第61卷第5期 数学学报中文版 Vol.61, No.5
2018年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)05-0783-18 **文献标识码: A**

Kakeya 极大算子及其分数次情形的正则性

刘 风

山东科技大学数学与系统科学学院 青岛 266590
E-mail: liufeng860314@163.com

吴玉荣

浙江工业大学应用数学系 杭州 310023
E-mail: wuyurong2003@163.com

摘 要 研究中心 Kakeya (Nikodym) 极大算子 $\mathscr{K}_N$ $(N>2)$ 及其分数次情形 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ $(0<\alpha<d)$ 的正则性. 特别地, 建立了中心分数次 Kakeya 极大算子 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 是从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 到 $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ 上的有界连续算子, 其中 $1<p<\infty$, $q=dp/(d-\alpha p)$ 和 $0\leq\alpha<d/p$. 还证明了中心 Kakeya 极大算子 $\mathscr{K}_N$ 是分数次 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, 非齐次 Triebel–Lizorkin 空间 $F_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 以及非齐次 Besov 空间 $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 上的有界连续算子, 其中 $0<s<1$, $1<p,q<\infty$. 此外, 也考虑分数次 Kakeya 极大函数的弱导数的两种点态估计以及其离散情形的正则性.

关键词 Kakeya 极大算子; 分数次 Kakeya 极大算子; Sobolev 空间; Triebel–Lizorkin 空间; 连续性

MR(2010) 主题分类 42B25, 46E35, 31B05

中图分类 O177.6

Regularity of the Kakeya Maximal Operator and Its Fractional Variant

Feng LIU

College of Mathematics and Systems Science,
Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, *P. R. China*
E-mail: *liufeng*860314*@*163*.com*

Yu Rong WU

Department of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology,
Hangzhou 310023, *P. R. China*
E-mail: *wuyurong*2003*@*163*.com*

收稿日期: 2017-11-01; 接受日期: 2017-12-11
基金项目: 国家自然科学基金 (11701333, 11771395); 山东科技大学人才引进科研启动基金 (2015RCJJ053); 山东科技大学数学与系统科学学院优秀青年科技拔尖人才支持计划项目 (Sxy2016ko1)
通讯作者: 刘风

Abstract In this article, the authors investigate the regularity properties of the centered Kakeya (Nikodym) maximal operator $\mathscr{K}_N$ (with $N>2$) and its fractional variant $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ (with $0<\alpha<d$). More precisely, the authors prove that, the operator $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ is bounded and continuous from $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ to $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ for $1<p<\infty$ and $q=dp/(d-\alpha p)$ with $0\le\alpha<d/p$, and the operator $\mathscr{K}_N$ is bounded and continuous on the fractional Sobolev spaces $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, inhomogeneous Triebel–Lizorkin spaces $F_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ and inhomogeneous Besov spaces $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ for all $0<s<1$ and $1<p,\ q<\infty$. In addition, two pointwise estimates for the derivatives of the fractional Kakeya maximal functions and the regularity properties for the discrete versions of these operators are also presented.

Keywords Kakeya maximal operator; fractional Kakeya maximal operator; Sobolev space; Triebel–Lizorkin space; continuity

MR(2010) Subject Classification 42B25, 46E35, 31B05

Chinese Library Classification O177.6

1 引言

1.1 背景介绍

众所周知, 调和分析中的一个重要工具是极大函数. 它的一个重要作用是起到控制函数的作用. 然而, 在过去的一些年里, 各类极大算子的正则性引起了广泛的关注. 例如, Hardy–Littlewood 极大算子 [1, 12–14, 16–18, 22, 27–29, 33], 分数次极大算子 [6, 15], 多线性极大算子 [7, 20, 24, 25] 以及其它极大算子 [4, 8, 21, 23]. 本文主要研究 Kakeya (Nikodym) 极大算子及其分数次情形的正则性.

设 $0\le\alpha<d$ 和 $N>2$, 定义中心分数次 Kakeya 极大算子 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 如下:

$$\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|R_{r,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r,N}(x)}|f(y)|dy,\tag{1.1}$$

其中 $R_{r,N}(x)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上中心为 x, 各边平行于轴, 其中 $d-1$ 条边长度为 $2r$, 剩余一条边的长度为 $2Nr$ 的开矩形. 特别地, 当 $\alpha=0$ 时, 算子 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 退化为中心 Kakeya (Nikodym) 极大算子 $\mathscr{K}_N$. 分数次 Kakeya 极大算子与经典的分数次极大算子密切相关. 定义经典的分数次极大算子为

$$\mathscr{M}_\alpha f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{B_r(x)}|f(y)|dy,$$

其中 $0\le\alpha<d$, $B_r(x)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中中心为 x, 半径为 r 的开球. $|B_r(x)|$ 表示 $B_r(x)$ 的体积. 容易验证

$$N^{\alpha/d-1}\mathscr{M}_\alpha f(x)\lesssim_{\alpha,d}\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)\lesssim_{\alpha,d}N^{(d-1)(1-\alpha/d)}\mathscr{M}_\alpha f(x),\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^d,$$

上述不等式结合 $\mathscr{M}_\alpha$ 的有界性可暗示当 $1<p<\infty$, $0\le\alpha<d/p$ 和 $q=dp/(d-\alpha p)$ 时, $\mathscr{K}_{\alpha,N}:L^p(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)$ 是有界的. 而且 $\mathscr{K}_{\alpha,N}:L^1(\mathbb{R}^d)\to L^{\frac{d}{d-\alpha},\infty}(\mathbb{R}^d)$ 也是有界的.

目前一个有趣的研究是调查 $\mathscr{K}_N$ 的 L^p 范数作为 N 的一个函数 [9, 11, 32]. 本文所关注的对象是研究 $\mathscr{K}_N$ 和 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 的正则性. 由文 [13, 15, 20, 28] 知 $\mathscr{M}_\alpha:W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\to W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ 是有界且连续的, 其中 $1<p<\infty$, $0\le\alpha<d/p$ 和 $q=dp/(d-\alpha p)$. 这里 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $1\le p\le\infty$, 定义为

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d):=\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\,|\,\|f\|_{1,p}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}<\infty\},$$

其中 $\nabla f=(D_1f,\dots,D_df)$ 为函数 f 的弱梯度. 众所周知, $\mathbb{R}^d$ 上长方体的几何性质要比球体复杂, 即使长方体的各边平行于轴. 基于分数次极大算子 $\mathscr{M}_\alpha$ 的正则性以及 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 和 $\mathscr{M}_\alpha$ 之间的关系, 一个自然而有趣的问题是分数次 Kakeya 极大算子是否有类似的正则性质, 这是本文的主要动机.

本文的主要结果表述如下:

定理 1.1　设 $1<p<\infty$, $0\le\alpha<d/p$ 和 $q=dp/(d-\alpha p)$, 则 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 是从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 到 $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ 的有界连续算子. 特别地, 若 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, 则

$$|D_i(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)|\le\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_if)(x),\quad\forall\, i=1,\dots,d \text{ 和 a.e. } x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

定理 1.2　设 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<d$ 和 $1\le\alpha<d/p$.

(i) 弱偏导数 $D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)$, $l=1,\dots,d$ 几乎处处存在. 而且

$$|D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)|\le(d-\alpha)N^{1/d}\mathscr{K}_{\alpha-1,N}f(x),\quad\forall\,\text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

(ii) 设 $q=dp/(d-(\alpha-1)p)$, 则 $D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)\in L^q(\mathbb{R}^d)$, $l=1,\dots,d$. 而且

$$\|D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,p,d,N}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\quad\forall\, l=1,\dots,d. \tag{1.4}$$

注 1.3　设 $1\le\alpha<d$. 由 (1.3) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\|\nabla(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)\|_{L^{\frac{d}{d-\alpha}}(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,d,N}\|\mathscr{K}_{\alpha-1,N}f\|_{L^{\frac{d}{d-\alpha}}(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,d,N}\|f\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,d,N}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

这表明 $f\mapsto|\nabla(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)|$ 是从 $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^{\frac{d}{d-\alpha}}(\mathbb{R}^d)$ 的有界算子, 其中 $1\le\alpha<d$.

定理 1.4　$\mathscr{K}_N$ 是非齐次 Triebel–Lizorkin 空间 $F_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和非齐次 Besov 空间 $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 上的有界连续算子, 其中 $0<s<1$, $1<p,q<\infty$.

注 1.5　定理 1.4 受到了 Korry [16], Luiro [29] 以及 Liu 和 Wu [27] 等人的影响. 2002 年, Korry [16] 证明了中心 Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathscr{M}$ (对应于 $\mathscr{M}_\alpha$ 中 $\alpha=0$ 情形) 是 $F_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子, 其中 $0<s<1$, $1<p,q<\infty$. 目前, Luiro [29] 以及 Liu 和 Wu [27] 分别建立了 $\mathscr{M}$ 在 $F_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 上的连续性, 其中 $0<s<1$, $1<p,q<\infty$.

我们用 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 表示由 Bessel 位势定义的分数次 Sobolev 空间. 由于 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)=F_s^{p,2}(\mathbb{R}^d)$ 对任意 $s>0$ 和 $1<p<\infty$ 都成立以及 $W^{0,p}(\mathbb{R}^d)=L^p(\mathbb{R}^d)$. 因此定理 1.1 和 1.4 直接暗示下面的推论:

推论 1.6　算子 $\mathscr{K}_N$ 是 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ 上的有界连续算子, 其中 $0\le s\le1$, $1<p<\infty$.

1.2 离散背景

本文另一个目的是研究离散型中心分数次 Kakeya 极大算子的正则性. 设 $0\le\alpha<d$ 和 $f:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ 是一个离散函数, 定义离散中心分数次 Kakeya 极大算子 $K_{\alpha,N}$ 如下:

$$K_{\alpha,N}f(\vec{n})=\sup_{r>0}\frac{1}{N(R_{r,N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r,N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|f(\vec{k})|,$$

其中 $N(R_{r,N}(\vec{n}))$ 表示集合 $R_{r,N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d$ 中的元素个数. 当 $\alpha=0$ 时, 算子 $K_{\alpha,N}$ 退化为离散中心 Kakeya 极大算子 K_N. 观察知

$$\chi_{(0,1]}(r)+(2[r-1]+1)^{d-1}(2[Nr-1]+1)\chi_{(1,\infty)}(r)\le N(R_{r,N}(\vec{n}))\le(2[r]+1)^{d-1}(2[Nr]+1), \tag{1.5}$$

其中 $[x]=\max\{k\in\mathbb{Z};\,k\le x\}$. 由文 [31] 知

$$c_d(r-\sqrt{d}/2)^d\le N(B_r(\vec{n}))\le c_d(r+\sqrt{d}/2)^d,\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d \text{ 和 } r>\sqrt{d}/2, \tag{1.6}$$

其中 $c_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)d}$. 由 (1.5) 和 (1.6) 知

$$N(R_{r,N}(\vec{n})) \sim_{d,N} N(B_r(\vec{n})), \quad \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^d.$$

从而

$$K_{\alpha,N} f(\vec{n}) \sim_{\alpha,d,N} M_\alpha f(\vec{n}), \quad \forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d, \tag{1.7}$$

其中 M_α $(0 \le \alpha < d)$ 是离散中心分数次极大算子, 其定义为

$$M_\alpha f(\vec{n}) = \sup_{r>0} \frac{1}{N(B_r(\vec{n}))^{1-\alpha/d}} \sum_{\vec{k} \in B_r(\vec{n}) \cap \mathbb{Z}^d} |f(\vec{k})|.$$

(1.7) 结合 M_α 的 $\ell^p \to \ell^q$ 有界性可得 $K_{\alpha,N} : \ell^p(\mathbb{Z}^d) \to \ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 是有界的, 其中 $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < d/p$, $q = dp/(d - \alpha p)$.

目前离散极大算子的正则性也吸引了众多学者的关注 [2, 5, 6, 19, 23, 26, 30, 34]. 我们首先回忆一些定义、记号和相关背景. 一般地, 用 $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 中的向量. 任取一个离散函数 $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, 其 $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$- 范数 $(1 \le p < \infty)$ 定义为 $\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} = (\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} |f(\vec{n})|^p)^{1/p}$, 其 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$-范数定义为 $\|f\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} = \sup_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} |f(\vec{n})|$. 形式上, 定义离散情形的 Sobolev 空间为

$$W^{1,p}(\mathbb{Z}^d) := \{f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \mid \ \|f\|_{1,p} = \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|\nabla f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty\},$$

其中 $\nabla f = (D_1 f(\vec{n}), \dots, D_d f(\vec{n}))$ 是离散函数 f 的梯度, $D_l f(\vec{n}) = f(\vec{n} + e_l) - f(\vec{n})$ 表示 f 的偏导数. 这里 $e_l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 是第 l 次基本向量, $l = 1, 2, \dots, d$. 观察知

$$\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \le \|f\|_{1,p} \le (2d+1)\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}, \quad \forall 1 \le p \le \infty. \tag{1.8}$$

这表明离散型 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ 具有等价范数.

根据 (1.8) 和 $K_{\alpha,N}$ 的有界性容易知道 $K_{\alpha,N}$ 是从 $W^{1,p}(\mathbb{Z}^d)$ 到 $W^{1,q}(\mathbb{Z}^d)$ 的有界连续算子, 其中 $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < d/p$, $q = dp/(d - \alpha p)$. 当 $p = 1$ 时, 我们建立如下结果.

定理 1.7 设 $d \ge 2$ 和 $0 \le \alpha < d$. 令 $q \ge 1$ 满足 $q > d/(d - \alpha + \beta)$ 和 $0 \le \beta \le 1$, 则算子 $f \mapsto |\nabla(K_{\alpha,N} f)|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 的有界连续算子. 而且

$$\|\nabla(K_{\alpha,N} f)\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \lesssim_{\alpha,d,\beta,q} N^{1/q} \|f\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)} \|\nabla f\|^{1-\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}, \quad \forall f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d).$$

作为定理 1.7 的直接推论, 有

推论 1.8 设 $0 \le \alpha < 1$, 则算子 $f \mapsto |\nabla(K_{\alpha,N} f)|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 的有界连续算子. 而且

$$\|\nabla(K_{\alpha,N} f)\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)} \lesssim_{\alpha,d,q} N \|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}, \quad \forall f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d).$$

本文第 2 节介绍辅助引理, 用于证明定理 1.1 的连续性. 第 3 节证明定理 1.1, 1.2 和 1.4. 第 4 节证明定理 1.7. 定理 1.1 的有界性证明与连续性证明分别受到了文 [13, 28] 的启发. 尽管定理 1.2 的结果类似于文 [15, 定理 3.1], 但是我们的证明比文 [15] 的证明更简单直接. 定理 1.7 的证明受到了文 [6] 的启发, 但我们的证明方法和技巧有点与文 [6] 不同. 特别地, 文 [6, 定理 3] 的连续性证明高度依赖于文 [3] 的 Brezis–Lieb 引理和离散情形的 Luiro 引理 (见文 [6, 引理 4, 5]), 然而, 在我们的证明中这些引理是不需要的.

贯穿全文, 如果存在一个常数 $c > 0$ 只依赖于 ϑ, 使得 $A \le cB$, 此时记 $A \lesssim_\vartheta B$ 或 $B \gtrsim_\vartheta A$; 如果 $A \lesssim_\vartheta B \lesssim_\vartheta A$, 则记 $A \sim_\vartheta B$.

2 辅助引理

本节给出一些辅助引理, 它们将在定理 1.1 的连续性结果证明中扮演重要角色.

引理 2.1 (Kakeya 极大函数的 Lebesgue 微分定理)　设 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, 则

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|R_{r,N}(x)|} \int_{R_{r,N}(x)} f(y)dy = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

从而对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$, 都有 $|f|(x) \le \mathscr{K}_N f(x)$ 成立.

证明　要证明引理 2.1, 只需证

$$\limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|R_{r,N}(x)|} \int_{R_{r,N}(x)} f(y)dy - f(x) \right| = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

众所周知, 存在函数列 $f_k \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$, 使得当 $k \to \infty$ 时, 函数列 $\{f_k\}$ 以 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛于 f. 由 $\mathscr{K}_N$ 的 L^p 有界性知, 当 $k \to \infty$ 时, 有 $\|\mathscr{K}_N(f_k - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. 从而存在 $\{f_k\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ 满足对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$, 当 $k \to \infty$ 时, 都有 $|f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0$ 和 $\mathscr{K}_N(f_{n_k} - f)(x) \to 0$ 成立. 给定 $k \ge 1$, 有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|R_{r,N}(x)|} \int_{R_{r,N}(x)} f(y)dy - f(x) \right| \\
&\quad \le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|R_{r,N}(x)|} \int_{R_{r,N}(x)} |f(y) - f_{n_k}(y)|dy \\
&\qquad + \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|R_{r,N}(x)|} \int_{R_{r,N}(x)} |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)|dy + |f_{n_k}(x) - f(x)| \\
&\quad \le \mathscr{K}_N(f_{n_k} - f)(x) + \limsup_{r\to 0} \sup_{y \in R_{r,N}(x)} |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)|.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

由 f_{n_k} 的一致连续性知

$$\limsup_{r\to 0} \sup_{y \in R_{r,N}(x)} |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| \le \limsup_{r\to 0} \sup_{y \in B_{(d+N)r}(x)} |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| = 0.$$

上述式子结合 (2.2) 可得 (2.1). 引理 2.1 得证.

以下将采用文 [28] 中的一些记号. 设 $A \subset \mathbb{R}^d$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, 定义

$$d(x, A) := \inf_{a\in A} |x - a| \ \text{ 和 } \ A_{(\lambda)} := \{x \in \mathbb{R}^d; d(x, A) \le \lambda\}, \quad \lambda \ge 0.$$

用 $\|f\|_{p,A}$ 表示函数 $f\chi_A$ 的 L^p- 范数, 其中 A 为 $\mathbb{R}^d$ 的可测子集. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. 令 $0 \le \alpha < d/p$ 和 $q = dp/(d - \alpha p)$. 对任意给定的点 $x \in \mathbb{R}^d$, 定义集合 $\mathscr{B}(f)(x)$ 如下

$$\mathscr{B}(f)(x) := \left\{ r \ge 0 : \mathscr{K}_{\alpha,N} f(x) = \limsup_{r_k \to r} \frac{1}{|R_{r_k,N}(x)|^{1-\alpha/d}} \int_{R_{r_k,N}(x)} |f(y)|dy, \, r_k > 0 \right\}.$$

定义函数 $u_{x,\alpha,f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 如下:

$$u_{x,\alpha,f}(0) := \begin{cases} |f(x)|, & \text{若 } \alpha = 0; \\ 0, & \text{若 } 0 < \alpha < d/p. \end{cases}$$

$$u_{x,\alpha,f}(r) := \frac{1}{|R_{r,N}(x)|^{1-\alpha/d}} \int_{R_{r,N}(x)} |f(y)|dy, \quad \forall\, r \in (0, \infty).$$

注意到以下事实: $u_{x,\alpha,f}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 在 $(0, \infty)$ 上连续; 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$ 在点 0 处连续. 因为 $u_{x,\alpha,f}(r) \le (Nr^d)^{-1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ 对所有 $r \in (0, \infty)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 都成立, 则 $\lim_{r\to\infty} u_{x,\alpha,f}(r) = 0$,

$\mathscr{B}(f)(x)$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 都是非空闭集, 而且

$$\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x) = u_{x,\alpha,f}(r), \quad \text{若 } r \in \mathscr{B}(f)(x) \text{ 和 } r \in (0,\infty), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x) = u_{x,\alpha,f}(0), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \in \mathscr{B}(f)(x).$$

引理 2.2 设 $1 < p < \infty$ 和 $\{f_j\}$ 以 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛到 f. 设 $0 \le \alpha < d/p$ 和 $q = dp/(d-\alpha p)$. 令 $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ 和 $\vec{0} = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^d$, 则

$$\lim_{j\to\infty} |\{x \in B_\Lambda(\vec{0}) : \mathscr{B}(f_j)(x) \not\subseteq \mathscr{B}(f)(x)_{(\lambda)}\}| = 0. \tag{2.3}$$

证明 不失一般性, 假定 $f_j \ge 0$ 和 $f \ge 0$. 设 $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ 和 $\epsilon \in (0,1)$. 由文 [28, 引理 2.2] 的证明中的类似讨论可知, 对任意 $j \ge 1$, 集合 $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \mathscr{B}(f_j)(x) \not\subseteq \mathscr{B}(f)(x)_{(\lambda)}\}$ 都是可测的. 而且对几乎处处的 $x \in B_\Lambda(\vec{0})$, 存在 $\gamma(x) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, 使得

$$u_{x,\alpha,f}(r) < \mathscr{K}_{\alpha,N}f(x) - \gamma(x)^{-1}, \quad \text{当 } d(r, \mathscr{B}(f)(x)) > \lambda \text{ 时}. \tag{2.4}$$

从而存在 $\gamma = \gamma(\lambda,\Lambda,\epsilon) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和可测集 E, 满足 $|E| < \epsilon$ 和

$$\begin{aligned} B_\Lambda(\vec{0}) &\subset \{x \in \mathbb{R}^d : u_{x,\alpha,f}(r) < \mathscr{K}_{\alpha,N}f(x) - \gamma^{-1}, \text{ 若 } d(r,\mathscr{B}(f)(x)) > \lambda\} \cup E \\ &\subset A_{1,j} \cup A_{2,j} \cup A_{3,j} \cup E, \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{1,j} &:= \{x \in \mathbb{R}^d : |\mathscr{K}_{\alpha,N}f_j(x) - \mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)| \ge (4\gamma)^{-1}\}, \\ A_{2,j} &:= \{x \in \mathbb{R}^d : |u_{x,\alpha,f_j}(r) - u_{x,\alpha,f}(r)| \ge (2\gamma)^{-1}, \text{ 对某个 } r \text{ 使得 } d(r,\mathscr{B}(f)(x)) > \lambda\}, \\ A_{3,j} &:= \{x \in \mathbb{R}^d : u_{x,\alpha,f_j}(r) < \mathscr{K}_{\alpha,N}f_j(x) - (4\gamma)^{-1}, \text{ 若 } d(r,\mathscr{B}(f)(x)) > \lambda\}. \end{aligned}$$

设 $\bar{A}$ 是所有 f_j 的 Lebesgue 点构成的集合. 显然, $|\mathbb{R}^d\backslash\bar{A}| = 0$. 不难看到, $A_{3,j} \cap \bar{A} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \mathscr{B}(f_j)(x) \subset \mathscr{B}(f)(x)_{(\lambda)}\}$. 结合 (2.5) 可得

$$\{x \in B_\Lambda(\vec{0}) : \mathscr{B}(f_j)(x) \not\subseteq \mathscr{B}(f)(x)_{(\lambda)}\} \subset A_{1,j} \cup A_{2,j} \cup E \cup (\mathbb{R}^d\backslash\bar{A}).$$

从而

$$|\{x \in B_\Lambda(\vec{0}) : \mathscr{B}(f_j)(x) \not\subseteq \mathscr{B}(f)(x)_{(\lambda)}\}| \le |A_{1,j}| + |A_{2,j}| + \epsilon. \tag{2.6}$$

因为 $\{f_j\}$ 以 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛到 f, 则存在 $N_0 = N_0(\epsilon,\gamma) \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|f_j - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \gamma^{-1}\epsilon, \quad \forall\, j \ge N_0. \tag{2.7}$$

注意到

$$\max\{|u_{x,\alpha,f_j}(r) - u_{x,\alpha,f}(r)|, |\mathscr{K}_{\alpha,N}f_j(x) - \mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)|\} \le \mathscr{K}_{\alpha,N}(f_j - f)(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.8}$$

(2.8) 结合 (2.7) 可得

$$|A_{1,j}| + |A_{2,j}| \le 2(4\gamma)^q \|\mathscr{K}_{\alpha,N}(f_j - f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q \lesssim_{\alpha,p,d,N} \gamma^q \|f_j - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^q \lesssim_{\alpha,p,d,N} \epsilon \tag{2.9}$$

对任意的 $j \ge N_0$ 都成立. 此时 (2.3) 可由 (2.6) 和 (2.9) 得到. 证毕.

对任意 $h > 0$ 和 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, 定义

$$f_h^l(x) = \frac{f_{\tau(h)}^l(x) - f(x)}{h} \quad \text{和} \quad f_{\tau(h)}^l(x) = f(x + he_l), \quad l = 1,2,\dots,d.$$

众所周知, 当 $1 < p < \infty$ 时, $f_{\tau(h)}^l$ 以 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛到 f. 当 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 时, f_h^l 以 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛到 $D_l f$ (见文 [10]).

设 A, B 是 $\mathbb{R}^d$ 中两个子集, 定义集合 A 和 B 的 Hausdorff 距离为

$$\pi(A,B):=\inf\{\delta>0: A\subset B_{(\delta)} \text{ 和 } B\subset A_{(\delta)}\}.$$

应用引理 2.2 和文 [28, 第 247 页, Remark] 中的类似讨论可得:

引理 2.3 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$. 设 $0\le\alpha<d/p$, $q=dp/(d-\alpha p)$, 则对任意的 $\Lambda>0$, $\lambda>0$ 和 $l=1,2,\dots,d$, 下面的极限成立

$$\lim_{h\to 0}|\{x\in B_\Lambda(\vec{0}):\pi(\mathscr{B}(f)(x),\mathscr{B}(f)(x+he_l))>\lambda\}|=0.$$

下面是分数次 Kakeya 极大函数的导数公式, 这是证明定理 1.1 中连续性结果的主要工具.

引理 2.4 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$. 设 $0\le\alpha<d/p$ 和 $q=dp/(d-\alpha p)$, 则对 $l=1,2,\dots,d$ 和几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^d$, 都有

$$D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)=\frac{1}{|R_{r,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r,N}(x)}D_l|f|(y)dy,\quad \forall\, r\in\mathscr{B}(f)(x)\cap(0,\infty); \tag{2.10}$$

$$D_l(\mathscr{K}_N f)(x)=D_l|f|(x),\ \text{若 } \alpha=0 \text{ 和 } 0\in\mathscr{B}(f)(x); \tag{2.11}$$

$$D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)=0,\ \text{若 } 0<\alpha<d/p \text{ 和 } 0\in\mathscr{B}(f)(x). \tag{2.12}$$

证明 不失一般性, 假定 $f\ge 0$. 因为若 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, 则有 $|f|\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. 给定 $\Lambda>0$ 和 $l=1,2,\dots,d$. 由引理 2.3 知存在一列正整数 $\{s_k\}_{k\ge1}$, 满足 $s_k\to 0$ 和 $\lim_{k\to\infty}\pi(\mathscr{B}(f)(x),\mathscr{B}(f)(x+s_ke_l))=0$, 对几乎处处的 $x\in B_\Lambda(\vec{0})$ 都成立. 而且

$$\begin{aligned}&\|f^l_{s_k}-D_lf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\to 0\ \text{ 当 } k\to\infty \text{ 时},\\ &\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(f^l_{s_k}-D_lf)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\to 0 \text{ 当 } k\to\infty \text{ 时},\\ &\|(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)^l_{s_k}-D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\to 0 \text{ 当 } k\to\infty \text{ 时}.\end{aligned}$$

由上述知存在 $\{s_k\}_{k\ge1}$ 的子列 $\{h_k\}_{k\ge1}$ 以及可测集 $A_1\subset B_\Lambda(\vec{0})$, 满足当 $k\to\infty$ 时对任意的 $x\in A_1$, 都有 $|B_\Lambda(\vec{0})\backslash A_1|=0$, $f^l_{h_k}(x)\to D_lf(x)$, $\mathscr{K}_{\alpha,N}(f^l_{h_k}-D_lf)(x)\to 0$, $(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)^l_{h_k}(x)\to D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)$; $\lim_{k\to\infty}\pi(\mathscr{B}(f)(x),\mathscr{B}(f)(x+h_ke_l))=0$.

设

$$A_2:=\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_Nf(x)=f(x) \text{ 若 } 0\in\mathscr{B}(f)(x)\};$$

$$A_3:=\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)=0 \text{ 若 } 0<\alpha<d/p \text{ 和 } 0\in\mathscr{B}(f)(x)\};$$

$$A_4:=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_Nf(x+h_ke_l)=f(x+h_ke_l) \text{ 若 } 0\in\mathscr{B}(f)(x+h_ke_l)\};$$

$$A_5:=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x+h_ke_l)=f(x+h_ke_l) \text{ 若 } 0<\alpha<d/p \text{ 和 } 0\in\mathscr{B}(f)(x+h_ke_l)\};$$

$$A_6:=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\lim_{r\to0}\frac{1}{|R_{r,N}(x)|}\int_{R_{r,N}(x)}D_lf(y)dy=D_lf(x)\right\};$$

$$A_7:=\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_Nf(x)\ge f(x)\};$$

$$A_8:=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\{x\in\mathbb{R}^d:\mathscr{K}_Nf(x+h_ke_l)\ge f(x+h_ke_l)\}.$$

根据引理 2.1 知 $|B_\Lambda(\vec{0})\backslash(\bigcap_{i=1}^8A_i)|=0$. 设 $x\in\bigcap_{i=1}^8A_i$ 和 $r\in\mathscr{B}(f)(x)$. 因为 $\lim_{k\to\infty}\pi(\mathscr{B}(f)(x),\mathscr{B}(f)(x+h_ke_l))=0$, 则存在 $r_k\in\mathscr{B}(f)(x+h_ke_l)$, 满足 $\lim_{k\to\infty}r_k=r$.

情形 A $r>0$. 不失一般性假定所有 $r_k>0$, 可得

$$\begin{aligned}D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x+h_ke_l)-\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x))\\&\le\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(u_{x+h_ke_l,\alpha,f}(r_k)-u_{x,\alpha,f}(r))\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|R_{r_k,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r_k,N}(x)}f_{h_k}^l(y)dy\\&\le\frac{1}{|R_{r_k,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r_k,N}(x)}D_lf(y)dy.\end{aligned}\tag{2.13}$$

在 (2.13) 中最后一个式子用到了 $\lim_{k\to\infty}r_k=r$, 和当 $k\to\infty$ 时 $f_{h_k}^l\chi_{R_{r_k,N}(x)}\to D_lf\chi_{R_{r,N}(x)}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中收敛. 另一方面有

$$\begin{aligned}D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x+h_ke_l)-\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x))\\&\ge\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(u_{x+h_ke_l,\alpha,f}(r)-u_{x,\alpha,f}(r))\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|R_{r,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r,N}(x)}\frac{f(y+h_ke_l)-f(y)}{h_k}dy\\&=\frac{1}{|R_{r,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{r,N}(x)}D_lf(y)dy.\end{aligned}\tag{2.14}$$

上述式子结合 (2.13) 可得 (2.10) 对几乎处处的 $x\in B_\Lambda(\vec{0})$ 都成立.

情形 B $r=0$. 当 $0<\alpha<d$ 时, 有 $\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)=0$, 从而 $\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)=0$. 因此 $f(y)=0$ 对几乎处处的 $y\in\mathbb{R}^d$ 都成立. 因此 $\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)\equiv 0$, 所以 $D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)(x)=0$. 从而 (2.12) 成立.

下证 (2.11). 若存在无穷多个 k, 使得 $r_k=0$, 则有

$$\begin{aligned}D_l(\mathscr{K}_Nf)(x)&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(\mathscr{K}_Nf(x+h_ke_l)-\mathscr{K}_Nf(x))\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(f(x+h_ke_l)-f(x))=D_lf(x).\end{aligned}\tag{2.15}$$

如果存在 $k_0\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, 使得当 $k\ge k_0$ 时, 都有 $r_k>0$, 则由 (2.13) 可得

$$\begin{aligned}D_l(\mathscr{K}_Nf)(x)&\le\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|R_{r_k,N}(x)|}\int_{R_{r_k,N}(x)}f_{h_k}^l(y)dy\\&\le\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|R_{r_k,N}(x)|}\int_{R_{r_k,N}(x)}D_lf(y)dy+\lim_{k\to\infty}\mathscr{K}_N(f_{h_k}^l-D_lf)(x)\\&=D_lf(x).\end{aligned}\tag{2.16}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}D_l(\mathscr{K}_Nf)(x)&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(\mathscr{K}_Nf(x+h_ke_l)-\mathscr{K}_Nf(x))\\&\ge\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}(f(x+h_ke_l)-f(x))=D_lf(x).\end{aligned}\tag{2.17}$$

(2.17) 结合 (2.16) 可得 (2.15) 对于该情形成立. 因此 (2.11) 对于几乎处处的 $x\in B_\Lambda(\vec{0})$ 都成立. 因为 Λ 是任意的, 这完成了引理 2.4 的证明.

3 定理 1.1, 1.2 及 1.4 的证明

定理 1.1 的证明 对定理 1.1 的证明分为以下两个部分:

第 1 步 证明有界性. 我们将用文 [13, 定理 1.4] 的证明思想来证明 (1.2) 式. 将所有有理数排成一列 $\{s_k\}_{k\geq 1}$, 则有

$$\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)=\sup_{k\geq 1}\frac{1}{|R_{s_k,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{s_k,N}(x)}|f(y)|dy. \tag{3.1}$$

定义算子 $\{T_k\}_{k\geq 1}$ 如下:

$$T_kf(x)=\max_{1\leq i\leq k}\frac{1}{|R_{s_i,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{s_i,N}(x)}|f(y)|dy.$$

显然

$$|T_kf(x+h)-T_kf(x)|\leq \max_{1\leq i\leq k}\frac{1}{|R_{s_i,N}(x)|^{1-\alpha/d}}\int_{R_{s_i,N}(x)}|f(y+h)-f(y)|dy,\quad \forall\, h\in\mathbb{R}^d.$$

从而

$$|D_l(T_kf)(x)|\leq T_k(D_lf)(x)\leq \mathscr{K}_{\alpha,N}(D_lf)(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

由此可知, 对任意的 $k\geq 1$, 都有

$$\begin{aligned}\|T_kf\|_{1,q}&\leq \|T_kf\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}+\|D_l(T_kf)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\\&\leq \|\mathscr{K}_{\alpha,N}f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}+\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_lf)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,p}\|f\|_{1,p}.\end{aligned}$$

这表明 $\{T_kf\}_{k\geq 1}$ 为 $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ 中的递增有界序列且逐点收敛到 $\mathscr{K}_{\alpha,N}f$. 由 Sobolev 空间的弱紧收敛性知 $\{D_l(T_kf)\}_k$ 在 $L^q(\mathbb{R}^d)$ 中弱收敛到 $D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)$. 结合 (3.2) 可得 (1.2) 式, 对于 $i=l$ 成立, 从而 $\mathscr{K}_{\alpha,N}:W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\to W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ 的有界性可由 (1.2) 以及 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 的 $L^p\to L^q$ 有界性得到.

第 2 步 证明连续性. 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$ 和 $\{f_j\}$ 以 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 范数收敛到 f. 设 $0<\alpha<d/p$ 和 $q=pd/(d-\alpha p)$. 不失一般性假定所有 $f_j\geq 0$ 和 $f\geq 0$. 显然

$$\|\mathscr{K}_{\alpha,N}f_j-\mathscr{K}_{\alpha,N}f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\leq \|\mathscr{K}_{\alpha,N}(f_j-f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{\alpha,p,d,N}\|f_j-f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\to 0,\ \text{当 } j\to\infty.$$

因此, 只要证

$$\|D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f_j)-D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N}f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\to 0,\ \text{当 } j\to\infty,\quad \forall\, l=1,\ldots,d. \tag{3.3}$$

给定 $l\in\{1,2,\ldots,d\}$ 和 $\epsilon>0$, 存在 $\Lambda>0$, 使得 $\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_lf)\|_{q,B_1}<\epsilon$, 其中 $B_1=\mathbb{R}^d\backslash B_\Lambda(\vec{0})$. 由积分的绝对连续性知存在 $\eta>0$, 使得只要 $|A|<\eta$ 就有 $\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_lf)\|_{q,A}<\epsilon$, 其中 A 为 $B_\Lambda(\vec{0})$ 的可测子集. 如前所示, 可知对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^d$, 函数 u_{x,α,D_lf} 在 $[0,\infty)$ 上一致连续. 因此存在 $\delta_x>0$, 使得

$$|u_{x,\alpha,D_lf}(r_1)-u_{x,\alpha,D_lf}(r_2)|<|B_\Lambda(\vec{0})|^{-1/q}\epsilon,\ \text{当 } |r_1-r_2|<\delta_x.$$

此时存在一个零测集 $\mathscr{N}$, 使得

$$B_\Lambda(\vec{0})=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{x\in B_\Lambda(\vec{0}):\delta(x)>\frac{1}{i}\right\}\right)\cup\mathscr{N}.$$

由上可知存在 $\delta>0$, 使得

$$\begin{aligned}&|\{x\in B_\Lambda(\vec{0}):|u_{x,\alpha,D_lf}(r_1)-u_{x,\alpha,D_lf}(r_2)|\geq|B_\Lambda(\vec{0})|^{-1/q}\epsilon\ \text{ 对某个 } r_1, r_2 \text{ 满足 } |r_1-r_2|<\delta\}|\\&\quad=:|B_2|<\frac{\eta}{2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由引理 2.2 知存在 $j_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|\{x \in B_\Lambda(\vec{0}); \mathscr{B}(f_j)(x) \not\subseteq \mathscr{B}(f)(x)_{(\delta)}\}| =: |B^j| < \frac{\eta}{2}, \quad \forall j \geq j_1. \tag{3.5}$$

注意到 $\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f_j - D_l f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{\alpha,p,d,N} \|D_l f_j - D_l f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. 从而存在 $j_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f_j - D_l f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon, \quad \forall j \geq j_2. \tag{3.6}$$

由引理 2.4 知, 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$ 以及所有的 $j \geq j_1$, 都有当 $r_1 \in \mathscr{B}(f_j)(x)$ 和 $r_2 \in \mathscr{B}(f)(x)$ 时, 下式成立:

$$\begin{aligned}|D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N} f_j)(x) - D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N} f)(x)| &= |u_{x,\alpha,D_l f_j}(r_1) - u_{x,\alpha,D_l f}(r_2)| \\ &\leq |u_{x,\alpha,D_l f_j}(r_1) - u_{x,\alpha,D_l f}(r_1)| + |u_{x,\alpha,D_l f}(r_1) - u_{x,\alpha,D_l f}(r_2)| \\ &\leq \mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f_j - D_l f)(x) + 2\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f)(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

若 $x \notin B_1 \cup B_2 \cup B^j$, 可选取 $r_1 \in \mathscr{B}(f_j)(x)$ 和 $r_2 \in \mathscr{B}(f)(x)$, 使得 $|r_1 - r_2| < \delta$ 和

$$|u_{x,\alpha,D_l f}(r_1) - u_{x,\alpha,D_l f}(r_2)| < |B_\Lambda(\vec{0})|^{-1/q}\epsilon.$$

注意到, 由 (3.4) 和 (3.5) 知对所有的 $j \geq j_1$, 都有 $|B_2 \cup B^j| < \eta$. 由 (3.6) 和 (3.7) 知, 当 $j \geq \max\{j_1, j_2\}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N} f_j) - D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N} f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f_j - D_l f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} + \|2\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f)\|_{q,B_1} \\ &\quad + \|2\mathscr{K}_{\alpha,N}(D_l f)\|_{q,B_2 \cup B^j} + \||B_\Lambda(\vec{0})|^{-1/q}\epsilon\|_{q,B_\Lambda(\vec{0})} \\ &\leq 6\epsilon.\end{aligned}$$

上述式子给出 (3.3). 定理 1.1 得证.

定理 1.2 的证明 由定理 1.1 知 $\mathscr{K}_{\alpha,N} \in W^{1,q_1}(\mathbb{R}^d)$, 其中 $q_1 = dp/(d-\alpha p)$. 因此, $(\mathscr{K}_{\alpha,N} f)_h^l \to D_l(\mathscr{K}_{\alpha,N} f)$ 在 $L^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ 中, 当 $h \to 0$ 对所有的 $1 \leq l \leq d$ (见文 [10]). 给定 $1 \leq l \leq d$, 存在一列正整数 $\{h_k\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ 和

$$D_l \mathscr{K}_{\alpha,N} f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathscr{K}_{\alpha,N} f(x + h_k e_l) - \mathscr{K}_{\alpha,N} f(x)}{h_k} \tag{3.8}$$

对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$ 都成立. 给定 $x \in \mathbb{R}^d$, 使得 (3.8) 对所有 $k \geq 1$ 成立. 根据 $\mathscr{K}_{\alpha,N} f(x + h_k e_l)$ 的定义, 存在一列正整数 $\{r_j\}_{j\geq 1}$, 使得

$$\mathscr{K}_{\alpha,N} f(x + h_k e_l) \leq \frac{1}{|R_{r_j,N}(x + h_k e_l)|^{1-\alpha/d}} \int_{R_{r_j,N}(x+h_k e_l)} |f(y)| dy + \frac{1}{j}.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{\alpha,N} f(x + h_k e_l) - \mathscr{K}_{\alpha,N} f(x) &\leq \frac{1}{|R_{r_j,N}(x + h_k e_l)|^{1-\alpha/d}} \int_{R_{r_j,N}(x+h_k e_l)} |f(y)| dy \\ &\quad - \frac{1}{|R_{r_j+h_k,N}(x)|^{1-\alpha/d}} \int_{R_{r_j+h_k,N}(x)} |f(y)| dy + \frac{1}{j} \\ &\leq N^{\alpha/d-1}(r_j^{\alpha-d} - (r_j + h_k)^{\alpha-d}) \int_{R_{r_j+h_k,N}(x)} |f(y)| dy + \frac{1}{j} \\ &\leq (d-\alpha) N^{\alpha/d-1} r_j^{\alpha-d-1} h_k \int_{R_{r_j+h_k,N}(x)} |f(y)| dy + \frac{1}{j} \\ &\leq (d-\alpha) N^{1/d} h_k \left(1 + \frac{h_k}{r_j}\right)^{d+1-\alpha} \mathscr{K}_{\alpha-1,N} f(x) + \frac{1}{j}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

可选取足够大的 j, 使得 $jh_k \ge k$. 此时, 由 (3.9) 知

$$\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x+h_ke_l)-\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)\le(d-\alpha)N^{1/d}h_k(1+h_k)^{d+1-\alpha}\mathscr{K}_{\alpha-1,N}f(x)+\frac{h_k}{k}.$$

上述式子结合 (3.8), 可得

$$|D_l\mathscr{K}_{\alpha,N}f(x)|\le\lim_{k\to\infty}(d-\alpha)N^{1/d}(1+h_k)^{d+1-\alpha}\mathscr{K}_{\alpha-1,N}f(x)+\frac{1}{k}=(d-\alpha)N^{1/d}\mathscr{K}_{\alpha-1,N}f(x).$$

这证得了 (1.3) 式. (1.3) 结合 $\mathscr{K}_{\alpha,N}$ 的 $L^p\to L^q$ 有界性可得 (1.4).

定理 1.4 的证明 由文 [35, 引理 2.2] 知

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\mathscr{M}f_{j,\zeta}\|^q_{L^r(\mathfrak{R}_d)}\bigg)^{1/q}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le C\bigg\|\bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|f_{j,\zeta}\|^q_{L^r(\mathfrak{R}_d)}\bigg)^{1/q}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\tag{3.10}$$

对所有的 $1<p,q,r<\infty$ 都成立, 其中 $\mathfrak{R}_d=\{\zeta\in\mathbb{R}^d;1/2<|\zeta|\le1\}$. (3.10) 结合事实 $\mathscr{K}_Nf\le C(d)N^{d-1}\mathscr{M}f$, 可得

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\mathscr{K}_Nf_{j,\zeta}\|^q_{L^r(\mathfrak{R}_d)}\bigg)^{1/q}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le C\bigg\|\bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|f_{j,\zeta}\|^q_{L^r(\mathfrak{R}_d)}\bigg)^{1/q}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\tag{3.11}$$

对所有的 $1<p,q,r<\infty$ 都成立. 另一方面, 容易验证

$$\Delta_\zeta(\mathscr{K}_Nf)(x)\le\mathscr{K}_N(\Delta_\zeta f)(x),\quad\forall\,x,\,\zeta\in\mathbb{R}^d\tag{3.12}$$

和

$$|\mathscr{K}_Nf-\mathscr{K}_Ng|\le\mathscr{K}_N(f-g)\tag{3.13}$$

对任意定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数 f,g 都成立. 其中 $\Delta_\zeta f(x)=f(x+\zeta)-f(x)$. 由 (3.11)–(3.13) 以及文 [27, 定理 1 和 3] 的证明中的类似讨论可得定理 1.4.

4 定理 1.7 的证明

定理 1.7 的证明可分为以下两个部分:

第 1 步 有界性的证明. 设 $q\ge1$ 满足 $q>d/(d-\alpha+\beta)$ 和 $0\le\beta\le1$. 设 $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$. 不失一般性, 假定 $f\ge0$. 要证

$$\|D_l(K_{\alpha,N}f)\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|D_lf\|^{(1-\beta)q}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f\|^{\beta q}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\tag{4.1}$$

对所有的 $1\le l\le d$ 都成立. 我们下证 (4.1) 对 $l=d$ 成立即可, 其它情形类似讨论. 令 $\vec{n}=(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 其中 $n'=(n_1,\dots,n_{d-1})\in\mathbb{Z}^{d-1}$. 对每个 $n'\in\mathbb{Z}^{d-1}$, 令

$$\begin{aligned}X_{n'}&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f(n',n_d+1)=K_{\alpha,N}f(n',n_d)\},\\X^+_{n'}&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f(n',n_d+1)<K_{\alpha,N}f(n',n_d)\},\\X^-_{n'}&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f(n',n_d+1)>K_{\alpha,N}f(n',n_d)\}.\end{aligned}$$

此时可写

$$\begin{aligned}\|D_d(K_{\alpha,N}f)\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}(K_{\alpha,N}f(n',n_d)-K_{\alpha,N}f(n',n_d+1))^q\\&+\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^-_{n'}}(K_{\alpha,N}f(n',n_d+1)-K_{\alpha,N}f(n',n_d))^q.\end{aligned}$$

因此要证 (4.1), 只需证

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^+}(K_{\alpha,N}f(n',n_d)-K_{\alpha,N}f(n',n_d+1))^q\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(1-\beta)q}\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{\beta q};\tag{4.2}$$

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^-}(K_{\alpha,N}f(n',n_d+1)-K_{\alpha,N}f(n',n_d))^q\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(1-\beta)q}\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{\beta q}.\tag{4.3}$$

接下来只证 (4.2), (4.3) 的证明类似. 设 $r>0$, 定义函数 $\mathscr{A}_r(f):\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ 如下

$$\mathscr{A}_r(f)(\vec{n})=\frac{1}{N(R_{r,N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r,N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k}),\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.$$

因为 $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 则 $\lim_{r\to\infty}\mathscr{A}_r(f)(\vec{n})=0$. 从而对每个 $\vec{n}=(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 其中 $n_d\in X_{n'}^+$, 存在 $r(\vec{n})>0$, 使得 $K_{\alpha,N}f(\vec{n})=\mathscr{A}_{r(\vec{n})}(f)(\vec{n})$. 因此可得

$$\begin{aligned}K_{\alpha,N}f(\vec{n})-K_{\alpha,N}f(\vec{n}+e_d)&\le\mathscr{A}_{r(\vec{n})}(f)(\vec{n})-\mathscr{A}_{r(\vec{n})}(f)(\vec{n}+e_d)\\&=\frac{1}{N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\\&\quad-\frac{1}{N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}+e_d))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}+e_d)\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\\&\le\frac{1}{N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|.\end{aligned}\tag{4.4}$$

另一方面有

$$\begin{aligned}K_{\alpha,N}f(\vec{n}+e_d)&\ge\frac{1}{N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}+e_d))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}+e_d)\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\\&\ge\frac{1}{N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\\&\ge\frac{N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))}{N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))}\mathscr{A}_{r(\vec{n})}(f)(\vec{n}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&K_{\alpha,N}f(\vec{n})-K_{\alpha,N}f(\vec{n}+e_d)\\&\quad\le(N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1})N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{\alpha/d}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

(4.5) 结合 (4.4), 可进一步得

$$\begin{aligned}&(K_{\alpha,N}f(\vec{n})-K_{\alpha,N}f(\vec{n}+e_d))^q\\&\quad\le\bigg(\frac{1}{N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{1-\alpha/d}}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\bigg)^{q(1-\beta)}\\&\qquad\times\bigg((N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1})N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{\alpha/d}\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\bigg)^{q\beta}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

通过精细的计算可得

$$\begin{aligned}
&N(R_{r,N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1}\\
&\quad\le \chi_{(0,\frac{1}{N}]}(r)+\gamma(2Nr-1)^{-2}\chi_{(\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}]}(r)+2(d-1)\left[r+\frac{1}{N}\right](2[Nr]-1)^{-1}\chi_{(1-\frac{1}{N},1]}(r)\\
&\qquad+(d-1)N^{-1}r^{-d-1}\chi_{(1,\infty)}(r)\\
&\quad\le \chi_{(0,\frac{1}{N}]}(r)+N^{-2}r^{-2}\chi_{(\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}]}(r)+2^4(d-1)N^{-1}\chi_{(1-\frac{1}{N},1]}(r)+(d-1)N^{-1}r^{-d-1}\chi_{(1,\infty)}(r).
\end{aligned}$$

上述式子结合 (1.6) 可得

$$\begin{aligned}
&N(R_{r,N}(\vec{n}))(N(R_{r,N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1})\\
&\quad\le (2[r]+1)^{d-1}(2[Nr]+1)(\chi_{(0,\frac{1}{N}]}(r)+N^{-2}r^{-2}\chi_{(\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}]}(r)+2^4(d-1)N^{-1}\chi_{(1-\frac{1}{N},1]}(r)\\
&\qquad+(d-1)N^{-1}r^{-d-1}\chi_{(1,\infty)}(r))\\
&\quad\le \chi_{(0,\frac{1}{N}]}(r)+3(Nr)^{-1}\chi_{(\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}]}(r)+2^6dr\chi_{(1-\frac{1}{N},1]}(r)+3^d(d-1)r^{-1}\chi_{(1,\infty)}(r)\\
&\quad\le 2^6(d-1)\chi_{(0,1]}(r)+3^d(d-1)r^{-1}\chi_{(1,\infty)}(r).
\end{aligned}\tag{4.7}$$

容易验证

$$\begin{aligned}
N(R_{r,N}(\vec{n}))&\ge \chi_{(0,1]}(r)+(2[r-1]+1)^{d-1}(2[Nr-1]+1)\chi_{(1,\infty)}(r)\\
&\ge \chi_{(0,1]}(r)+2^{-(d+1)}Nr^d\chi_{(1,\infty)}(r).
\end{aligned}\tag{4.8}$$

(4.8) 结合 (4.7), 可得

$$\begin{aligned}
&N(R_{r,N}(\vec{n}))^{(\alpha/d-1)q}(N(R_{r,N}(\vec{n}))(N(R_{r,N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1}))^{q\beta}\\
&\quad\le (\chi_{(0,1]}(r)+2^{-(d+1)}Nr^d\chi_{(1,\infty)}(r))^{(\alpha/d-1)q}(2^6(d-1)\chi_{(0,1]}(r)+3^d(d-1)r^{-1}\chi_{(1,\infty)}(r))^{q\beta}\\
&\quad\le (2^6(d-1))^{q\beta}\chi_{(0,1]}(r)+2^{(d+1)(1-\alpha/d)q}2^{qd\beta}(d-1)^{q\beta}N^{(\alpha/d-1)q}r^{-q(d+\beta-\alpha)}\chi_{(1,\infty)}(r)\\
&\quad=: F(r).
\end{aligned}\tag{4.9}$$

(4.9) 结合 (4.6), 可得

$$\begin{aligned}
&(K_{\alpha,N}f(\vec{n})-K_{\alpha,N}f(\vec{n}+e_d))^q\\
&\quad\le \|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)}\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta}\Bigg(\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\Bigg)^{(1-\beta)}\Bigg(\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\Bigg)^{\beta}\\
&\qquad\times N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{(\alpha/d-1)q}(N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))(N(R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n}))^{-1}-N(R_{r(\vec{n})+\frac{1}{N},N}(\vec{n}))^{-1}))^{q\beta}\\
&\quad\le F(r(\vec{n}))\|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)}\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta}\Bigg(\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\Bigg)^{(1-\beta)}\Bigg(\sum_{\vec{k}\in R_{r(\vec{n}),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\Bigg)^{\beta}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

由 (4.10) 以及关于指标 $p=\frac{1}{1-\beta}$ 和 $p'=\frac{1}{\beta}$ 的 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^+}(K_{\alpha,N}f(n',n_d)-K_{\alpha,N}f(n',n_d+1))^q\\
&\quad\le \|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)}\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta}\Bigg(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^+}F(r(n',n_d)\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\Bigg)^{1-\beta}\\
&\qquad\times\Bigg(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^+}F(r(n',n_d)\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\Bigg)^{\beta}.
\end{aligned}\tag{4.11}$$

显然

$$\begin{aligned}&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{+}}F(r(n',n_d))\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\\&\quad\le\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d}|D_df_\mu(\vec{k})|\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{R_{r(\vec{n}),N}(\vec{k})\}}(\vec{n}).\end{aligned}\tag{4.12}$$

给定 $\vec{k}\in\mathbb{Z}^d$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{R_{r(\vec{n})),N}(\vec{k})}(\vec{n})\\&\quad\le\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}<r(\vec{n})\}}(r(\vec{n}))\\&\quad\le\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(r(\vec{n}))\chi_{(0,1]}(r(\vec{n}))\\&\qquad+\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(r(\vec{n}))\chi_{(1,\infty)}(r(\vec{n}))\\&\qquad+\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{1<\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}<r(\vec{n})\}}(r(\vec{n})).\end{aligned}\tag{4.13}$$

由 (1.7) 知

$$\begin{aligned}&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(r(\vec{n}))\chi_{(0,1]}(r(\vec{n}))\\&\quad\le(2^6(d-1))^{q\beta}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(\vec{n})\lesssim_{\beta,q,d}N.\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(r(\vec{n}))\chi_{(1,\infty)}(r(\vec{n}))\\&\quad\le2^{(d+1)(1-\frac{\alpha}{d})q}2^{qd\beta}(d-1)^{q\beta}N^{(\frac{\alpha}{d}-1)q}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\chi_{\{\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}\le1\}}(\vec{n})\\&\quad\lesssim_{\beta,q,d}N.\end{aligned}\tag{4.15}$$

因为 $q(d+\beta-\alpha)>d$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{\{1<\max\{|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\}<r(\vec{n})\}}(r(\vec{n}))\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,q}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\left(\max\left\{1,|n_1-k_1|,\dots,|n_{d-1}-k_{d-1}|,\frac{|n_d-k_d|}{N}\right\}\right)^{-q(d+\beta-\alpha)}\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,q}\left(\prod_{i=1}^{d-1}\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}(\max\{1,|n_i|\})^{-(1+\gamma)}\right)\sum_{n_d\in\mathbb{Z}}\left(\max\left\{1,\frac{|n_d|}{N}\right\}\right)^{-q(d+\beta-\alpha)}\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N.\end{aligned}\tag{4.16}$$

由 (4.13)–(4.16) 知

$$\sup_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r(\vec{n}))\chi_{R_{r(\vec{n})),N}(\vec{k})}(\vec{n})\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N.\tag{4.17}$$

(4.17) 结合 (4.12) 可得

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{+}}F(r(n',n_d))\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df(\vec{k})|\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|D_df\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{4.18}$$

类似可证

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^+}F(r(n',n_d)\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}f(\vec{k})\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}. \tag{4.19}$$

故 (4.2) 可由 (4.11), (4.18) 和 (4.19) 得到.

第 2 步 连续性的证明. 设 $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\{f_j\}$ 以 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 范数收敛到 f. 因为 $||f_j|-|f||\le |f_j-f|$, 可假定所有 $f_j\ge 0$ 和 $f\ge 0$. 充分要证

$$\lim_{j\to\infty}\|D_l(K_{\alpha,N}f_j)-D_l(K_{\alpha,N}f)\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=0 \tag{4.20}$$

对每个 $l=1,2,\dots,d$ 都成立. 只需证 (4.20) 对 $l=d$ 成立即可, 其它情形可类似讨论. 容易验证

$$|K_{\alpha,N}f_j(\vec{n})-K_{\alpha,N}f(\vec{n})|\le K_{\alpha,N}(f_j-f)(\vec{n})\le\|f_j-f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)},\quad \forall\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.$$

由此可得 $K_{\alpha,N}f_j(\vec{n})$ 逐点收敛到 $K_{\alpha,N}f(\vec{n})$, 且有

$$D_d(K_{\alpha,N}f_j)(\vec{n})\to D_d(K_{\alpha,N}f)(\vec{n})\ \ 当\ \ j\to\infty,\quad\forall\vec{n}\in\mathbb{Z}^d. \tag{4.21}$$

由第 1 部分的有界性结果知 $D_d(K_{\alpha,N}f)\in\ell^q(\mathbb{Z}^d)$. 任给 $\epsilon\in(0,1)$, 存在 $\Lambda>N+\sqrt{d}$, 使得 $\max\{\|D_d(K_{\alpha,N}f)\chi_{\{|\vec{n}|\ge3\Lambda\}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)},\|f\chi_{\{|\vec{n}|\ge\Lambda\}}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\}<\epsilon$ 和 $\Lambda^{d-q(d+\beta-\alpha)}<\epsilon$. 由 (4.21) 知存在 $N_1=N_1(\epsilon,\Lambda)>0$, 使得

$$|D_d(K_{\alpha,N}f_j)(\vec{n})-D_d(K_{\alpha,N}f)(\vec{n})|\le\frac{\epsilon}{(N(B_{3\Lambda}(\vec{0})))^{1/q}},\quad\forall j\ge N_1\ 和\ \ \|\vec{n}\|\le3\Lambda.$$

结果

$$\begin{aligned}\|D_d(K_{\alpha,N}f_j)-D_d(K_{\alpha,N}f)\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}&\le\|(D_d(K_{\alpha,N}f_j)-D_d(K_{\alpha,N}f))\chi_{\{|\vec{n}|\le3\Lambda\}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad+\|(D_d(K_{\alpha,N}f_j)-D_d(K_{\alpha,N}f))\chi_{\{|\vec{n}|>3\Lambda\}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\le2\epsilon+\|D_d(K_{\alpha,N}f_j)\chi_{\{|\vec{n}|>3\Lambda\}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)},\quad\forall j\ge N_1.\end{aligned} \tag{4.22}$$

对上述 $\epsilon\in(0,1)$, 存在 $N_2=N_2(\epsilon)>0$, 使得

$$\|f_j-f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}<\epsilon\ 和\ \|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\le\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+1,\quad\forall j\ge N_2. \tag{4.23}$$

可记

$$\begin{aligned}\|D_d(K_{\alpha,N}f_j)\chi_{\{|\vec{n}|>3\Lambda\}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q&\le\sum_{|n'|\ge2\Lambda}\sum_{n_d\in\mathbb{Z}}|D_d(K_{\alpha,N}f_j)(\vec{n})|^q+\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|n_d|\ge2\Lambda}|D_d(K_{\alpha,N}f_j)(\vec{n})|^q\\&=:A_{1,j}+A_{2,j}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

给定 $j\ge N_2$. 对每个 $n'\in\mathbb{Z}^{d-1}$ 满足 $|n'|\ge2\Lambda$, 记

$$\begin{aligned}Y_{n'}&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1)=K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)\},\\Y_{n'}^+&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1)<K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)\},\\Y_{n'}^-&=\{n_d\in\mathbb{Z}:K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1)>K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)\}.\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}A_{1,j}\le&\sum_{|n'|\ge2\Lambda}\sum_{n_d\in Y_{n'}^+}(K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1))^q\\&+\sum_{|n'|\ge2\Lambda}\sum_{n_d\in Y_{n'}^-}(K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d))^q.\end{aligned} \tag{4.25}$$

接下来要证

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}(K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1))^q\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f}\epsilon; \tag{4.26}$$

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^-_{n'}}(K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d))^q\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f}\epsilon. \tag{4.27}$$

只证 (4.26), (4.27) 可类似证明. 因为 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 则对每一个 $(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$ 满足 $n_d\in Y^+_{n'}$, 存在 $r(n',n_d)>0$, 使得 $K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)=\mathscr{A}_{r(n',n_d)}(f_j)(n',n_d)$. 如 (4.11) 的类似讨论可得

$$\begin{aligned}&\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}(K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1))^q\\&\quad\leq\|D_df_j\|^{(q-1)(1-\beta)}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f_j\|^{(q-1)\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Bigg(\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_df_j(\vec{k})|\Bigg)^{1-\beta}\\&\qquad\times\Bigg(\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Z^+_{n'}}F(r(n',n_d)\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}f_j(\vec{k})\Bigg)^{\beta}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|D_df_j(\vec{k})|\\&\quad=\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d}|D_df_j(\vec{k})|\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\chi_{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})}(\vec{n})\\&\quad\leq\sum_{|\vec{k}|\geq\Lambda}|D_df_j(\vec{k})|\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\chi_{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})}(\vec{n})\\&\qquad+\sum_{|\vec{k}|<\Lambda}|D_df_j(\vec{k})|\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\chi_{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})}(\vec{n}).\end{aligned} \tag{4.29}$$

由 (4.17) 和 (4.23) 知

$$\begin{aligned}&\sum_{|\vec{k}|\geq\Lambda}|D_df_j(\vec{k})|\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\chi_{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})}(\vec{n})\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,d,q}N\|D_df_j\chi_{\{|\vec{k}|\geq\Lambda\}}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N}\|f_j\chi_{\{|\vec{k}|\geq\Lambda\}}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N}(\|f_j-f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+\|f\chi_{\{|\vec{k}|\geq\Lambda\}}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)})\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N}\epsilon.\end{aligned} \tag{4.30}$$

当 $|\vec{k}|<\Lambda$ 和 $j\geq N_2$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{|n'|\geq 2\Lambda}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}F(r(n',n_d))\chi_{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})}(\vec{n})\\&\quad\leq\sum_{|\vec{n}-\vec{k}|\geq\Lambda}F(r(\vec{n}))\chi_{\{|\vec{n}-\vec{k}|\leq(N+\sqrt{d})r(\vec{n})\}}(\vec{n})\\&\quad\leq 2^{(d+1)(1-\frac{\alpha}{d})q}2^{qd\beta}(d-1)^{q\beta}N^{(\frac{\alpha}{d}-1)q}\sum_{|\vec{n}-\vec{k}|\geq\Lambda}\bigg(\frac{|\vec{n}-\vec{k}|}{N+\sqrt{d}}\bigg)^{-q(d+\beta-\alpha)}\\&\quad\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N}\sum_{|\vec{n}|\geq\Lambda}|\vec{n}|^{-q(d+\beta-\alpha)}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

设 $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$, 令 $Q(\vec{n})=\{x\in\mathbb{R}^d:-1/2<x_i-n_i\leq 1/2,\ 1\leq i\leq d\}$. 显然, $Q(\vec{n})\cap Q(\vec{l})=\emptyset$ 对每个 $\vec{n}\neq\vec{l}$ 都成立, $\bigcup_{|\vec{n}|\geq\Lambda,\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}Q(\vec{n})\subset\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\geq\Lambda/2\}$. 当 $\vec{x}\in Q(\vec{n})$ 和 $|\vec{n}|\geq\Lambda$ 时, 有

$|\vec{x}| \leq |\vec{x}-\vec{n}|+|\vec{n}| \leq \sqrt{d}/2+|\vec{n}| \leq 2|\vec{n}|$. 从而

$$\sum_{\substack{|\vec{n}|\geq\Lambda \\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}} (|\vec{n}|)^{-q(d+\beta-\alpha)} \leq \sum_{\substack{|\vec{n}|\geq\Lambda \\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}} \int_{Q(\vec{n})} \left|\frac{x}{2}\right|^{-q(d+\beta-\alpha)} dx \leq \int_{|x|\geq\Lambda/2} \left|\frac{x}{2}\right|^{-q(d+\beta-\alpha)} dx$$
$$\leq 2^{\gamma} \int_{|x|\geq\Lambda/2} |x|^{-q(d+\beta-\alpha)} dx \lesssim_{\alpha,\beta,d,q} \Lambda^{d-q(d+\beta-\alpha)} \lesssim_{\alpha,\beta,d,q} \epsilon.$$

上述式子结合 (4.31) 可得

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda} \sum_{n_d\in Y_{n'}^{+}} F(r(n',n_d))\chi_{\{R_{r(n',n_d),N}(\vec{k})\}}(\vec{n})$$
$$\leq \sum_{|\vec{n}-\vec{k}|\geq\Lambda} F(r(\vec{n}))\chi_{\{|\vec{n}-\vec{k}|\leq(N+\sqrt{d})r(\vec{n})\}}(\vec{n}) \lesssim_{\alpha,\beta,d,q} \epsilon. \tag{4.32}$$

由 (4.29), (4.30) 和 (4.32) 知

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda} \sum_{n_d\in Y_{n'}^{+}} F(r(n',n_d)) \sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d} |D_d f_j(\vec{k})| \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N} \epsilon. \tag{4.33}$$

类似可得

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda} \sum_{n_d\in Y_{n'}^{+}} F(r(n',n_d)) \sum_{\vec{k}\in R_{r(n',n_d),N}(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d} f_j(\vec{k}) \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N} \epsilon. \tag{4.34}$$

由 (4.23), (4.28) 和 (4.33), (4.34) 知

$$\sum_{|n'|\geq 2\Lambda} \sum_{n_d\in Z_{n'}^{+}} (K_{\alpha,N}f_j(n',n_d)-K_{\alpha,N}f_j(n',n_d+1))^q$$
$$\lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N} \|D_d f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)} \|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta} \epsilon \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f} \epsilon,$$

由上述式子可得 (4.26). 由 (4.25)–(4.27) 知

$$A_{1,j} \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f} \epsilon. \tag{4.35}$$

类似于 (4.35) 的证明可得

$$A_{2,j} \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f} \epsilon. \tag{4.36}$$

由 (4.22), (4.24) 和 (4.35), (4.36) 可得 $\|D_d(K_{\alpha,N}f_j)-D_d(K_{\alpha,N}f)\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \lesssim_{\alpha,\beta,d,q,N,f} \epsilon$, $\forall j \geq \max\{N_1,N_2\}$. 从而 (4.20) 成立. 定理 1.7 得证.

致谢 感谢伍火熊教授的多年指导, 也感谢审稿人耐心细致的帮助.

参 考 文 献

[1] Aldaz J. M., Pérez Lázaro J., Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, **359**(5): 2443–2461.

[2] Bober J., Carneiro E., Hughes K., Pierce L. B., On a discrete version of Tanaka's theorem for maximal functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2012, **140**(5): 1669–1680.

[3] Brezis H., Lieb E., A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983, **88**: 486–490.

[4] Carneiro E., Finder R., Sousa M., On the variation of maximal operators of convolution type II, *Revista Mat. Iberoamericana* (to appear).

[5] Carneiro E., Hughes K., On the endpoint regularity of discrete maximal operators, *Math. Res. Lett.*, 2012, **19**(6): 1245–1262.

[6] Carneiro E., Mardid J., Derivative bounds for fractional maximal functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2017, **369**(60): 4063–4092.

[7] Carneiro E., Moreira D., On the regularity of maximal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2008, **136**(12): 4395–4404.

[8] Carneiro, E., Svaiter B. F., On the variation of maximal operators of convolution type, *J. Funct. Anal.*, 2013, **265**: 837–865.

[9] Córdoba A., The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier, *Amer. J. Math.*, 1977, **99**: 1–22.

[10] Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd edn., Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[11] Grafakos L., Modern Fourier Analysis, Volume 250 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2nd Edition, 2008.

[12] Hajłasz P., Onninen J., On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2004, **29**(1): 167–176.

[13] Kinnunen J., The Hardy–Littlewood maximal function of a Sobolev function, *Israel J. Math.*, 1997, **100**: 117–124.

[14] Kinnunen J., Lindqvist P., The derivative of the maximal function, *J. Reine Angew. Math.*, 1998, **503**: 161–167.

[15] Kinnunen J., Saksman E., Regularity of the fractional maximal function. *Bull. London Math. Soc.*, 2003, **35**(4): 529–535.

[16] Korry S., Boundedness of Hardy–Littlewood maximal operator in the framework of Lizorkin–Triebel spaces, *Rev. Mat. Complut.*, 2002, **15**(2): 401–416.

[17] Korry S., A class of bounded operators on Sobolev spaces, *Arch. Math.*, 2004, **82**(1): 40–50.

[18] Kurka O., On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2015, **40**: 109–133.

[19] Liu F., A remark on the regularity of the discrete maximal operator, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2017, **95**: 108–120.

[20] Liu F., Continuity and approximate differentiability of multisublinear fractional maximal functions, *Math. Inequal. Appl.*, 2018, **21**(1): 25–40.

[21] Liu F., On the regularity of one-sided fractional maximal functions, *Math. Slovaca* (accepted).

[22] Liu F., Chen T., Wu H., A note on the endpoint regularity of the Hardy–Littlewood maximal functions, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2016, **94**: 121–130.

[23] Liu F., Mao S., On the regularity of the one-sided Hardy–Littlewood maximal functions, *Czech. Math. J.*, 2017, **67**(142): 219–234.

[24] Liu F., Wu H., On the regularity of the multisublinear maximal functions, *Canad. Math. Bull.*, 2015, **58**(4): 808–817.

[25] Liu F., Wu H., Endpoint regularity of multisublinear fractional maximal functions, *Canad. Math. Bull.*, 2017, **60**(3): 586–603.

[26] Liu F., Wu H., Regularity of discrete multisublinear fractional maximal functions, *Sci. China Math.*, 2017, **60**(8): 1461–1476.

[27] Liu F., Wu H., On the regularity of maximal operators supported by submanifolds, *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **453**: 144–158.

[28] Luiro H., Continuity of the maixmal operator in Sobolev spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2007, **135**(1): 243–251.

[29] Luiro H., On the regularity of the Hardy–Littlewood maximal operator on subdomains of $\mathbb{R}^n$, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2010, **53**(1): 211–237.

[30] Madrid J., Sharp inequalities for the variation of the discrete maximal function, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2017, **95**: 94–107.

[31] Pierce L. B., Discrete Analogues in Harmonic Analysis, Ph.D. Thesis, Princeton University, 2009.

[32] Strömberg J. O., Maximal functions associated to rectangles with uniformly distributed directions, *Ann. Math.*, 1978, **107**: 399–402.

[33] Tanaka H., A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy–Littlewood maximal function, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2002, **65**(2): 253–258.

[34] Temur F., On regularity of the discrete Hardy–Littlewood maximal function, preprint (2015), arxiv.org/abs/1303.3993.

[35] Yabuta K., Triebel–Lizorkin space boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to surfaces, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2015, **30**(4): 418–446.