第61卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.5
2018年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)05-0715-14 文献标识码: A

同调光滑连通上链 DG 代数的一个注记

毛雪峰

上海大学数学系 上海 200444
喀什大学 喀什 844000
E-mail: xuefengmao@shu.edu.cn

谢建峰

上海大学数学系 上海 200444
E-mail: jianfengxie@yahoo.com

摘 要 本文给出了有关同调光滑连通上链微分分次 (简称 DG) 代数的两个重要结论. 具体地说, 当 A 是同调光滑连通上链 DG 代数且其同调分次代数 $H(A)$ 是诺特分次代数时, 证明 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中的任意 Koszul DG A- 模都是紧致的. 另外, 当 A 是 Kozul 连通上链 DG 代数且其同调分次代数 $H(A)$ 是有平衡对偶复形的诺特分次代数时, 证明 A 的同调光滑性质等价于 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$.

关键词 同调光滑 DG 代数; Koszul DG 代数; 紧致 DG 模; DG 自由 class
MR(2010) 主题分类 16E10, 16E45, 16W50
中图分类 O154.2

A Note on Homologically Smooth Connected Cochain DG Algebras

Xue Feng MAO

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444*, P. R. China*
Kashgar University, Kashgar 844000*, P. R. China*
E-mail: *xuefengmao@shu.edu.cn*

Jian Feng XIE

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444*, P. R. China*
E-mail: *jianfengxie@yahoo.com*

Abstract In this paper, we obtain two interesting results on homologically smooth connected cochain DG algebras. More precisely, we show that any Koszul DG A-module in $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ is compact, when A is a homologically smooth connected cochain DG algebra with a Noetherian cohomology graded algebra $H(A)$. We prove that the homologically smoothness of A is equivalent to $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$, if A is a Koszul connected cochain

收稿日期: 2017-07-03; 接受日期: 2017-11-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11001056)

DG algebra such that $H(A)$ is a Noetherian graded algebra with a balanced dualizing complex.

Keywords homologically smooth DG algebra; Koszul DG algebra; DG free class; compact DG module
MR(2010) Subject Classification 16E10, 16E45, 16W50
Chinese Library Classification O154.2

1 引言

假设 $\Bbbk$ 是一特征为 0 的代数闭域, 而 A 是 $\Bbbk$ 上的一个连通上链 DG 代数. 容易验证 A 的同调分次代数

$$H(A)=\bigoplus_{i=0}^{+\infty}\frac{\ker(\partial_A^i)}{\operatorname{im}(\partial_A^{i-1})}$$

是一连通分次代数. 对任一 cocycle 元 $z\in\ker(\partial_A^i)$, 记 $\lceil z\rceil$ 为 z 所代表的在 $H(A)$ 中的同调类. 假定读者熟悉有关 DG 同调代数的基本概念, 若想了解更多, 请见文 [2, 4, 15, 16].

记 $\mathrm{D}(A)$ 为 DG A- 模范畴的导出范畴. 如果 DG A- 模 M 的同调模 $H(M)$ 是分次有限生成 $H(A)$- 模, 则称 M 是同调有限生成 DG A- 模. 由所有同调有限生成 DG A- 模构成的 $\mathrm{D}(A)$ 的三角全子范畴记为 $\mathrm{D_{fg}}(A)$. 类似地, 如果 DG A- 模 M 的同调模 $H(M)$ 满足每个 $H^i(M)$ 维数有限, 则称 M 是同调局部有限的 DG A- 模. 由所有同调局部有限的 DG A- 模的构成的 $\mathrm{D}(A)$ 的三角全子范畴记为 $\mathrm{D_{lf}}(A)$. 另外, 记 $\mathrm{D}^+(A)$, $\mathrm{D}^-(A)$ 以及 $\mathrm{D^b}(A)$ 分别表示 $\mathrm{D}(A)$ 的由全体同调下有界 DG A- 模, 同调上有界 DG A- 模和同调有界 DG A- 模全体构成的全子范畴.

由文 [11, 12] 中有关具有任意余积的三角范畴的紧致对象的定义, 如果函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(A)}(M,-)$ 保持 $\mathrm{D}(A)$ 中的任意余积, 则称 DG A- 模 M 是紧致的. 因为 A 是增广 DG 代数, 根据文 [10, 定理 5.3] 可知 DG A- 模 M 是紧致的, 当且仅当 M 在 $\mathrm{D}(A)$ 的包含 ${}_AA$ 的最小的 thick 子范畴中. 按照拓扑学家的话讲, DG A- 模是紧致的当且仅当其可以通过有限步的平移, 三角扩张构造得到. 由所有紧致 DG A- 模构成的 $\mathrm{D}(A)$ 的三角全子范畴记为 $\mathrm{D^c}(A)$. 引用文 [8] 中的话说, 紧致 DG A- 模在 DG 同调代数中的重要性类似于环论中的具有有限投射维数的有限 presented 模. 由文 [15, 命题 3.3] 可知 DG A- 模 M 是紧致的当且仅当 M 有一个具有有限半自由基的极小半自由表示 F_M. 特别地, 如果 A 作为 DG A^e- 模是紧致 DG 模, 则称 A 是同调光滑 DG 代数. 由文 [17, 推论 2.7], A 是同调光滑 DG 代数当且仅当 $\Bbbk\in\mathrm{D^c}(A)$.

容易验证任何的紧致 DG A- 模都是同调有限生成的 DG A- 模, 而反过来一般情况下结论不成立. 例如, 若 A 不是同调光滑 DG 代数, 则 ${}_A\Bbbk\in\mathrm{D_{fg}}(A)$ 但 ${}_A\Bbbk\notin\mathrm{D^c}(A)$.

假设 A 是连通上链 DG 代数, 使得 $H(A)$ 是 Noetherian 分次代数并且满足 $\mathrm{gl.dim}H(A)<\infty$. 则由 Eilenberg–Moore 表示的存在性可知任意的同调有限生成 DG A- 模都是紧致的, 从而 A 是同调光滑的. 文 [16, 例 3.12] 表明存在同调光滑的连通上链 DG 代数其同调分次代数是具有无限整体维数的 Noetherian 分次代数. 因此当 $H(A)$ 是诺特分次代数时, A 的同调光滑性要弱于条件 $\mathrm{gl.dim}H(A)<\infty$. 这让人很自然地联想到.

问题 A 假设 A 是同调光滑的连通上链 DG 代数且 $H(A)$ 是诺特分次代数. 是否任意的同调有限生成 DG A- 模都是紧致的 DG A- 模?

DG 代数的同调光滑性质类似于分次代数的正则性质, 有关 DG 代数的这个重要性质的研究已经引起很多人的兴趣. 文 [6] 引入了 Koszul DG 代数的定义并证明了 Koszul, 同调光滑和 Gorenstein DG 代数的 Koszul 对偶定理. 文 [16] 证明同调光滑连通上链 DG 代数 A 如果不同构于 $\Bbbk$, 则必定是同调无界的 DG 代数, 并证明同调光滑 DG 代数 A 的 Ext- 代数是 Frobenius 代数当且仅当 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{lf}}(A)$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{lf}}(A^{\mathrm{op}})$ 存在 Auslander–Reiten 三角. 在文 [18] 中, Shklyarov 对于同调光滑 DG 代数发展了 Riemann–Roch 定理. 除此之外, 许多重要的 DG 代数是同调光滑的. 例如, Ginzburg 在文 [5] 中定义 Calabi–Yau DG 代数都是同调光滑的. 特别地, 由文 [14] 和 [13], 非平凡的诺特 DG down-up 代数和非平凡的 DG 多项式代数都是 Calabi–Yau DG 代数.

同调光滑 DG 代数的重要性, 促使我们考虑问题 A. 本文通过证明以下结论 (见定理 4.1) 部分地解决了问题 A.

定理 A　设 A 是同调光滑连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是诺特分次代数, 则范畴 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中任何的 Koszul DG 模都是紧致的.

注意, 如果 DG A- 模 M 有一个半自由表示的半自由基集中在某个次数上, 则称该 DG A- 模是 Koszul DG 模. 特别地, 如果 ${}_A\Bbbk$ 是 Koszul DG 模, 则称 A 是一 Koszul DG 代数. 这里关于 Koszul DG 模的定义不同于文 [7, 定义 2.1] 和 [9, 定义 5.3], 因为我们不要求所集中的次数为 0. 根据定义, 可见任意的 Koszul DG A- 模都是 $\mathrm{D}^+(A)$ 中的一个对象. 假设 M 是 $\mathrm{D}^+(A)$ 中的一个 Koszul DG A- 模, 则由文 [15, 命题 2.4] 可知 M 有一个极小半自由表示 F_M, 其半自由基集中于次数 $\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}$. 因此, 这里关于 Koszul DG 代数的定义与文 [6] 和 [9] 中的定义是一致的.

文 [9] 证明了 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 和 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A^{\mathrm{op}})$ 的一个对偶. 在加上 $H(A)$ 存在平衡对偶复形这一额外的条件后, 文 [9] 得到了有关 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中 DG 模的 Ext 和 Castelnuovo–Mumford 变形的重要结论 (见文 [9, 定理 5.7]). 受文 [9] 启发, 证明了下面的定理 (见定理 4.4).

定理 B　设 A 是一 Koszul 连通上链 DG 代数且 $H(A)$ 是一存在平衡对偶复形的诺特分次代数, 则 A 是同调光滑 DG 代数当且仅当 $\mathrm{D}^c(A)=\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$.

最后一节给出例 5.1, 5.2, 说明存在具有平衡对偶复形的、诺特的、整体维数无限的同调分次代数的 Koszul, 同调光滑连通上链 DG 代数. 我们可以将定理 B 的结论应用到例 5.1 和 5.2. 而例 5.3 中的 DG 代数因为是非 Koszul 的同调光滑 DG 代数, 只能将定理 A 应用到例 5.3.

2　DG 模的 Ext 和 Castelnuovo–Mumford 变形

本节将介绍 DG 模的 Ext 和 Castelnuovo–Mumford 变形. 文 [9] 引入并研究了 DG 模的这两个变量. 因为后面讨论的需要, 将选择性地介绍文 [9] 中的一些结论.

定义 2.1 [9]　对任意 $M\in\mathrm{D}(A)$, 定义 M 的 Ext- 变形

$$\mathrm{Ext.reg}M=-\inf\{i\,|\,H^i(R\mathrm{Hom}_A(M,\Bbbk))\neq 0\},$$

对于 $M\in\mathrm{D}(A^{\mathrm{op}})$ 的情形, 可以类似地定义. 注意 $\mathrm{Ext.reg}(0)=-\infty$.

当 A 是同调光滑连通上链 DG 代数时, ${}_A\Bbbk$ 和 $\Bbbk_A$ 都是紧致的. 设 K 和 L 分别是 ${}_A\Bbbk$ 和 $\Bbbk_A$ 的极小半自由表示, 则在 $\mathrm{D}(A)$ 中, $\langle K\rangle=\langle {}_A\Bbbk\rangle$ 及 $\langle L\rangle=\langle \Bbbk_A\rangle$. 在这种情形下, 文 [9, Setup 4.1] 成立.

在 $\mathrm{D}(A)$ 中, 取定 $\mathscr{N} = \langle {}_A\Bbbk\rangle^{\perp} = \langle {}_AK\rangle^{\perp}$, 并定义 torsion 和 complete DG 模为 $\mathrm{D}^{\mathrm{tors}}(A) = {}^{\perp}\mathscr{N}$, $\mathrm{D}^{\mathrm{comp}}(A) = \mathscr{N}^{\perp}$, 则可得

$$\mathrm{D}^{\mathrm{tors}}(A) = \langle {}_A\Bbbk\rangle = \langle {}_AK\rangle.$$

设 $\mathscr{E} = \mathrm{Hom}_A(K,K)$ 为 K 的自同态 DG 代数. DG 模 K 有双模结构 ${}_{A,\mathscr{E}}K$, 而 $K^* = \mathrm{Hom}_A(K,A)$ 有双模结构 $K^*_{A,\mathscr{E}}$. 定义函子

$$T(-) = -{}^{L}\otimes_{\mathscr{E}}K,$$
$$R(-) = \mathrm{Hom}_A(K,-) \simeq K^*{}^{L}\otimes_A -,$$
$$C(-) = R\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}^{\mathrm{op}}}(K^*,-)$$

可得 $\mathrm{D}(\mathscr{E}^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathrm{D}(A)$ 间的伴随函子对 (T,R) 和 (R,C). 存在如下范畴间的拟逆等价

$$\mathrm{D}^{\mathrm{comp}}(A) \underset{C}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}(\mathscr{E}^{\mathrm{op}}) \underset{R}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{tors}}(A)\ .$$

特别地, RC 和 RT 等价于 $\mathrm{D}(\mathscr{E}^{\mathrm{op}})$ 上的恒等函子, 因此如果取定

$$\Gamma = TR, \quad \Lambda = CR,$$

则可得 $\mathrm{D}(A)$ 的自同态函子构成伴随对 (Γ,Λ) 并且满足

$$\Gamma^2 \simeq \Gamma, \quad \Lambda^2 \simeq \Lambda, \quad \Gamma\Lambda \simeq \Gamma, \quad \Lambda\Gamma \simeq \Lambda.$$

如下所示, 这些函子是包含函子的伴随, 其中的左伴随函子在右伴随函子上面

$$\mathrm{D}^{\mathrm{comp}}(A) \underset{\Lambda}{\overset{\mathrm{inc}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}(A) \underset{\mathrm{inc}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{tors}}(A)\ .$$

记 $F = K^{*L}\otimes_{\mathscr{E}} K$ 以及 $D = F^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,\Bbbk)$, 可见 F 和 D 分别有双模结构 ${}_AF_A$ 和 ${}_AD_A$. 根据定义, 有

$$\Gamma(-) = F\,{}^{L}\otimes_A - \quad 及 \quad \Lambda(-) = R\mathrm{Hom}_A(F,-).$$

定义 2.2 (见文 [9, 定义 5.1]) 对 $M \in \mathrm{D}(A)$, M 的 Castelnuovo–Mumford 变形为

$$\mathrm{CMreg}M = \sup\{i \mid H^i(\Gamma(M)) \neq 0\}.$$

注意: $\mathrm{CMreg}(0) = -\infty$.

引理 2.3 (见文 [9, 命题 5.6]) 设 A 是一同调光滑连通上链 DG 代数, 若 M 是 $\mathrm{D}^{+}(A)$ 中的一个对象, 则有

(1) $\mathrm{CMreg}M \neq -\infty$.

(2) $\mathrm{Ext.reg}M \leq \mathrm{CMreg}M + \mathrm{Ext.reg}\Bbbk$.

(3) $\mathrm{CMreg}M \leq \mathrm{Ext.reg}M + \mathrm{CMreg}A$.

引理 2.4 (见文 [9, (5.3) 式]) 设 A 是同调光滑连通上链 DG 代数, 并且 $H(A)$ 是有平衡对偶复形的诺特分次代数, 则对 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的任意非零对象 M, 有 $-\infty < \mathrm{CMreg}M < +\infty$.

引理 2.5 (见文 [9, 定理 5.7]) 假设 A 是以同调光滑连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是有平衡对偶复形的诺特分次代数, 则对 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的一个非零对象 M, 以下结论成立:

(1) 若 $\mathrm{Ext.reg}\Bbbk < \infty$, 则 $\mathrm{Ext.reg}M < \infty$.

(2) 若 A 是 Koszul DG 代数并且存在 t, 使得 $\mathrm{CMreg}M \leq t$, 则 $M^{\geq t}$ 是一个 Koszul DG 模.

3 半自由 DG 模的 DG 自由 class

在群论中, 术语 class 用来度量子商具有某种性质的滤的最短长度. Carlsson 在文 [3] 中引入了分次多项式环上的可分解 DG 模的 "自由 class" 的定义. Avramov, Buchweitz 和 Iyengar 在文 [1] 中引入了交换环上的微分模的自由 class, 投射 class 和平坦 class 等不变量. 受以上文献启发, 本文第一作者在文 [17] 中定义了半自由模的 DG 自由 class.

定义 3.1 [17] 设有半自由 DG A- 模 F 的一个半自由滤

$$0=F(-1)\subseteq F(0)\subseteq\cdots\subseteq F(n)\subseteq\cdots.$$

如果 $F(i-1)\neq F$ 时, 成立 $F(i-1)\neq F(i)$, $\forall\, i\geq 0$, 则称该半自由滤是严格单调增加的. 对于 F 的一个严格增加的半自由滤

$$0=F(-1)\subseteq F(0)\subseteq\cdots\subseteq F(n)\subseteq\cdots.$$

如果存在某个 n, 使得 $F(n)=F$ 并且 $F(n-1)\neq F$, 则称该严格增加的半自由滤长度为 n. 如果这样的整数 n 不存在, 则称该严格增加的半自由滤长度为 $+\infty$.

定义 3.2 [17] 设 F 是一半自由 DG A- 模, 定义 F 的 DG 自由 class 为

$$\inf\{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,|\,F\text{ 有一个严格递增的长度为 }n\text{ 的半自由滤}\}.$$

记为 DGfree $\mathrm{class}_A F$.

定义 3.3 [17] DG A- 模 M 的锥长度定义为

$$\mathrm{cl}_A M=\inf\{\,\mathrm{DGfree\ class}_A F\,|\,F\xrightarrow{\simeq}M\text{ 是 }M\text{的一个半自由表示}\}.$$

DG A- 模的锥长度这一不变量在 DG 同调代数中的重要性和作用类似于经典同调环论中模的投射维数 (见文 [17]).

注 3.4 注意 $\mathrm{cl}_A M$ 可取为 $+\infty$. 之所以称该变量为 "锥长度" 是因为半自由 DG A- 模可由 DG 自由 A- 模通过锥构造扩张得到 (见文 [17, 引理 4.1]), 并且任意 DG A- 模都有半自由表示. 对任意的紧致 DG A- 模 M, M 有有限半自由基的极小半自由表示 F_M. 由定义易见

$$\mathrm{DGfree\ class}_A F_M<\infty,$$

从而 $\mathrm{cl}_A M<\infty$.

由文 [15, 命题 2.4], $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的任一对象 M 存在极小半自由表示 F_M. 一个自然的问题是: 是否 $\mathrm{cl}_A M=\mathrm{DGfree.class}_A F_M$? 由定理 4.1 的证明可见这个问题与引言中的问题 A 密切相关. 实际上, 当 A 是一个同调光滑的连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是诺特分次代数时, 若

$$\mathrm{cl}_A M=\mathrm{DGfree.class}_A F_M,\quad\forall\, M\in\mathrm{D_{fg}}(A),$$

则可得 $\mathrm{D_{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$. 当 M 有一个极小 Eilenberg–Moore 表示时, 由文 [17, 命题 3.6] 可得 $\mathrm{cl}_A M=\mathrm{DGfree.class}_A F_M$. 对于一般情形, 我们还没法证明. 尽管如此, 通过证明定理 A 和 B, 本文在研究问题 A 的过程中取得了一些进展. 为了给出这两个定理的证明, 还需要做一些准备.

引理 3.5 (见文 [2, 第 12 节, 定理 3.2]) 设 F 是同调有下界的半自由 DG A- 模, 则存在 F 的一个极小半自由表示 G 和一个 0 伦的 DG A- 模 Q, 使得有 DG A- 模同构 $F\cong G\oplus Q$.

引理 3.6 (见文 [2, 第 8 节, 推论 4.3]) 设 $f:F\to F'$ 是半自由 DG A- 模间的一个 DG 模同态, 则 f 是一个拟同构当且仅当 f 是一同伦等价.

命题 3.7 设 A 是一个连通 DG 代数并且满足 $\mathrm{cl}_{A^e}A<+\infty$, 则对任意 DG A- 模 M, 有 $\mathrm{cl}_A M\le \mathrm{cl}_{A^e}A<+\infty$. 而且, 当 A 同调光滑且 M 是 $\mathrm{D}^+(A)$ 中的一个对象时, M 存在一个下有界的半自由表示 F, 使得 $\inf\{i\,|\,F^i\neq 0\}=\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}$ 并且

$$\text{DGfree class}_A F\le \text{DGfree class}_{A^e}P,$$

其中 P 是 ${}_{A^e}A$ 的一个极小半自由表示.

证明 设 $\mathrm{cl}_{A^e}A=n$. 由锥长度的定义, DG A^e- 模 A 有一个半自由表示 X, 使得

$$\text{DGfree class}_{A^e}X=n.$$

这表明 X 有一个严格递增的半自由滤

$$0\subset X(0)\subset X(1)\subset\cdots\subset X(n)=X,$$

其中 $X(0)=A^e\otimes V(0)$ 并且每个 $X(i)/X(i-1)\cong A^e\otimes V(i)$ 是 DG 自由 A^e- 模. 设

$$E_i=\{e_{i_j}\,|\,j\in I_i\},\quad i\ge 0,$$

是 $V(i)$ 的一组基. 对任意 $i\ge 1$, 定义 $f_i:A^e\otimes\Sigma^{-1}V(i)\to X(i-1)$, 使得 $f_i(\Sigma^{-1}e_{i_j})=\partial_{X(i)}(e_{i_j})$. 由文 [17, 引理 4.1], $X(i)\cong\mathrm{cone}(f_i)$, $i=1,2,\ldots,n$.

对任意 DG A- 模 M, 设 $\varrho_M:F_M\to M$ 是 M 的一个半自由表示. 作为 DG A- 模,

$$X(i)\otimes_A F_M\cong\mathrm{cone}(f_i\otimes_A \mathrm{id}_{F_M}),$$

$i=1,2,\ldots,n$. 因为 $A^e\otimes_A F_M\cong A\otimes F_M$, 有

$$(A^e\otimes V(i))\otimes_A F_M\cong A\otimes V(i)\otimes F_M,\quad i=0,1,\ldots,n.$$

选取子集 $\{m\}\subseteq F_M$, 使得任一 m 是 cocycle 元并且 $\{\lceil m\rceil\}$ 是 $\Bbbk$- 向量空间 $H(F_M)$ 的一组基. 定义 DG 同态

$$\phi_i:A\otimes V(i)\otimes H(F_M)\to A\otimes V(i)\otimes F_M,$$

使得 $\phi_i(a\otimes v\otimes\lceil m\rceil)=a\otimes v\otimes m$, 对任意 $a\in A$, $v\in V(i)$ 以及 $\lceil m\rceil$. 容易验证 ϕ_i 是拟同构.

接下来, 归纳地证明 $\mathrm{cl}_A(X(i)\otimes_A F_M)\le i$, $i=0,1,\ldots,n$. 因为

$$\phi_0:A\otimes V(0)\otimes H(F_M)\to X(0)\otimes_A F_M$$

是一拟同构, 有 $\mathrm{cl}_A(X(0)\otimes_A F_M)=0$. 归纳假设

$$\mathrm{cl}_A(X(l)\otimes_A F_M)\le l,\quad l\ge 0.$$

需证 $\mathrm{cl}_A(X(l+1)\otimes_A F_M)\le l+1$. 因为 $\mathrm{cl}_A(X(l)\otimes_A F_M)\le l$, 所以存在半自由表示

$$\varphi_l:F_l\xrightarrow{\simeq}X(l)\otimes_A F_M,$$

使得 $\text{DGfree class}_A F_l\le l$. 因为 $A\otimes\Sigma^{-1}V(l+1)\otimes H(F_M)$ 是半自由模, 所以存在 DG 模同态

$$\psi_l:A\otimes\Sigma^{-1}V(l+1)\otimes H(F_M)\to F_l,$$

使得 $\varphi_l\circ\psi_l\sim(f_l\otimes_A\mathrm{id}_{F_M})\circ\Sigma^{-1}(\phi_{l+1})$.

为方便起见, 记 $Q(l+1)=A\otimes V(l+1)$ 以及 $K(l+1)=A^e\otimes V(l+1)$. 在 $\mathrm{D}(A)$ 中, 存在同态

$$h_{l+1}:\mathrm{cone}(\psi_l)\to X(l+1)\otimes_A F_M,$$

使得下图

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Q(l+1)\otimes H(F_M) \arrow[r, "\psi_l"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}(\phi_{l+1})"] & F_l \arrow[r, "\tau_l"] \arrow[d, "\varphi_l"] & \mathrm{cone}(\psi_l) \arrow[r, "\varepsilon_l"] \arrow[d, "\exists h_{l+1}"] & Q(l+1)\otimes_{\Bbbk} H(F_M) \arrow[d, "\phi_{l+1}"] \\
\Sigma^{-1}K(l+1)\otimes_A F_M \arrow[r, "f_l\otimes_A \mathrm{id}_{F_M}"] & X(l)\otimes_A F_M \arrow[r, "\iota_l"] & X(l+1)\otimes_A F_M \arrow[r, "\pi_l"] & K(l+1)\otimes_A F_M
\end{tikzcd}$$

交换. 由引理 3.5, h_{l+1} $\mathrm{D}(A)$ 中的一个同构. 这表明存在拟同构 $g: Y\to \mathrm{cone}(\psi_l)$ 以及

$$t: Y\to X(l+1)\otimes_A F_M,$$

其中 Y 是某个 DG A- 模. 因此

$$\mathrm{cl}_A(X(l+1)\otimes_A F_M)=\mathrm{cl}_A Y=\mathrm{cl}_A\mathrm{cone}(\psi_l)\leq l+1.$$

这样, 就归纳地证明了 $\mathrm{cl}_A(X\otimes_A F_M)\leq n$. 因为 $F_M\simeq X\otimes_A F_M$, 从而 $\mathrm{cl}_A M\leq n$.

下面, 假设 A 同调光滑并且 M 同调有下界. 设 $\alpha: P\to {}_{A^e}A$ 是一极小半自由表示并且 $b=\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}$. 由文 [15, 命题 2.4], 有 $\inf\{i\,|\,P^i\neq 0\}=0$ 并且可假设上面提到的 ϱ_M 是 M 的一个极小半自由表示. 因为 ${}_{A^e}A$ 是紧致的, P 有一个有限半自由基. 所以 DGfree $\mathrm{class}_{A^e}P$ 有限. 设 DGfree $\mathrm{class}_{A^e}P=t$, 则 P 有一个严格单调递增的半自由滤

$$0\subset P(0)\subset P(1)\subset\cdots\subset P(t)=P,$$

其中 $P(0)=A^e\otimes W(0)$, 并且每个 $P(i)/P(i-1)\cong A^e\otimes W(i)$, $i\geq 1$, 是 DG 自由 A^e- 模. 设 $\Lambda_i=\{\lambda_{i_j}\,|\,j\in J_i\}$, $i\geq 0$, $W(i)$ 的一组基. 对任意 $i\geq 1$, 定义 $g_i: A^e\otimes_{\Bbbk}\Sigma^{-1}W(i)\to P(i-1)$, 使得 $g_i(\Sigma^{-1}\lambda_{i_j})=\partial_{P(i)}(\lambda_{i_j})$. 由文 [17, 引理 4.1] 可知 $P(i)\cong \mathrm{cone}(g_i)$, $i=1,2,\ldots,t$. 作为 DG A- 模,

$$P(i)\otimes_A F_M\cong \mathrm{cone}(g_i\otimes_A \mathrm{id}_{F_M}),\quad i=1,2,\ldots,t.$$

定义一个 DG 模同态

$$\eta_i: A\otimes W(i)\otimes H(F_M)\to A\otimes W(i)\otimes F_M,$$

使得 $\eta_i(a\otimes v\otimes\lceil m\rceil)=a\otimes v\otimes m$, 对任意的 $a\in A$, $v\in V(i)$ 以及 $\lceil m\rceil$. 容易验证 η_i 是一个拟同构. 因为 $P(0)\otimes_A F_M=A\otimes W(i)\otimes F_M$ 并且 $\eta_0: A\otimes W(0)\otimes H(F_M)\to A\otimes W(0)\otimes F_M$ 是一半自由表示, 所以

$$\text{DGfree class}_A A\otimes W(0)\otimes H(F_M)=0.$$

设 $G_0=A\otimes W(0)\otimes H(F_M)$, 则 $\inf\{j\,|\,G_0^i\neq 0\}=b$. 归纳假设 $P(i)\otimes_A F_M$ 有一个半自由表示 $\omega_i: G_i\to P(i)\otimes_A F_M$, 其中 $b=\inf\{j\,|\,G_i^j\neq 0\}$ 并且当 $i\leq r<t$ 时, DGfree $\mathrm{class}_A G_i\leq i$. 需要证明 $P(r+1)\otimes_A F_M$ 有一个半自由表示 G_{r+1}, 使得 $b=\inf\{j\,|\,G_{r+1}^j\neq 0\}$ 并且 DGfree $\mathrm{class}_A G_{r+1}\leq r+1$. 因为 $A\otimes\Sigma^{-1}W(r+1)\otimes H(F_M)$ 是半自由 DG A- 模, 存在一个 DG 模同态

$$\beta_r: A\otimes\Sigma^{-1}W(r+1)\otimes H(F_M)\to G_r,$$

使得 $\omega_r\circ\beta_r\sim(g_r\otimes_A\mathrm{id}_{F_M})\circ\Sigma^{-1}(\eta_{r+1})$. 设 $R(l+1)=A\otimes W(l+1)$ 且 $T(l+1)=A^e\otimes W(l+1)$. 在 $\mathrm{D}(A)$ 中, 存在一个 DG 模同态

$$\theta_{r+1}: \mathrm{cone}(\beta_r)\to P(r+1)\otimes_A F_M,$$

使得下图

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{-1}R(r+1)\otimes H(F_M) & \xrightarrow{\beta_r} & G_r & \xrightarrow{\nu_r} & \mathrm{cone}(\beta_r) & \xrightarrow{\gamma_r} & R(r+1)\otimes H(F_M) \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}(\eta_{r+1})} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_r} & & \downarrow{\scriptstyle \exists\theta_{r+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{r+1}} \\
\Sigma^{-1}T(r+1)\otimes_A F_M & \xrightarrow{g_r\otimes_A \mathrm{id}_{F_M}} & P(r)\otimes_A F_M & \xrightarrow{\iota_r} & P(r+1)\otimes_A F_M & \xrightarrow{\pi_r} & T(r+1)\otimes_A F_M
\end{array}
$$

交换. 由引理 3.5, θ_{r+1} D(A) 中一个同构. 这表明存在拟同构 $\rho: Z\to \mathrm{cone}(\beta_r)$ 和

$$\chi: Z\to P(r+1)\otimes_A F_M,$$

其中 Z 是某个 DG A- 模. 容易验证 $\inf\{i\,|\,\mathrm{cone}(\beta_r)^i\neq 0\}=b$. 所以 $Z\in \mathrm{D}^+(A)$ 并且由文 [15, 命题 2.6] 可知 Z 有一个极小半自由表示 $\xi: F_Z\to Z$. 因为 $\rho\circ\xi: F_Z\to \mathrm{cone}(\beta_r)$ 是半自由 DG 模间的一个拟同构, 由引理 3.6 可知 $\rho\circ\xi$ 是一同伦等价. 设 $\sigma: \mathrm{cone}(\beta_r)\to F_Z$ 是其同伦逆, 则

$$\chi\circ\xi\circ\sigma: \mathrm{cone}(\beta_r)\to P(r+1)\otimes_A F_M$$

是一拟同构并且是 $P(r+1)\otimes_A F_M$ 的一个半自由表示. 令 $G_{r+1}=\mathrm{cone}(\beta_r)$. 因为由归纳假设 DGfree $\mathrm{class}_A G_r\leq r$, 有 DGfree $\mathrm{class}_A G_{r+1}\leq r+1$. 由以上归纳可知, $P(t)\otimes_A F_M$ 有一个半自由表示

$$\theta_t: F=G_t\to P(t)\otimes_A F_M,$$

使得 $\inf\{i\,|\,F^i\neq 0\}=b$ 并且 DGfree $\mathrm{class}_A F\leq t$. 因为映射合成

$$P(t)\otimes_A F_M \xrightarrow{\alpha\otimes \mathrm{id}_{F_M}} {}_{A^e}A\otimes_A F_M \xrightarrow{\varrho_M} M$$

是一拟同构, 所以 F 是 M 的一个半自由表示. 证毕.

命题 3.8 设 A 是同调光滑连通上链 DG 代数, 则任意 Koszul DG 模 M 都存在一个半自由表示 F_M, 使得

$$\text{DGfree class}_A F_M\leq \text{DGfree class}_{A^e}P<\infty,$$

其中 P 是 ${}_{A^e}A$ 的一个极小半自由表示.

证明 由命题 3.7, M 有一个下有界的半自由表示 F, 使得

$$\inf\{i\,|\,F^i\neq 0\}=\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}=b$$

并且

$$\text{DGfree class}_A F\leq \text{DGfree class}_{A^e}P<\infty,$$

其中 P 是 ${}_{A^e}A$ 的一个极小半自由表示. 由命题 3.7 的证明可知 F 一般不是极小的. 由已知条件 M 是 Koszul DG 模, 所以 M 有一个半自由基集中于次数 b 的极小半自由表示 F_M. 由引理 3.5, $F\cong F_M\oplus Q$, 其中 Q 是 0- 伦的 DG A- 模. 设 $L=F_M\oplus Q$ 并且 DGfree $\mathrm{class}_A F=t$, 则 DGfree $\mathrm{class}_A L=t$ 并且 $\inf\{i\,|\,L^i\neq 0\}=b$, 所以 L 有一个半自由滤

$$0=L(-1)\subset L(0)\subset L(1)\subset\cdots\subset L(t)=L,$$

则 L 有一组半自由基 $E=\bigsqcup_{i=0}^t E_i$, 使得 $\partial_L(E_i)\subseteq A(\bigsqcup_{j=0}^{i-1}E_j)$ 对任意 $i\in\{1,2,\ldots,t\}$. 设

$$E_i=\{e_\lambda\,|\,\lambda\in I_i\},\quad V_i=\bigoplus_{e\in E_i}ke\quad 及\quad V=\bigoplus_{i=0}^t V_i,$$

则 $L^{\#}=A^{\#}\otimes V$. 因为 $L^{\#}=F_M^{\#}\oplus Q^{\#}$ 一下有界的分次 $A^{\#}$- 模, $Q^{\#}$ 是下有界的分次投射 $A^{\#}$-模. 所以 $Q^{\#}$ 是分次自由 $A^{\#}$- 模. 可假设 $F_M^{\#}=A^{\#}\otimes W$ 并且 $Q^{\#}=A^{\#}\otimes U$, 则

$$A^{\#}\otimes V=(A^{\#}\otimes W)\oplus(A^{\#}\otimes U).$$

通过考虑次数, 有 $V^b=W\oplus U^b$. 设 $V_i^b=V^b\cap V_i$, $i=0,1,\dots,t$, 则

$$\bigcup_{i=0}^{t}V_i^b=\bigcup_{i=0}^{t}(V^b\cap V_i)=V^b\cap\left(\bigcup_{i=0}^{t}V_i\right)=V^b.$$

设 $I_i^b\subset I_i$, 使得 $E_i^b=\{e_\lambda\,|\,\lambda\in I_i^b\}$ 是 V_i^b 的一组基. 对任意 $\lambda\in I_i^b$, 存在 $\omega_\lambda\in W$ 和 $u_\lambda\in U^b$, 使得 $e_\lambda=\omega_\lambda+u_\lambda$. 从而对任意 $\lambda\in I_i^b$, 有 $\partial_L(e_\lambda)\in L(i-1)^{b+1}$, 并且

$$\begin{aligned}\partial_{F_M}(\omega_\lambda)+\partial_Q(u_\lambda)=\partial_L(e_\lambda)&=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\lambda\in I_j^b}a_\lambda e_\lambda+\chi_\lambda\\&=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\lambda\in I_j^b}a_\lambda\omega_\lambda+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\lambda\in I_j^b}a_\lambda u_\lambda+\chi_\lambda,\end{aligned}$$

其中 $a_\lambda\in\mathscr{A}^1$ 并且 $\chi_\lambda\in(\mathscr{A}^{\#}\otimes V^{\geq b+1})\cap L(i-1)^{b+1}$. 因为 W 集中于次数 b, 所以 $\chi_\lambda\in Q$. 故

$$\partial_{F_M}(\omega_\lambda)=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\lambda\in I_j^b}a_\lambda\omega_\lambda \tag{3.1}$$

并且

$$\partial_Q(u_\lambda)=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\lambda\in I_j^b}a_\lambda u_\lambda+\chi_\lambda.$$

设

$$W_{\leq j}=\sum_{i=0}^{j}\sum_{\lambda\in I_i^b}\Bbbk\omega_\lambda,\quad j=0,1,\dots,t.$$

由 (3.1), 每个 $A\otimes W_{\leq j}$ 都是 F_M 的 DG 子模并且

$$0\subseteq A\otimes W_0\subseteq A\otimes W_{\leq 1}\subseteq\cdots\subseteq A\otimes W_{\leq t}=F_M$$

是 F_M 的一个半自由滤. 因此

$$\text{DGfree.class}_A F_M\leq t.$$

证毕.

4 两个主要定理

本节给出主要结论. 应用命题 3.8, 证明下面的定理并部分地回答问题 A.

定理 4.1 设 A 是同调光滑连通上链 DG 代数且 $H(A)$ 是诺特分次代数, 则 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的任一 Koszul DG 模都是紧致的.

证明 由命题 3.8, M 有一个极小半自由表示 F_M, 使得

$$\text{DGfree class}_A F_M\leq\text{DGfree class}_{A^e}P<\infty,$$

其中 P 是 ${}_{A^e}A$ 的一个极小半自由表示. 设 $\text{DGfree class}_A F_M=t$, 则存在 F_M 的一个半自由滤

$$0=F_M(-1)\subset F_M(0)\subset F_M(1)\subset\cdots\subset F_M(t)=F_M.$$

每个 $F_M(i)/F_M(i-1)=A\otimes W_i$ 都是一组 cocycle 元自由基上的 DG 自由 A- 模, $i=0,1,\dots,t$. 需要证明每个 W_i 都是有限维向量空间. 设 $\{e_{i,j}\,|\,j\in I_i\}$ 是 W_i 的一组基, $i=0,1,\dots,t$. 设

$$\iota_0: F_M(0)\to F_M$$

为包含映射. 因为 $\mathrm{im}H(\iota_0)$ 是 $H(F_M)$ 的一个分次 $H(A)$- 子模并且 $H(A)$ 是诺特分次代数, 所以

$$\mathrm{im}H(\iota_0)\cong\frac{H(F_M(0))}{\mathrm{ker}H(\iota_0)}$$

也是有限生成 $H(A)$- 模. 设

$$\mathrm{im}H(\iota_0)=H(A)f_{0,1}+H(A)f_{0,2}+\cdots+H(A)f_{0,n}.$$

因为 $H(F_M(0))\cong\bigoplus_{j\in I_0}H(A)e_{0,j}$ 是自由分次 $H(A)$- 模, 存在 I_0 的有限子集 $J_0=\{i_1,i_2,\dots,i_l\}$, 使得

$$f_{0,s}=\sum_{t=1}^{l}a_{st}\overline{e_{0,i_t}},\quad s=1,2,\dots,n,$$

其中每个 $a_{st}\in H(A)$. 若 $V(0)$ 是无限维的, 则 I_0 和 $I_0\setminus J_0$ 都是无限集. 因此, 对任意 $j\in I_0\setminus J_0$, 有 $e_{0,j}\in\mathrm{ker}H(\iota_0)$. 因为在 $H(F_M)$ 中 $[\iota_0(e_{0,j})]=[e_{0,j}]=0$, 存在 $x_{0,j}\in F_M$, 使得 $\partial_{F_M}(x_{0,j})=e_{0,j}$. 这与 F_M 的极小性矛盾. 因此 W_0 是有限维的并且 $F_M(0)\in\mathrm{D_{fg}}(A)$.

归纳假设已证 $W_0,\dots,W_{i-1}$ 是有限维的, 则任意 $F_M(j)/F_M(j-1)$ $(j=0,1,\dots,i-1)$ 是 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的一个对象, 并且通过下面的短正合列

$$0\longrightarrow F_M(j-1)\longrightarrow F_M(j)\longrightarrow F_M(j)/F_M(j-1)\longrightarrow 0,\quad j=1,\dots,i-1$$

能归纳地证明每个 $F_M(j)$ $(j=0,1,\dots,i-1)$ 都是 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的对象.

类似地, 由短正合列

$$0\longrightarrow F_M(i-1)\longrightarrow F_M\longrightarrow F_M/F_M(i-1)\longrightarrow 0,$$

也可证明 $F_M/F_M(i-1)$ 也是 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的对象. 另一方面, 易证 $F_M/F_M(i-1)$ 也是极小半自由 DG A- 模并且其有一个半自由滤

$$F_M(i)/F_M(i-1)\subseteq F_M(i+1)/F_M(i-1)\subseteq\cdots\subseteq F_M(n)/F_M(i-1)=F_M/F_M(i-1).$$

设 $\iota_i: F_M(i)/F_M(i-1)\to F_M/F_M(i-1)$ 为包含映射. 因为 $\mathrm{im}H(\iota_i)$ 是 $H(F_M/F_M(i-1))$ 的一个分次 $H(A)$- 子模并且 $H(A)$ 是诺特分次代数,

$$\mathrm{im}H(\iota_i)\cong\frac{H(F_M(i)/F_M(i-1))}{\mathrm{ker}H(\iota_i)}$$

也是一个有限生成 $H(A)$- 模. 设 $\mathrm{im}H(\iota_i)=H(A)f_{i,1}+H(A)f_{i,2}+\cdots+H(A)f_{i,m}$. 因为

$$H(F_M(i)/F_M(i-1))\cong\bigoplus_{j\in I_i}H(A)e_{i,j}$$

是一分次自由 $H(A)$- 模, 存在 I_i 的一个有限子集 $J_i=\{s_1,s_2,\dots,s_r\}$, 使得

$$f_{i,l}=\sum_{t=1}^{r}a_{l,t}\overline{e_{i,s_t}},\quad l=1,2,\dots,m,$$

其中每个 $a_{lt}\in H(A)$. 若 W_i 是一无限维空间, 则 I_i 和 $I_i\setminus J_i$ 都是无限集. 因此对任意的 $j\in I_i\setminus J_i$, 有 $e_{i,j}\in\mathrm{ker}H(\iota_i)$. 因为在 $H(F_M/F_M(i-1))$ 中 $[\iota_i(e_{i,j})]=[e_{i,j}]=0$, 存在 $x_{i,j}\in F_M/F_M(i-1)$, 使得 $\partial_{F_M}(x_{i,j})=e_{i,j}$. 这与 F_M 的极小性矛盾. 因此 W_i 维数有限.

这样, 就归纳地证明了每个 W_i $(i=0,1,\dots,n)$ 都是有限维的. 所以 F_M 有一组有限半自由基, 从而 M 是紧致的. 证毕.

因为我们对 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 上的 DG 模加了 Koszul 条件, 所以命题 4.1 只是部分地解决了引言中的问题 A. 受文 [9, 定理 5.7] 启发, 将 Koszul 条件加到同调光滑 DG 代数上. 当 DG 代数 A 是 Koszul 同调光滑 DG 代数并且 $H(A)$ 是具有平衡对偶复形的诺特分次代数时, 我们希望证明 $\mathrm{D_{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$. 为此, 先证明下面的引理和命题.

引理 4.2 设 A 是一连通上链 DG 代数, 假设 $F_{\Bbbk}$ 是 $\Bbbk_A$ 的一个极小半自由表示. 若 M 是下有界的 DG A- 模, 使得 $F_{\Bbbk}\otimes_A M$ 同调为零, 则 M 是同调为零的 DG 模.

证明 若 M 不是同调为零的 DG 模, 则存在 $b\in\mathbb{Z}$, 使得 $b=\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}$. 由文 [15, 命题 2.4], M 有一个极小半自由表示 F_M, 使得

$$F_M^{\#}\cong\coprod_{i\geq b}\Sigma^{-i}(A^{\#})^{(\Lambda^i)},$$

这里每个 Λ^i 是一指标集. 从而

$$H(F_{\Bbbk}\otimes_A M)=H(\Bbbk\,{}^L\!\otimes_A M)=H(\Bbbk\otimes_A F_M)=\coprod_{i\geq b}\Sigma^{-i}(\Bbbk)^{(\Lambda^i)}\neq 0.$$

这与已知条件 $F_{\Bbbk}\otimes_A M$ 同调为零矛盾. 因此 M 是同调为零的 DG 模. 证毕.

命题 4.3 设 A 是 Koszul, 同调光滑连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是有平衡对偶复形的诺特分次代数, 则 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的任意非零对象都是紧致 DG 模.

证明 因为 A 是 $\mathrm{D_{fg}}(A)$ 中的非零对象, 由引理 2.4 可知 $-\infty<\mathrm{CMreg}A<\infty$. 对任意的非零对象 $M\in\mathrm{D_{fg}}(A)$, 由引理 2.3 有

$$\mathrm{CMreg}M\leq \mathrm{Ext.reg}M+\mathrm{CMreg}A.$$

由假设 A 是 Koszul DG 代数, 有 $\mathrm{Ext.reg}_A\Bbbk=0<\infty$ 并且由引理 2.5 可知 $\mathrm{Ext.reg}M<\infty$. 因此 $\mathrm{CMreg}M$ 有限并且存在某个 t, 使得 $\mathrm{CMreg}M\leq t$. 由引理 2.5, $M^{\geq t}$ 是 Koszul DG 模.

对任意 $i\in\mathbb{Z}$, $\Bbbk$- 向量空间 M^i 可分解为

$$B^i\oplus H^i\oplus C^i \text{ 和 } B^i\oplus H^i=\mathrm{Ker}\,\partial_M^i,\quad C^i\xrightarrow{\cong}B^{i+1}=\mathrm{Im}\,\partial_M^i$$

并且 $H^i\cong H^i(M)$. 得到 M 的一个 DG A- 子模

$$\tau^{\geq i}M:\cdots\to 0\to H^i\oplus C^i\xrightarrow{\partial_M^i}M^{i+1}\xrightarrow{\partial_M^{i+1}}M^{i+2}\xrightarrow{\partial_M^{i+2}}\cdots,$$

有

$$H^j(\tau^{\geq i}M)=\begin{cases}0, & j<i\\ H^j(M), & j\geq i.\end{cases}$$

因此 $H(\tau^{\geq u}M)$ 是 $H(M)$ 的一个分次 $H(A)$- 子模. 因为 $M\in\mathrm{D_{fg}}(A)$ 并且 $H(A)$ 是诺特分次代数, $H(\tau^{\geq u}M)$ 是有限生成分次 $H(A)$- 模. 所以 $\tau^{\geq i}M\in\mathrm{D_{fg}}(A)$. 设 $b=\inf\{i\,|\,H^i(M)\neq 0\}$. 接下来, 要证明存在 $i\geq b$, 使得 $\tau^{\geq i}M$ 是一同调为零的 DG A- 模或是紧致 DG A- 模.

若 $H^t(M^{\geq t})=0$, 则存在 $u>t$, 使得 $M^{\geq t}$ 有一个极小半自由表示 G, 并且 G 有一组半自由基集中于次数 u, 则

$$\tau^{\geq u}M:\cdots\to 0\to H^u\oplus C^u\xrightarrow{\partial_M^u}M^{u+1}\xrightarrow{\partial_M^{u+1}}M^{u+2}\xrightarrow{\partial_M^{u+2}}\cdots$$

拟同构于 $M^{\geq t}$. 所以 $\tau^{\geq u}M$ 也是 Koszul DG A- 模, 并且由命题 4.1 可得 $\tau^{\geq u}M$ 为紧致 DG 模.

若 $H^t(M^{\geq t}) = \ker(\partial_M^t) \neq 0$, 则 $M^{\geq t}$ 有一半自由基集中次数 t 的极小半自由表示 $F_{M^{\geq t}}$, 有下面的短正合列

$$0 \to \tau^{\geq t}M \xrightarrow{\iota} M^{\geq t} \xrightarrow{\pi} \Sigma^{-t}B^t \to 0. \tag{4.1}$$

设 $F_{\Bbbk}$ 是 $\Bbbk_A$ 的极小半自由表示, 因为 A 是 Koszul DG 代数, $F_{\Bbbk}$ 有一组半自由基集中于次数 0. 将函子 $F_{\Bbbk}\otimes_A$- 作用于 (4.1) 给出一个新的短正合列

$$0 \to F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M \xrightarrow{F_{\Bbbk}\otimes_A \iota} F_{\Bbbk} \otimes_A M^{\geq t} \xrightarrow{F_{\Bbbk}\otimes_A \pi} F_{\Bbbk} \otimes_A \Sigma^{-t}B^t \to 0.$$

由此可以诱导出一个同调长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M) \xrightarrow{H^i(F_{\Bbbk}\otimes_A \iota)} H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A M^{\geq t}) \xrightarrow{H^i(F_{\Bbbk}\otimes_A \pi)}$$
$$H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A \Sigma^{-t}B^t) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M) \xrightarrow{H^{i+1}(F_{\Bbbk}\otimes_A \iota)} \cdots.$$

由 $F_{\Bbbk}$ 和 $F_{M^{\geq t}}$ 的极小性, 有

$$H(F_{\Bbbk} \otimes_A M^{\geq t}) = H(\Bbbk \overset{L}{\otimes}_A M^{\geq t}) = H(\Bbbk \otimes_A F_{M^{\geq t}}) = \Bbbk \otimes_A F_{M^{\geq t}}$$

并且

$$H(F_{\Bbbk} \otimes_A \Sigma^{-t}B^t) = \Sigma^{-t}(F_{\Bbbk} \otimes_A B^t).$$

因此, 当 $i \neq t$ 时, $H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A M^{\geq t}) = 0$ 并且 $H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A \Sigma^{-t}B^t) = 0$. 由连接同态的定义, 容易验证 $\delta^t = 0$. 因此 $H^i(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M) = 0$, 对任意 $i \neq t$. 若 $H^t(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M) = 0$, 则 $F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M$ 同调为零并且因此由引理 4.2 可知 $\tau^{\geq t}M$ 是同调为零的 DG A- 模. 所以 $\tau^{\geq t}M$ 是 $\mathrm{D}^C(A)$ 中的零对象. 若 $H^t(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M) \neq 0$, 则

$$H(\Bbbk \overset{L}{\otimes}_A \tau^{\geq t}M) = H(F_{\Bbbk} \otimes_A \tau^{\geq t}M)$$

集中于次数 t. 因此 $\tau^{\geq t}M$ 是 Koszul DG A- 模. 由命题 4.1 可知 $\tau^{\geq t}M$ 是紧致 DG A- 模.

这样, 我们就证明存在某个 $i \geq b$, 使得 $\tau^{\geq i}M$ 是同调为零的 DG A- 模或则紧致 DG A- 模. 另一方面, DG A- 商模 $M/\tau^{\geq i}M$ 为

$$\cdots \xrightarrow{\partial_M^{i-3}} M^{i-2} \xrightarrow{\partial_M^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{\partial_M^{i-1}} B^i \to 0.$$

所以有

$$H^j(M/\tau^{\geq i}M) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad j < b, \\ H^j(M), & \text{if} \quad b \leq j \leq i-1, \\ 0, & \text{if} \quad j \geq i. \end{cases}$$

因为 M 是 $\mathrm{D}^f(A)$ 中的一个对象, 并且 $H(A)$ 是诺特连通分次代数, 有

$$\dim_{\Bbbk} H^j(M) < \infty.$$

因此 $M/\tau^{\geq i}M$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{lf}}(A)$ 中的一个对象. 由文 [16, 命题 7.3], $M/\tau^{\geq i}M$ 是紧致 DG A- 模. 由短正合列

$$0 \to \tau^{\geq i}M \to M \to M/\tau^{\geq i}M \to 0$$

可知 M 是一个紧致 DG A- 模. 证毕.

最后一节中的例 5.1 和文 [16, 例 3.12] 都表明 $H(A)$ 是具有有限整体维数的左诺特分次代数这个条件要比 A 是同调光滑 DG 代数这个条件要强很多. 一个自然的问题是: 在 A 是同调光滑 DG 代数的条件下, 是否仍有 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$ 成立? 我们有下面的定理.

定理 4.4 若 A 是 Koszul 连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是有平衡对偶复形的诺特分次代数. 则 A 是同调光滑 DG 代数当且仅当 $\mathrm{D}^c(A)=\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$.

证明 显然, ${}_A\Bbbk$ 是 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中的一个对象. 因此, 当 $\mathrm{D}^c(A)=\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 时, A 是同调光滑 DG 代数. 反之, 若 A 是同调光滑 DG 代数, 则由命题 4.3 可知 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中任一对象都是紧致的. 另一方面, 任意紧致 DG A- 模 M 有一个有限半自由基的极小半自由表示 F_M. 所以 F_M 有一个半自由滤

$$0=F_M(-1)\subset F_M(0)\subset F_M(1)\subset\cdots\subset F_M(t)=F_M,$$

其中每个 $F_M(i)/F_M(i-1)=A\otimes V_i$ 是一个 DG 自由 A- 模, 并且 $\dim_{\Bbbk}V_i<\infty$. 我们有一个 DG A- 模的短正合列

$$0\to F_M(i-1)\to F_M(i)\to F_M(i)/F_M(i-1)\to 0,\quad i=1,2,\dots,t. \tag{4.2}$$

由 (4.2), 可以归纳地证明每个 $F_M(i)$ 都是 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中的一个对象. 因此 $M\in\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 并且 $\mathrm{D}^c(A)=\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$. 证毕.

5 一些例子

假设 A 是连通上链 DG 代数并且 $H(A)$ 是左诺特分次代数. 由 Eilenberg–Moore 表示的存在性, 若 $\mathrm{gl.dim}H(A)<\infty$ 则 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中的任意对象都是紧致的. 一个自然的问题是: 反过来, 结论是否仍成立? 本节, 将给出一些反例说明一般情况下结论不对.

例 5.1 设 A 是连通上链 DG 代数, 使得

$$A^{\#}=k\langle x,y\rangle/(xy+yx),$$

其中 $|x|=|y|=1$ 并且其微分 ∂_A 定义为 $\partial_A(x)=y^2$ 以及 $\partial_A(y)=0$.

由文 [16, 例 3.12], A 是 Koszul, 同调光滑 DG 代数并且

$$H(A)\cong k[\lceil x\rceil^2,\lceil y\rceil]/(\lceil y\rceil^2).$$

因为 $H(A)$ 是诺特 Gorenstein 分次代数, $H(A)$ 有平衡对偶复形. 由定理 4.4 可得 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$ 但 $\mathrm{gl.dim}H(A)=+\infty$.

例 5.2 设 A 是连通上链 DG 代数, 使得

$$A^{\#}=\Bbbk\langle x,y\rangle\bigg/\begin{pmatrix} x^2y-(\xi-1)xyx-\xi yx^2\\ xy^2-(\xi-1)yxy-\xi y^2x\end{pmatrix}$$

是由 1 次元素 x,y 生成的分次 down-up 代数, 并且其微分 ∂_A 定义为 $\partial_A(x)=y^2$ 及 $\partial_A(y)=0$, 其中 ξ 是取定的一个 3 次本原单位根.

由文 [14, 命题 6.1], A 是 Koszul Calabi–Yau DG 代数. 因此 A 是 Koszul 同调光滑 DG 代数, 又由文 [14, 命题 5.5] 可知

$$H(A)=\frac{\Bbbk\langle\lceil xy+yx\rceil,\lceil y\rceil\rangle}{\begin{pmatrix}\xi\lceil y\rceil\lceil xy+yx\rceil-\lceil xy+yx\rceil\lceil y\rceil\\ \lceil y^2\rceil\end{pmatrix}}.$$

所以 $H(A)$ 诺特 Gorenstein 分次代数, 从而 $H(A)$ 有平衡对偶复形. 由定理 4.4 得 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$ 但 $\mathrm{gl.dim}H(A)=+\infty$.

例 5.3 设 A 是连通上链 DG 代数, 使得

$$A^{\#}=\Bbbk\langle x,y\rangle\Big/\begin{pmatrix} x^2y-yx^2 \\ xy^2-y^2x \end{pmatrix}$$

是由 1 次元素 x,y 生成的分次 down-up 代数, 并且其微分 ∂_A 定义为 $\partial_A(x)=y^2$ 且 $\partial_A(y)=0$.

由文 [14, 命题 6.9], A 是 non-Koszul Calabi–Yau DG 代数. 因此 A 是一同调光滑 DG 代数. 又由文 [14, 命题 5.7] 可知

$$H(A)=\Bbbk[\lceil x^2\rceil,\lceil y\rceil,\lceil xy+yx\rceil]/(\lceil y\rceil^2).$$

所以 $H(A)$ 是诺特分次 Gorenstein 代数, 从而 $H(A)$ 是有平衡对偶复形. 由定理 4.1, $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)$ 中的任意 Koszul DG 模都是紧致的. 尽管如此, 当 A 不是 Koszul DG 代数时, 是否成立 $\mathrm{D}_{\mathrm{fg}}(A)=\mathrm{D}^c(A)$ 仍是一个公开问题.

致谢 感谢审稿人认真审阅本文, 并给予中肯的意见和建议.

参 考 文 献

[1] Avramov L. L., Buchweitz R. O., Iyengar S., Class and rank of differential modules, *Invent. Math.*, 2007, **169**: 1–35.

[2] Avramov L. L., Foxby H. B., Halperin S., Differential graded homologcial algebra, In preparation, 2004. Version from 02.07.2004.

[3] Carlesson G., On the homology of finite free $(\mathbb{Z}/2)^k$-complexes, *Invent. Math.*, 1983, **74**: 139–147.

[4] Frankild A., Jørgensen P., Homological properties of cochain differential graded algebras, *J. Algebra*, 2008, **320**: 3311–3326.

[5] Ginzburg V., Calabi–Yau algebras, arxiv: Math/0612139 v3, 2006.

[6] He J. W., Wu Q. S., Koszul differential graded algebras and BGG correspondence, *J. Algebra*, 2008, **320**: 2934–2962.

[7] He J. W., Wu Q. S., Koszul differential graded modules, *Sci. China Ser A*, 2009, **52**: 2027–2035.

[8] Jørgensen P., Amplitude inequalities for differential graded modules, *Forum Math.*, 2010, **22**: 941–948.

[9] Jørgensen P., Duality for cochain DG algebras, *Sci. China Math.*, 2013, **56**: 79–89

[10] Keller B., Deriving DG categories, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1994, **27**: 6–102.

[11] Krause H., Auslander–Reiten theory via Brown representability, *K-theory*, 2000, **20**: 331–344.

[12] Krause H., Auslander–Reiten triangles and a theorem of Zimmermann, *Bull. London Math. Soc.*, 2005, **37**: 361–372.

[13] Mao X. F., Gao X. D., Yang Y. N., et al., DG polynomial algebras and their homological properties, *Sci. China Math.*, http://engine.scichina.com/doi/10.1007/s11425-017-9182-1.

[14] Mao X. F., He J. W., Liu M., et al., Calabi–Yau properties of non-trivial Noetherian DG down-up algebras, *J. Algebra Appl.*, https://doi.org/10.1142/S0219498818500901.

[15] Mao X. F., Wu Q. S., Homological invariants for connected DG algebra, *Comm. Algebra*, 2008, **36**: 3050–3072.

[16] Mao X. F., Wu Q. S., Compact DG modules and Gorenstein DG algebras, *Sci. china Ser. A*, 2009, **52**: 648–676.

[17] Mao X. F., Wu Q. S., Cone length for DG modules and global dimension of DG algebras, *Comm. Algebra*, 2011, **39**: 1536–1562.

[18] Shklyarov D., Hirzebruch–Riemann–Roch-type formula for DG algebras, *Proc. London. Math. Soc.*, 2013, **106**: 1–32.