第61卷第5期 数学学报中文版 Vol.61, No.5
2018年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)05-0771-06 **文献标识码: A**

一类数字限制集的上、下 Assouad 维数

代玉霞 李 青

湖北大学数学与统计学学院 应用数学湖北省重点实验室 武汉 430062
E-mail: daiyuxia8173@163.com; 308570892@qq.com

摘 要 设 $b \geq 2$, $D_1, D_2 \subseteq \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}$ 且 S_1, S_2 不交. 记 E 是由下面 (1.1) 所确定的数字限制集. 本文讨论了 E 的各种分形维数, 主要证明了 E 的上、下 Assouad 维数公式.

关键词 数字限制集; 上 Assouad 维数; 下 Assouad 维数
MR(2010) 主题分类 28A80
中图分类 O174.12

The Upper, Lower Assouad Dimension of a Class of Sets Defined by Digit Restrictions

Yu Xia DAI Qing LI

Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University,
Hubei Key Laboratory of Applied Mathematics, Wuhan 430062*, P. R. China*
E-mail: *daiyuxia*8173@163.*com*; 308570892@*qq.com*

Abstract Let $b \geq 2$, $D_1, D_2 \subseteq \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}$ and $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Let E be a set defined by digit restrictions of (1.1). In this paper, we discuss the fractal dimensions of E, prove the upper and lower Assouad dimension formulas of E.

Keywords sets defined by digit restrictions; upper Assouad dimension; lower Assouad dimension
MR(2010) Subject Classification 28A80
Chinese Library Classification O174.12

1 引言及结果

设 b 为大于等于 2 的整数, $D_1, D_2 \subseteq \{0, 1, \ldots, b-1\}$, 设 $\mathbb{N}$ 为正整数集, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}$ 且 S_1, S_2 不交. 定义

$$E := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x_k}{b^k} : x_k \in D_1 \text{若 } k \in S_1;\ x_k \in D_2 \text{若 } k \in S_2;\ x_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \text{若 } k \in \text{其它} \right\}, \quad (1.1)$$

称之为由 b, D_1, D_2 及 S_1, S_2 确定的数字限制集.

收稿日期: 2016-03-22; 接受日期: 2017-11-17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301162)

记

$$N_k = (\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{1,\ldots,k\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{1,\ldots,k\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\setminus(S_1\cup S_2))\cap\{1,\ldots,k\})}, \tag{1.2}$$

$\delta_k = b^{-k}$, 本文用 $\sharp A$ 表示集合 A 的基数. 从 E 的定义形式可见

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k, \tag{1.3}$$

其中 E_k 为 N_k 个长为 δ_k 的闭区间的并, E_k 的构成区间称为 E 的 k 级基本区间.

Bishop 和 Peres 在文 [1] 中讨论了 $b=2$, $D=\{0\}$ 所对应的数字限制集的 Hausdorff 维数, 上、下盒维数和填充维数. Dai 等人在文 [2] 中讨论了 $b\geq 2$, $D\subseteq\{0,1,\ldots,b-1\}$, $S\subseteq\mathbb{N}$ 所对应的数字限制集的上 Assouad 维数. 本文用 $\dim_H$, $\underline{\dim}_B$, $\overline{\dim}_B$, $\dim_P$ 分别表示 Hausdorff、下盒、上盒、填充维数 (定义见文 [3]). 由文 [1] 的类似讨论或 [10] 易得下面的维数公式.

定理 1.1 设 $b\geq 2$, $D_1, D_2\subseteq\{0,1,\ldots,b-1\}$, $S_1, S_2\subseteq\mathbb{N}$ 且 S_1, S_2 不交. 设 E 是由 (1.1) 所确定的数字限制集, 则有

$$\dim_H E = \underline{\dim}_B E = \underline{d}(S_1,S_2,D_1,D_2) \quad 和 \quad \dim_P E = \overline{\dim}_B E = \overline{d}(S_1,S_2,D_1,D_2),$$

其中

$$\begin{aligned}&\underline{d}\,(S_1,S_2,D_1,D_2)\\ &\quad = 1-\limsup_{k\to\infty}\left(\left(1-\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b}\right)\frac{\sharp(S_1\cap\{1,\ldots,k\})}{k}+\left(1-\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b}\right)\frac{\sharp(S_2\cap\{1,\ldots,k\})}{k}\right),\\ &\overline{d}\,(S_1,S_2,D_1,D_2)\\ &\quad = 1-\liminf_{k\to\infty}\left(\left(1-\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b}\right)\frac{\sharp(S_1\cap\{1,\ldots,k\})}{k}+\left(1-\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b}\right)\frac{\sharp(S_2\cap\{1,\ldots,k\})}{k}\right).\end{aligned}$$

下面讨论由 (1.1) 式所确定的更一般的数字限制集的上 Assouad 维数和下 Assouad 维数 (分别简称为上维数、下维数). 先给出上维数、下维数的定义 [4]. 记 $B(x,r)$ 表示以 x 为中心 r 为半径的闭球. 设 $r>0$, $F\subseteq\mathbb{R}^n$, 下文中用 $N_r(F)$ 表示集合 F 中极大 r- 分离集的基数, 其中称集合 $A\subset F$ 为 r- 分离的, 如果对任意 $x,y\in A$, $x\neq y$ 有 $|x-y|\geq r$; 称 r- 分离集 $A\subset F$ 为极大的, 如果 $A\cup\{x\}$, $x\in F$ 不是 r- 分离的.

定义 1.2 设 $F\subseteq\mathbb{R}^n$, $s>0$. 称 F 是 s- 上齐性的, 如果存在常数 $c,\rho\in(0,+\infty)$, 使得对任意的 $x\in F$, 对任意的 $0<r<R\leq\rho$, 有 $N_r(B(x,R)\cap F)\leq c(\frac{R}{r})^s$. 记

$$\dim_A F = \inf\{s: F \text{ 为 } s\text{- 上齐性的}\},$$

称之为 F 的上维数.

定义 1.3 设 $F\subseteq\mathbb{R}^n$, $s>0$. 称 F 是 s- 下齐性的, 如果存在常数 $c,\rho\in(0,+\infty)$, 使得对任意的 $x\in F$, 对任意的 $0<r<R\leq\rho$, 有 $N_r(B(x,R)\cap F)\geq c(\frac{R}{r})^s$. 记

$$\dim_L F = \sup\{s: F \text{ 为 } s\text{- 下齐性的}\},$$

称之为 F 的下维数.

集合的上维数和下维数具有某种对偶性, 它们分别反映了集合中的点分布的最复杂、最不复杂部分的性状. 上、下维数是研究分形集合某种齐性的必要工具. 关于集合的上维数和下维数的相关研究可见文 [4–9]. 本文主要讨论 (1.1) 所确定的数字限制集的上、下维数, 得到了

定理 1.4 设 $b\geq 2$, $D_1,D_2\subseteq\{0,1,\dots,b-1\}$, $S_1,S_2\subseteq\mathbb{N}$ 且 S_1,S_2 不交. 设 E 是由 (1.1) 所确定的数字限制集, 则有

$$\begin{aligned}\dim_A E=1+\limsup_{m\to\infty}\sup_{k\geq 1}&\Bigg(\bigg(\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b}-1\bigg)\frac{\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\\&+\bigg(\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b}-1\bigg)\frac{\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\Bigg).\end{aligned}$$

定理 1.5 设 $b\geq 2$, $D_1,D_2\subseteq\{0,1,\dots,b-1\}$, $S_1,S_2\subseteq\mathbb{N}$ 且 S_1,S_2 不交. 设 E 是由 (1.1) 所确定的数字限制集, 则有

$$\begin{aligned}\dim_L E=1+\liminf_{m\to\infty}\inf_{k\geq 1}&\Bigg(\bigg(\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b}-1\bigg)\frac{\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\\&+\bigg(\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b}-1\bigg)\frac{\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\Bigg).\end{aligned}$$

2 上、下维数的性质

Tyson 和 Fraser 分别在文 [4, 8] 中给出了上维数和下维数的一些基本性质, 本节将从度量的角度给出上维数和下维数的一种描述. 文 [8] 中借助集合中点的稀疏性描述了 $\mathbb{R}^n$ 中上维数小于 1 的集合, 下面考虑一般情形, 即描述上维数小于 s_0 的集合. 先给出一些记号, 设整数 $n\geq 1$, $b\geq 2$, 对任意的 $m\in\mathbb{N}$, $j_1,\dots,j_n\in\mathbb{Z}$, 记

$$Q(j_1,\dots,j_n;m)=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\frac{j_k}{b^m}\leq x_k\leq\frac{j_k+1}{b^m},\ k=1,\dots,n\right\}$$

表示 m- 级 b- 进方块. 对任给的一个 m- 级 b- 进方块 Q, 都有 b^n 个 $(m+1)$- 级 b- 进方块 $Q_1,\dots,Q_{b^n}\subset Q$, 称之为 Q 的下级子方块. 对 $n=1$ 的情形, b- 进区间 $I=[c,d]$ 的下级子区间为

$$I_j=\left[c+\frac{j(d-c)}{b},\ c+\frac{(j+1)(d-c)}{b}\right],\quad j=0,1,\dots,b-1.$$

记 $Q(x,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心 r 为边长的闭方块, 注意到对于 $\mathbb{R}^n$ 的集合, 定义 1 和 2 中的球 $B(x,r)$ 可以换成方块 $Q(x,r)$. 下文中用 $|F|$ 表示集合 F 的直径, 用 $s(Q)$ 表示方块 Q 的边长.

定义 2.1 设集合 $F\subseteq\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $b\geq 2$, $k\in\{0,1,\dots,b^n-1\}$, 若对任意 b- 进方块 Q, 至多有 Q 的 k 个下级子方块与 F 相交, 则称 F 为 (b,k) 稀疏集.

命题 2.2 设有界集 $F\subseteq\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $s_0\in(0,n]$, 则存在 $b\geq 2$, $k<b^{s_0}$, 使得 F 为 (b,k) 稀疏集当且仅当 $\dim_A F<s_0$.

证明 ($\Rightarrow$) 不妨设 $|F|=1$. 设存在 $b\geq 2$, $k<b^{s_0}$, 使得 F 是 (b,k) 稀疏集, 下证 F 为 $(\frac{\log k}{\log b})$-上齐性的, 从而 $\dim_A F\leq\log_b k<s_0$. 对任意 $x\in F$, 任意 $0<r\leq R<1$, 记 G 为 $Q(x,R)\cap F$ 的任意 r- 分离子集. 对 r,R, 存在 $l,m\in\mathbb{N}$, 使得 $b^{-l}<r\leq b^{-l+1}$; $b^{-m-1}\leq R<b^{-m}$. 从而 G 至多包含在 2^n 个 m- 级 b- 进方块中, 且 G 中不同的点属于不同的 $(l+1)$- 级 b- 进方块, 故结合 F 为 (b,k) 稀疏集得

$$\sharp G\leq 2^nk^{l+1-m}\leq 2^nk^{3+\log_b\frac{R}{r}}=2^nk^3\left(\frac{R}{r}\right)^{\log_b k}.$$

进而 $N_r(Q(x,R)\cap F)\leq 2^nk^3(\frac{R}{r})^{\log_b k}$, 即得 F 为 $(\frac{\log k}{\log b})$- 上齐性的.

($\Leftarrow$) 设 $\dim_A F < s_0$, 取 $s \in (\dim_A F, s_0)$, 使得 F 为 s- 上齐性的, 则对任意 $x \in F$, 任意 $0 < r \le R < 1$, 有 $N_r(Q(x,R) \cap F) \le c(\frac{R}{r})^s$, 其中 c 为正有限常数. 从而对 F 内直径不超过 R 的 r- 分离子集 G, 有 $\sharp G \le c(\frac{R}{r})^s$.

令 b 是一个足够大的偶数. 设 Q 是一个 b- 进方块, 记 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{b^n}$ 为 Q 的下级子方块, 这些子方块可以被分为 2^n 个子族 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \dots, \mathscr{F}_{2^n}$, 满足 $i = 1, 2, \dots, 2^n$, $\mathscr{F}_i$ 包含 $(\frac{b}{2})^n$ 个子方块且 $\mathscr{F}_i$ 中任意两个子方块之间的距离大于等于 $\frac{s(Q)}{b}$. 从而由 F 的 s- 上齐性得 $\mathscr{F}_i$ 内与 E 交的子方块个数至多为 $c(|Q|/\frac{s(Q)}{b})^s = c(b\sqrt{n})^s$. 进而 Q 内与 E 交的子方块个数至多为 $2^n c(b\sqrt{n})^s$. 即得 F 是 (b,k) 稀疏集, 其中 $k = c2^n n^{\frac{s}{2}} b^s$, 且当 b 充分大, $s < s_0$ 时, $k < b^{s_0}$. 证毕.

文 [8] 中指出对集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim_A F < n$ 当且仅当 F 为多孔集, 其中称集合 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的多孔集, 如果存在常数 $0 < \tau \le 1$, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中任意球 $B(x,r)$, 都存在 $z \in B(x,r)$ 满足 $B(z,\tau r) \cap F = \emptyset$. 对偶地, 可以借助于一致完全 [5] 描述 $\mathbb{R}^n$ 中集合的下维数.

定义 2.3　设 X 为度量空间, 如果存在常数 $C \ge 1$, 使得对任意的 $x \in X$, 任意的 $r > 0$, 当 $X \backslash B(x,r) \ne \emptyset$ 时, $B(x,r) \backslash B(x,r/C) \ne \emptyset$, 则称 X 为一致完全的.

命题 2.4　设紧集 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 $\dim_L F > 0$ 当且仅当 F 为一致完全集.

证明　($\Rightarrow$) 设 $\dim_L F > 0$, 下证 F 为一致完全集, 若不然, 对任意 $C \ge 1$, 存在 $x \in F$, $r > 0$, 使得尽管 $F \backslash B(x,r) \ne \emptyset$, 但是 $B(x,r) \backslash B(x,r/C)$ 内没有 F 中的点, 从而 $B(x,r) \cap F$ 的 $\frac{r}{C}$- 分离子集即为 $\{x\}$. 设 $s \in (0, \dim_L F)$, 则 F 为 s- 下齐性的, 从而 $N_{r/C}(B(x,r) \cap F) \ge cC^s$, 当 C 充分大时 $cC^s > 1$, 矛盾.

($\Leftarrow$) 设 F 为一致完全的紧集, 由文 [5, 练习 13.1 和定理 13.5], F 上支撑测度 μ 满足存在常数 $c \ge 1$, $\alpha, \beta > 0$, 使得对任意 $x \in F$, $0 < r \le R < |F|$, 有 $c^{-1}(\frac{r}{R})^\alpha \le \frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,R))} \le c(\frac{r}{R})^\beta$. 记 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为 $B(x,R) \cap F$ 的极大 r- 分离子集, 则 $B(x_i, 2R) \supset B(x,R)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 进而

$$\begin{aligned}\mu(B(x,R)) &\le \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i,r)\right) \le \sum_{i=1}^n \mu(B(x_i,r)) \le \sum_{i=1}^n c\left(\frac{r}{R}\right)^\beta \mu(B(x_i,R)) \\ &\le nc^2 2^\alpha \left(\frac{r}{R}\right)^\beta \mu(B(x,R)).\end{aligned}$$

故 $N_r(B(x,R) \cap F) = n \ge c^{-2} 2^{-\alpha} (\frac{R}{r})^\beta$, 即 F 为 β- 下齐性的, 则由定义 1.3 得 $\dim_L F \ge \beta > 0$. 证毕.

3　定理 1.4 和 1.5 的证明

定理 1.4 的证明　令

$$\begin{aligned}s^* = 1 + \limsup_{m\to\infty} \sup_{k\ge1} \Bigg(&\left(\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b} - 1\right) \frac{\sharp(S_1 \cap \{k+1, \dots, k+m\})}{m} \\ &+ \left(\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b} - 1\right) \frac{\sharp(S_2 \cap \{k+1, \dots, k+m\})}{m}\Bigg).\end{aligned}$$

第一步证明 $\dim_A E \le s^*$. 对于任意的 $s > s^*$, 由 s^* 的定义存在 $m(s)$, 使得 $m > m(s)$ 时,

$$\begin{aligned}ms\log b - m\log b \ge \sup_{k\ge1} (&\sharp(S_1 \cap \{k+1, \dots, k+m\})(\log(\sharp D_1) - \log b) \\ &+ \sharp(S_2 \cap \{k+1, \dots, k+m\})(\log(\sharp D_2) - \log b)).\end{aligned}$$

因为 S_1,S_2 不交, 故 $m-\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m\})-\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m\})=\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k+1,\dots,k+m\})$. 从而对于任意的 $k\geq 1$, 任意的 $m>m(s)$, 有

$$b^{ms}\geq(\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k+1,\dots,k+m\})}. \tag{3.1}$$

对于任意的 $R\in(0,b^{-m(s)})$ 存在 $K_1\geq m(s)$, 使得

$$b^{-K_1-1}\leq 2R<b^{-K_1}. \tag{3.2}$$

对于任意的 $r\in(0,b^{-K_1-m(s)-1})$ 存在 $K_2\geq m(s)+1$, 使得

$$b^{-K_1-K_2-1}\leq r<b^{-K_1-K_2}. \tag{3.3}$$

对于任意的 $x\in E$, 由 (3.2) 式 $B(x,R)$ 至多与两个 K_1 级基本区间相交, 结合 (1.2) 式 $B(x,R)$ 至多与

$$\begin{aligned}\frac{2N_{K_1+K_2+1}}{N_{K_1}}&=2(\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}\\&\quad\cdot b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}\end{aligned}$$

个 K_1+K_2+1 级基本区间相交. 记 F 为 $B(x,R)\cap E$ 的 r- 分离子集, 则由 (3.3) 式每个 K_1+K_2+1 级基本区间至多有两个 F 中的点. 结合 (3.1)–(3.3) 式, 有

$$\begin{aligned}&N_r(B(x,R)\cap E)\\&\leq 4(\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{K_1+1,\dots,K_1+K_2+1\})}\\&\leq 4b^{(K_2+1)s}=4b^{2s}\left(\frac{b^{-K_1-1}}{b^{-K_1-K_2}}\right)^s\leq 4b^{2s}\left(\frac{2R}{r}\right)^s=2^{s+2}b^{2s}\left(\frac{R}{r}\right)^s.\end{aligned}$$

从而 $\dim_A E\leq s$, 由 s 的任意性得 $\dim_A E\leq s^*$.

第二步证明 $\dim_A E\geq s^*$. 不妨令 $s^*>0$. 对于任意的 $0<s<s^*$, 由 s^* 的定义, 存在子列 $\{m_l\}_{l\geq1}$, 使得对任意的 $l\geq 1$, 有

$$\begin{aligned}m_ls\log b-m_l\log b\leq\sup_{k\geq1}(&\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m_l\})(\log(\sharp D_1)-\log b)\\&+\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m_l\})(\log(\sharp D_2)-\log b)).\end{aligned}$$

进而存在子列, 不妨记为 $\{k_l\}_{l\geq1}$, 使得对任意的 $l\geq 1$ 有

$$b^{m_ls}\leq(\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}. \tag{3.4}$$

记 x 为 E 的最左边的一个点 (即 E 中最小的数), 取

$$R=b^{-k_l},\quad r=b^{-k_l-m_l}, \tag{3.5}$$

则 $B(x,R)$ 为 E 的一个 k_l 级基本区间, 由 (1.2) 式 $B(x,R)$ 内包含有

$$\frac{N_{k_l+m_l}}{N_{k_l}}=(\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k_l+1,\dots,k_l+m_l\})}$$

个 k_l+m_l 级基本区间, 此区间的左端点构成的集合为极大 r- 分离的. 从而结合 (3.4), (3.5), 有

$$N_r(B(x,R)\cap E)=\frac{N_{k_l+m_l}}{N_{k_l}}\geq b^{m_ls}=\left(\frac{b^{-k_l}}{b^{-k_l-m_l}}\right)^s=\left(\frac{R}{r}\right)^s.$$

又因为 $R/r=b^{m_l}\to\infty$, $l\to\infty$, 所以 $\dim_A E\geq s$, 由 s 的任意性可得 $\dim_A E\geq s^*$. 证毕.

定理 1.5 的证明 令

$$\begin{aligned}s_*=1+\liminf_{m\to\infty}\inf_{k\geq1}\Bigg(&\left(\frac{\log(\sharp D_1)}{\log b}-1\right)\frac{\sharp(S_1\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\\&+\left(\frac{\log(\sharp D_2)}{\log b}-1\right)\frac{\sharp(S_2\cap\{k+1,\dots,k+m\})}{m}\Bigg).\end{aligned}$$

第一步证明 $\dim_L E \le s_*$. 对于任意的 $s > s_*$, 由 s_* 的定义, 存在子列 $\{m_l\}_{l\ge1}, \{k_l\}_{l\ge1}$, 使得对于任意的 $l \ge 1$, 有

$$b^{m_l s} \ge (\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}. \tag{3.6}$$

同定理 1.4 的第二步证明, 记 x 为 E 的最左边的一个点, 取 $R = b^{-k_l}$, $r = b^{-k_l-m_l}$. $B(x,R)$ 内极大 r- 分离集的基数为

$$\frac{N_{k_l+m_l}}{N_{k_l}} = (\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k_l+1,\ldots,k_l+m_l\})}.$$

从而结合 (3.6) 式, 可得

$$N_r(B(x,R)\cap E) = \frac{N_{k_l+m_l}}{N_{k_l}} \le b^{m_l s} = \left(\frac{b^{-k_l}}{b^{-k_l-m_l}}\right)^s = \left(\frac{R}{r}\right)^s.$$

又因为 $R/r = b^{m_l} \to \infty$, $l\to\infty$, 所以 $\dim_L E \le s$, 由 s 的任意性得 $\dim_L E \le s_*$.

第二步证明 $\dim_L E \ge s_*$. 不妨令 $s_* > 0$, 对于任意的 $0 < s < s_*$. 同定理 1.4 的第一步证明, 由 s_* 的定义存在 $m(s)$, 使得对于任意的 $m > m(s)$, 任意的 $k \ge 1$, 有

$$b^{ms} \le (\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{k+1,\ldots,k+m\})}(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{k+1,\ldots,k+m\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{k+1,\ldots,k+m\})}. \tag{3.7}$$

对于任意的 $x\in E$, 任意的 $r, R \in (0, \delta_{m(s)})$, $r < R$, 存在 $K_1 \ge m(s)$, $K_2 \ge m(s) + K_1$,

$$b^{-K_1-1} \le R < b^{-K_1}, \quad b^{-K_1-K_2-1} \le r < b^{-K_1-K_2}. \tag{3.8}$$

从而 $B(x,R)$ 内至少含一个 K_1+1 级区间, 进而至少含 $\frac{N_{K_1+K_2}}{N_{K_1}} = (\sharp D_1)^{\sharp(S_1\cap\{K_1+1,\ldots,K_1+K_2\})}\cdot(\sharp D_2)^{\sharp(S_2\cap\{K_1+1,\ldots,K_1+K_2\})}b^{\sharp((\mathbb{N}\backslash(S_1\cup S_2))\cap\{K_1+1,\ldots,K_1+K_2\})}$ 个 K_1+K_2 级区间, 这些区间的左端点组成的集合是 r- 分离的. 故结合 (3.7), (3.8) 式, 得

$$N_r(B(x,R)\cap E) \ge \frac{N_{K_1+K_2}}{N_{K_1}} \ge (b^{K_2})s = \left(\frac{b^{-K_1}}{b^{-K_1-K_2}}\right)^s > \left(\frac{R}{r}\right)^s.$$

所以 $\dim_L E \ge s$, 由 s 的任意性得 $\dim_L E \ge s_*$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bishop C. J., Peres Y., Fractals Sets in Probability and Analysis, http://www.math.stonybrook.edu, 2015.

[2] Dai Y. X., Wei C., Wen S. Y., Some geometric properties of sets defined by digit restrictions, *International Journal of Number Theory*, 2017, **13**(1): 65–75.

[3] Falconer K. J., Fractal Geometry–Mathematical Foundations and Applications, Mathematical Foundation: John Wiley, New York, 1990.

[4] Fraser J. M., Assouad type dimensions and homogeneity of fractals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013, **366**(12): 6687–6733.

[5] Heinonen J., Lectures on Analysis on Metric Spaces, Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] Larman D. G., A new theory of dimension, *Proc. London Math. Soc.*, 1967, **17**(3): 178–192.

[7] Luukkainen J., Assouad dimension: Antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures, *J. Korean Math. Soc.*, 1998, **35**: 23–76.

[8] Tyson J. T., Lowering the Assouad dimension by quasisymmetric mappings, *Illinois J. Math.*, 2001, **45**(2): 641–656.

[9] Wei C., Wen S. Y., Wen Z. X., Remarks on dimensions of Cartesian product sets, *Fractals*, 2016, **24**(3): 1650031.

[10] Wen Z. Y., Mathematical Foundations of Fractal Geometry, Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai, 2000.