对所有 $x_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ 和 $x_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ 成立, 矛盾. 因此 $\alpha^3=1$, 即 $\lambda^3=1$.

现在, 对任意元 $x=x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}\in\mathscr{R}$, 利用第四步与第五步可得

$$\begin{aligned} f(x_{11})+f(x_{12})+f(x_{21})+f(x_{22}) &= \lambda x_{11}+\mu_{11}(x_{11})+\lambda x_{12}+\mu_{12}(x_{12}) \\ &\quad +\lambda x_{21}+\mu_{21}(x_{21})+\lambda x_{22}+\mu_{22}(x_{22}) \\ &= \lambda x+(\mu_{11}(x_{11})+\mu_{12}(x_{12})+\mu_{21}(x_{21})+\mu_{22}(x_{22})). \end{aligned}$$

另一方面, 由第一步知, 存在 $z_x\in\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, 使得

$$f(x)-f(x_{11})-f(x_{12})-f(x_{21})-f(x_{22})=z_x.$$

定义映射 $\mu:\mathscr{R}\to\mathscr{C}$ 为: 对任意 $x\in\mathscr{R}$ 有 $\mu(x)=(\mu_{11}(x_{11})+\mu_{12}(x_{12})+\mu_{21}(x_{21})+\mu_{22}(x_{22}))+z_x$. 结合上面两式即证 $f(x)=\lambda x+\mu(x)$ 对所有 $x\in\mathscr{R}$ 成立. 定理 1.1 (2) 证毕.

致谢 感谢审稿人提出的意见与建议.

参 考 文 献

[1] Ara P., The extended centroid of C^*-algebras, *Arch. Math.*, 1990, **54**(4): 358–364.

[2] Bell H. E., Daif M. N., On commutativity and strong commutativity-preserving maps, *Canad. Math. Bull.*, 1994, **37**(4): 443–447.

[3] Brešar M., Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, *Trans. Ameri. Math. Soc.*, 1993, **335**(2): 525–546.

[4] Brešar M., Chebotar M. A., Martindale III W. S., Functional Identities, Birkhäuser Basel, 2007.

[5] Brešar M., Miers C. R., Commutativity preserving mapping of von Neumann algebras, *Canad. J. Math.*, 1993, **45**(4): 695–708.

[6] Brešar M., Miers C. R., Strong commutativity preserving maps of semiprime rings, *Canad. Math. Bull.*, 1994, **37**(4): 457–460.

[7] De Filippis. V., Scudo G., Strong commutativity and Engel condition preserving maps in prime and semiprime rings, *Linear and Multilinear Algebra*, 2013, **61**(7): 917–938.

[8] Gong L., Qi X. F., Shao J., et al., Strong (skew) ξ-Lie commutativity preserving maps on algebras, *Cogent Math.*, 2015, **2**(1): 1003175.

[9] Lanski C., An Engel condition with derivation for left ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**(2): 339–345.

[10] Lee T. K., Wong T. L., Nonadditive strong commutativity preserving maps, *Commu. Algebra*, 2012, **40**(6): 2213–2218.

[11] Lin J. S., Liu C. K., Strong commutativity preserving maps on Lie ideals, *Linear Algebra Appl.*, 2008, **428**(7): 1601–1609.

[12] Liu C. K., Strong commutativity preserving maps on subsets of matrices that are not closed under addition, *Linear Algebra Appl.*, 2014, **458**(10): 280–290.

[13] Liu M. Y., Hou J. C., Strong 3-commutativity preserving maps on standard operator algebra, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2017, **33**(12): 1659–1670.

[14] Liu M. Y., Hou J. C., Strong k-commutativity preserving map on real or complex 2×2 matrices, *J. Taiyuan Univ. Tech.*, 2017, **48**(2): 254–259.

[15] Molnár L., Šemrl P., Non-linear commutativity preserving maps on self-adjont operators, *Q. J. Math.*, 2005, **56**(4): 589–595.

[16] Qi X. F., Hou J. C., Nonlinear strong commutativity preserving maps on prime rings, *Comm. Algebra*, 2010, **38**(8): 2790–2796.

[17] Qi X. F., Strong 2-commutativity preserving maps on prime rings, *Publ. Math. Debrecen*, 2016, **88**(1–2): 119–129.

[18] Słowik R., Continuous maps on triangular matrices that preserve commutativity, *Linear and Multilinear Algebra*, 2016, **64**(9): 1716–1730.