第61卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.4
2018年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)04-0685-10 **文献标识码: A**

拟线性 Schrödinger–Poisson 方程正解、负解、变号解的存在性

王文波

中科院武汉物理与数学研究所 武汉 430071
中国科学院大学 北京 100049
E-mail: wenbowangmath@163.com

李全清

红河学院数学学院 蒙自 661100
E-mail: shili06171987@126.com

摘 要 本文考虑拟线性 Schrödinger–Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u - \frac{1}{2}\Delta(u^2)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 f 是一个 C^1 超线性且次临界的非线性项, V 是正的有界位势. 利用扰动方法, 我们证明了该方程非平凡解、正解、负解、变号解的存在性.

关键词 拟线性 Schrödinger–Poisson 方程; 变号解; 扰动方法
MR(2010) 主题分类 35J63, 35J50, 35J20
中图分类 O175.29

Existence of Signed and Sign-changing Solutions for Quasilinear Schrödinger–Poisson System

Wen Bo WANG

Wuhan Institute of Physics and Mathematics, CAS, Wuhan 430071*, P. R. China*
University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*, P. R. China*
E-mail: *wenbowangmath@163.com*

Quan Qing LI

Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi 661100*, P. R. China*
E-mail: *shili06171987@126.com*

Abstract We consider the following quasilinear Schrödinger–Poisson system

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u - \frac{1}{2}\Delta(u^2)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

收稿日期: 2016-01-18; 接受日期: 2017-11-17
基金项目: 云南省地方本科高校 (部分) 基础研究联合专项; 红河学院科研基金博士专项项目 (XJ17B11)

where f is C^1, superlinear and subcritical nonlinearity, V is bounded positive potential. By using the method of perturbation, we prove the system has non-trivial solutions, positive solutions, negative solutions and sign-changing solutions.

Keywords Schrödinger–Poisson system; sign-changing solutions; the method of perturbation

MR(2010) Subject Classification 35J63, 35J50, 35J20

Chinese Library Classification O175.29

1 引言

考虑如下拟线性 Schrödinger–Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\phi u-\dfrac{1}{2}\Delta(u^2)u=f(x,u), & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.1}$$

该问题的数学物理背景见文 [5, 6]. Feng 和 Zhang [8] 也研究了方程 (1.1). 没有拟线性非凸项 $-\frac{1}{2}\Delta(u^2)u$, 方程 (1.1) 变为

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\phi u=f(x,u), & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.2}$$

许多学者研究了方程 (1.2) 的正解, 基态解和半经典解的存在性和集中性 [1, 7, 20, 21, 25]. 最近, 变号解的存在性引起了大家的关注 (见文 [10, 11, 17, 22]). 方程 (1.1) 的解 (u,ϕ), 如果 u 变号则称其是变号解. 对于方程 (1.2), 当 $V(x)\equiv 1$, $f(x,u)=|u|^{p-1}u$, 其中 $p\in[3,5)$, Ianni [10] 证明了径向对称变号解的存在性. 最近, 当 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$, $p\in(4,6)$ 时, Wang 和 Zhou [22] 使用变号 Nehari 流形

$$M=\{u\in H_V(\mathbb{R}^3): u^{\pm}\not\equiv 0, \langle I'(u),u^+\rangle=\langle I'(u),u^-\rangle=0\}$$

证明了方程 (1.2) 存在最小能量变号解. 他们在 M 上寻找极小元, 但是他们假设 $H_V(\mathbb{R}^3):=\{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2dx\}\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ $(2\le q<6)$ 是紧的. Shuai 和 Wang [19] 使用参数方法, 隐函数定理, 形变引理和度理论将文 [22] 的结果推广到一般非线性项. Liu, Wang 和 Zhang [17] 使用下降流不变集研究了方程 (1.2) 存在无穷多变号解. 当然如下拟线性 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+V(x)u-\frac{1}{2}\Delta(u^2)u=f(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^3 \tag{1.3}$$

也倍受关注 [12, 14, 15, 23]. 在文 [12, 24] 中, 作者使用扰动方法结合下降流不变集获得了变号解的存在性和多重性. 关于下降流不变集见文 [2, 3, 9, 16].

本文研究方程 (1.1) 非平凡解, 正解, 负解, 变号解的存在性. 据我们所知, 还没有文献研究方程 (1.1) 的变号解. 为了陈述我们的结果, 做如下假设:

(V) $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, 并且 $\inf_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)\ge a_0>0$.

(f_1) $f(x,u)\in C^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(f_2) $\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}=0$ 关于 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立.

(f_3) 存在 $4<p<22^*=12$, 使得 $|f(x,u)|\le c_0(|u|+|u|^{p-1})$, $\forall\, u\in\mathbb{R}$.

(f_4) 存在 $\alpha>4$, $r>0$, 使得 $c(r):=\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\,|u|=r}F(x,u)>0$, 并且 $\alpha F(x,u)\le f(x,u)u$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^3$, $|u|\ge r$, 其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$.

(f_5) 任给 $x\in\mathbb{R}^3$, $\frac{f(x,u)}{|u|^3}$ 关于 $u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 严格单增.

定理 1.1 如果 (V) 和 (f_1)–(f_4) 成立, 则方程 (1.1) 至少存在一个非平凡解 (是否变号不确定), 一个正解, 一个负解.

定理 1.2 如果 (V) 和 (f_1)–(f_4) 且 (f_5) 成立, 则方程 (1.1) 存在一个变号解.

已知的变号解的存在性结果 (如 Schrödinger–Poisson 方程, 见文 [22, 定理 1.1], [19, 定理 1.1] 和 [17, 定理 1.1]; 拟线性问题, 见文 [24, 定理 1.3] 和 [12, 定理 1.1]), 不能直接应用到方程 (1.1). 用变分法研究方程 (1.1) 有两个技术性的困难. 第一, 由于出现拟线性非凸项 $-\frac{1}{2}\Delta(u^2)u$, 其导致缺乏适当的函数空间使得能量泛函属于 C^1 类. 第二, 出现耦合非局部项 ϕu, 很难去构造下降流不变集. 有趣的是 $-\frac{1}{2}\Delta(u^2)u$ 和 ϕu 同时出现, 本文最初的想法是想用下降流不变集, 但失败了. 为克服这些困难, 我们结合了 [19] 和 [24] 两篇文献的想法.

2 非平凡解正解负解的存在性

本节总是认为 (V) 和 (f_1)–(f_4) 成立. 易知方程 (1.1) 相应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2dx+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)dx.$$

定义扰动泛函

$$I_\mu(u):=\frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^4+u^4)dx+\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3}W(x)u^2dx+I(u),$$

其中 $\mu\in(0,1)$, $W(x)$ 满足:

(W) $W(x)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$, $W(x)\geq 0$, $\lim_{|x|\to\infty}W(x)=\infty$.

设 $E:=W^{1,4}(\mathbb{R}^3)\cap H^1_W(\mathbb{R}^3)$, 其范数

$$\|u\|=\|u\|_{W^{1,4}}+\|u\|_{H^1_W}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^4+u^4)dx\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+W(x)u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2.1 固定 $\mu\in(0,1)$, $I_\mu\in C^1(E,\mathbb{R})$, 并且 I_μ 具有山路几何结构.

证明 $I_\mu\in C^1(E,\mathbb{R})$ 是标准的. 下面只证

(1) 存在 $\alpha,\rho>0$, 使得 $I_\mu(v)\geq\alpha$, $\forall\,\|v\|=\rho$;

(2) 存在 $w\in E\setminus\overline{B_\rho(0)}$, 使得 $I_\mu(w)<0$.

事实上, 根据 (f_1)–(f_3), $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $C(\varepsilon)>0$, 使得

$$|F(x,u)|\leq\varepsilon|u|^2+C(\varepsilon)|u|^p,\quad\forall\,(x,u)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

对 ε 充分小, 由 (V) 及 Sobolev 嵌入定理知

$$\begin{aligned}I_\mu(u)&\geq\frac{\mu}{2}\|u\|^4_{W^{1,4}}+\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3}W(x)u^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(u^2|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx\\&\quad-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2dx-C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^pdx\\&\geq C_1\|u\|^4_{W^{1,4}}+C_2\|u\|^2_{H^1_W}-C_3\|u\|^p\\&\geq C_4\|u\|^4-C_3\|u\|^p,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到 $\rho>0$ 充分小, 使得 $\|u\|_{H^1_W}\leq 1$. 选择 $\rho>0$ 充分小, (1) 便得证. 设 $\gamma(t):=F(x,t^{-1}u)t^\alpha$, $\forall\,t\in[1,+\infty)$. 对于 $|u|>r$, $t\in[1,\frac{|u|}{r}]$, 由 (f_4) 得 $\gamma'(t)\leq 0$. 因此

$\gamma(1) \geq \gamma(\frac{|u|}{r})$. 从而

$$F(x,u) \geq F\left(x, r\frac{u}{|u|}\right) \geq c_0|u|^\alpha.$$

对于 $|u| \leq r$, 根据 (f_2) 和 (f_3), 有

$$F(x,u) \geq -C|u|^2.$$

选择 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}$, $u \geq 0$, 则

$$I_\mu(tu) \leq C_1t^2 + C_2t^4 - C_3t^\alpha \xrightarrow{t\to\infty} -\infty. \tag{2.1}$$

证毕.

引理 2.2 固定 $\mu \in (0,1)$, I_μ 满足 (PS) 条件.

证明 设 $\{u_n\} \subset E$, 使得 $I_\mu(u_n)$ 有界并且 $I'_\mu(u_n) \to 0$.

首先证明 $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 由 (f_2), 取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}\mu(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})$, 存在 $\delta_0 > 0$ ($\delta_0 < r$, 其中 r 来自于 (f_4)), 使得

$$\left|\frac{1}{\alpha}f(x,u)u - F(x,u)\right| \leq \varepsilon_0u^2, \quad \forall\,|u| \leq \delta_0.$$

再由 (f_2), 当 $\delta_0 \leq |u| \leq r$ 时, 得

$$\left|\frac{1}{\alpha}f(x,u)u - F(x,u)\right| \leq C(\varepsilon_0)u^2.$$

因此, 当 $|u| \leq r$ 时, $\left|\frac{1}{\alpha}f(x,u)u - F(x,u)\right| \leq \varepsilon_0u^2 + C(\varepsilon_0)u^2$. 由于 $\lim_{|x|\to\infty} W(x) = \infty$, 存在 $\rho_0 > 0$, 使得

$$\frac{1}{4}\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)W(x) \geq C(\varepsilon_0), \quad \forall\,|x| \geq \rho_0.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3} W(x)u_n^2dx + \int_{|u_n|\leq r}\left(\frac{1}{\alpha}f(x,u)u - F(x,u)\right)dx \\
&\geq \frac{1}{4}\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3} W(x)u_n^2dx - C(\varepsilon_0)r^2|B_{\rho_0}|.
\end{aligned}$$

由 (f_4) 得

$$\begin{aligned}
C + o_n(1)\|u_n\| \geq\ & I_\mu(u_n) - \frac{1}{\alpha}\langle I'_\mu(u_n), u_n\rangle \\
=\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha}\right)\mu\|u_n\|_{W^{1,4}}^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\mu\int_{\mathbb{R}^3} W(x)u_n^2dx \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2u_n^2dx \\
&+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\alpha}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \\
\geq\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha}\right)\mu\|u_n\|_{W^{1,4}}^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2dx \\
&+ \frac{1}{4}\mu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^3} W(x)u_n^2dx - C(\varepsilon_0)r^2|B_{\rho_0}|.
\end{aligned}$$

这蕴含了 $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 不妨设在 E 中, $u_n \rightharpoonup u$.

下面证明在 E 中, $u_n \to u$. 注意到 $H_W^1 \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ $(2 \le q < 6)$ 是紧的 (见文 [4, 第 3 节] 或文 [26, 引理 3.4]). 因此, 由内插不等式知, 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_n \to u$, 其中 $2 \le q < 12$. 类似于文 [8, 引理 3.1],

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I'_\mu(u_n) - I'_\mu(u), u_n - u\rangle \\
&\ge C\mu \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla(u_n-u)|^4 + (u_n-u)^4)dx \\
&\quad + \mu \int_{\mathbb{R}^3} W(x)(u_n-u)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_n-u)|^2 + o_n(1),
\end{aligned}
$$

最后一个不等式要用到 Simon 不等式. 其蕴含在 E 中, $u_n \to u$. 证毕.

引理 2.3 存在与 μ 无关的正常数 C_1, C_2, 使得 I_μ 的非平凡临界点 u_μ 满足 $C_1 \le I_\mu(u_\mu) \le C_2$.

证明 此证明类似于文 [24, 引理 3.1]. 对于 $\rho > 0$, 记

$$
\Sigma_\rho = \left\{ u \in E : \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + \frac{a_0}{2}u^2 + |\nabla u|^2 u^2)dx \le \rho^2 \right\},
$$

其中 a_0 来自 (V). 由内插不等式知

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} F(x,u) &\le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx \\
&\le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + C(\varepsilon)\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx\right)^{\frac{p\theta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 u^2 dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{4}}.
\end{aligned}
$$

因此, 选择 $\varepsilon > 0$ 充分小, $u \in \partial\Sigma_\rho$, 得

$$
\begin{aligned}
I_\mu(u) &\ge \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + (V(x)-\varepsilon)u^2 + |\nabla u|^2u^2 - C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx \\
&\ge \frac{\rho^2}{2}(1 - C'(\varepsilon_0)\rho^{\frac{p(\theta+1)-4}{2}}).
\end{aligned}
$$

再令 $\rho > 0$ 充分小, 则 $I_\mu(u) \ge \frac{1}{4}\rho^2 := C_1$. 取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varphi \ge 0$, $T > 0$, 定义一条道路 $h : [0,1] \to E$, $h(t) = tT\varphi$. 当 T 充分大, 得

$$
\int_{\mathbb{R}^3} (1+h^2(1))|\nabla h(1)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} h^2(1)dx > \rho^2, \quad I_\mu(h(1)) < 0,
$$

并且 $\sup_{t\in[0,1]} I_\mu(h(1)) \le C_2$. 定义

$$
c_\mu = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)),
$$

其中 $\Gamma = \{\gamma \,|\, \gamma \in C([0,1],E), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = T\varphi\}$. 证毕.

如下结果是众所周知的 (见文 [8, 引理 3.2], [12, 定理 1.2] 或 [24, 定理 1.1]).

引理 2.4 令 $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 且 $\{u_n\} \subset E$ 是 I_{μ_n} 的临界点序列, 并且存在与 n 无关的常数 $C > 0$, 使得 $I_{\mu_n}(u_n) \le C$, 则在子列意义下, 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_n \to u \not\equiv 0$, u 是 I 的临界点.

证明 这个证明是标准的, 我们仅提供证明的基本步骤.

第 1 步 类似于引理 2.2, 可证 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

第 2 步 根据 Moser 迭代, 可证 $\{u_n\}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 中有界.

第 3 步 取试验函数 $\varphi = \psi e^{\pm u_n}$, 其中 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\psi \ge 0$, 可证 u 是 I 的临界点.

第 4 步 $u\not\equiv 0$. 由紧嵌入 $E\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ $(2\le q<22^*)$, 在子列意义下, 得

$$\mu_n\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^4+u_n^4)dx\to 0,\quad \mu_n\int_{\mathbb{R}^3}W(x)u^2\to 0,$$

并且在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_n\to u$; 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_n\nabla u_n\to u\nabla u$. 因此, $I_{\mu_n}(u_n)\to I(u)$. 由引理 2.3, $u\not\equiv 0$. 证毕.

由于要寻找 Schrödinger–Poisson 方程 (1.1) 的正解, 考虑泛函

$$\begin{aligned}I_\mu^+(u)=&\frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^4+u^4)dx+\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3}W(x)u^2+\frac12\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx\\&+\frac12\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2dx+\frac14\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u^+)dx.\end{aligned}$$

类似地, 可得负解的存在性.

3 变号解的存在性

为了获得变号解, 本节总认为 (V) 和 (f_1)–(f_5) 成立. 记

$$M_\mu=\{u\in E: u^\pm\not\equiv 0, \langle I'_\mu(u),u^+\rangle=\langle I'_\mu(u),u^-\rangle=0\}. \tag{3.1}$$

首先在流形 M_μ 上寻找极小元 u_μ. 其次证明在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_\mu\to u_0$, $\mu\to 0$. 最后证明 u_0 变号.

显然

$$\begin{aligned}\langle I'_\mu(u),\varphi\rangle=&\mu\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2\nabla u\nabla\varphi+u^3\varphi)dx+\mu\int_{\mathbb{R}^3}W(x)u\varphi dx\\&+\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla\varphi+V(x)u\varphi)dx+\int_{\mathbb{R}^3}(u^2\nabla u\nabla\varphi+|\nabla u|^2u\varphi)dx\\&+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u\varphi dx-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)\varphi dx,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\phi_u(x)=\phi_{u^+}(x)+\phi_{u^-}(x). \tag{3.3}$$

引理 3.1 固定 $\mu\in(0,1)$, 对于 $u\in E$ 并且 $u^\pm\not\equiv 0$, 存在唯一正数对 (s_u,t_u), 使得 $s_uu^++t_uu^-\in M_\mu$, 并且如果 $(s,t)\neq(s_u,t_u)$, 则 $I_\mu(su^++tu^-)<I_\mu(s_uu^++t_uu^-)$.

证明 利用 (3.2) 和 (3.3) 得

$$\langle I'_\mu(u),u^+\rangle=\langle I'_\mu(u^+),u^+\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^-}|u^+|^2dx,\quad \langle I'_\mu(u),u^-\rangle=\langle I'_\mu(u^-),u^-\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^+}|u^-|^2dx.$$

固定 $u\in E$, $u^\pm\not\equiv 0$,

$$su^++tu^-\in M_\mu\Leftrightarrow\begin{cases}\mu s^4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u^+|^4+|u^+|^4)dx+\mu s^2\int_{\mathbb{R}^3}W(x)|u^+|^2dx+s^2\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u^+|^2+V(x)|u^+|^2)dx\\ \quad+2s^4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|u^+|^2|\nabla u^+|^2dx+s^4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^+}|u^+|^2dx+s^2t^2\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^-}|u^+|^2dx\\ \quad=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,su^+)su^+dx,\\ \mu t^4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u^-|^4+|u^-|^4)dx+\mu t^2\int_{\mathbb{R}^3}W(x)|u^-|^2dx+t^2\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u^-|^2+V(x)|u^-|^2)dx\\ \quad+2t^4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|u^-|^2|\nabla u^-|^2dx+t^4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^-}|u^-|^2dx+s^2t^2\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^+}|u^-|^2dx\\ \quad=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,tu^-)tu^-dx.\end{cases}$$

类似于文 [19, 引理 2.1], 考虑带参数 $\zeta\in[0,1]$ 的方程组

$$\begin{cases} s^2C_1(u^+)+s^4C_2(u^+)+\zeta s^2t^2C_3(u^+,u^-)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,su^+)su^+dx,\\ t^2C_1'(u^-)+t^4C_2'(u^-)+\zeta s^2t^2C_3'(u^-,u^+)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,tu^-)tu^-dx.\end{cases}\tag{3.4}$$

定义 $\mathcal{Z}:=\{\zeta:0\le\zeta\le1$, 使得 (3.4) 关于 $(s,t)\in(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ 有唯一解$\}$, 其中 $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. 由 (f_5) 和引理 2.1, 结合隐函数定理, 有如下两个命题成立 (证明见文 [19, 引理 2.1]).

命题 3.2 $0\in\mathcal{Z}$.

命题 3.3 集合 $\mathcal{Z}$ 在 $[0,1]$ 中既开又闭.

基于以上两个命题, 引理 3.1 的第一个结论得证. 类似于 (2.1) 得到 $I_\mu(su^++tu^-)\to-\infty$, $|(s,t)|\to\infty$, 关于 u 一致. 结合第一个结论, 只需证明最大值不会在 $(0\times\mathbb{R}_+)\cup(\mathbb{R}_+\times0)$ 上可达. 这是显然的. 证毕.

引理 3.4 设

$$\begin{cases} g_{1,u}(s,t)=s^2C_1(u^+)+s^4C_2(u^+)+s^2t^2C_3(u^+,u^-)-\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,su^+)su^+dx,\\ g_{2,u}(s,t)=t^2C_1'(u^-)+t^4C_2'(u^-)+s^2t^2C_3'(u^-,u^-)-\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f(x,tu^-)tu^-dx.\end{cases}$$

如果 $g_{1,u}(1,1)\le0$, $g_{2,u}(1,1)\le0$, 则存在唯一 $(s_u,t_u)\in(0,1]\times(0,1]$, 使得 $g_{1,u}(s_u,t_u)=0$, $g_{2,u}(s_u,t_u)=0$.

证明 由引理 3.1, 类似于文 [19] 易知结论成立 (其源于 [22, 引理 2.1]). 证毕.

由引理 3.1 可以研究如下极小化问题

$$m_\mu=\inf_{u\in M_\mu}I_\mu(u).\tag{3.5}$$

引理 3.5 $m_\mu>0$ 可达.

证明 由于出现扰动项 $\frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^4+u^4)dx$ 并且假设 (f_4) 是局部 AR 条件, 我们不能够直接调用文 [19, 引理 2.4] 或 [22, 引理 2.3]. 记

$$\rho^2=\rho^2(u)=C_0\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2dx,$$

其中 C_0 由后面的 (3.6) 决定. 由内插不等式和 Sobolev 嵌入定理得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^pdx&\le C_1\left(\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx\right)^{\frac{p\theta}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{22^*}dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{22^*}}\\&\le C_2\left(\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx\right)^{\frac{p\theta}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{4}}\le C_2\rho^{\frac{p(1+\theta)}{2}}.\end{aligned}$$

因此, 由条件有

$$\begin{aligned}I_\mu(u)&\ge\frac12\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx+\frac12\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2dx-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx-C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^pdx\\&\ge\frac12\int_{\mathbb{R}^3}(C_0u^2+u^2|\nabla u|^2)dx-C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^pdx\\&\ge\frac12\rho^2-C(\varepsilon)C_2\rho^{\frac{p(1+\theta)}{2}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

取 $\rho > 0$ 充分小, 则

$$\frac{1}{2}\rho^2 - C(\varepsilon)C_2\rho^{\frac{p(1+\theta)}{2}} \geq \frac{1}{4}\rho^2. \tag{3.7}$$

对于 $u \in M_\mu$,

$$\rho_u^2(s,t) = s^4\int_{\mathbb{R}^3}|u^+|^2|\nabla u^+|^2dx + s^2\int_{\mathbb{R}^3}C_0|u^+|^2dx+t^4\int_{\mathbb{R}^3}|u^-|^2|\nabla u^-|^2)dx+t^2\int_{\mathbb{R}^3}C_0|u^-|^2dx.$$

由引理 3.1, 令 t, s 充分小, 使得 $\rho_u^2(s,t)$ 满足估计 (3.7), 得

$$I_\mu(u) \geq I_\mu(su^+ + tu^-) \geq \frac{1}{4}\rho^2.$$

接下来证明 m_μ 可达. 设 $\{u_n\} \subset M_\mu$ 是极小化序列. 类似于引理 2.2, 可证 $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 不妨设在 E 中 $u_n^\pm \rightharpoonup u_\mu^\pm$. 接下来证明 $u_\mu^\pm \not\equiv 0$.

情形 1 $\forall n$, $\|u_n^\pm\|_{H_W^1} \geq 1$, 结论成立.

情形 2 $\forall n$, $\|u_n^\pm\|_{H_W^1} < 1$. 由 $u_n \in M_\mu$, $\langle I'_\mu(u_n), u_n^\pm\rangle = 0$, 得

$$\begin{aligned}
\mu\int_{\mathbb{R}^3}&(|\nabla u_n^\pm|^4 + |u_n^\pm|^4)dx + \mu\int_{\mathbb{R}^3}W(x)|u_n^\pm|^2dx + \int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n^\pm|^2 + V(x)|u_n^\pm|^2)dx \\
&+2\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^2|\nabla u_n^\pm|^2dx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n^\pm|^2dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_n^\pm)u_n^\pm dx \\
&\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^2dx + C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^pdx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

注意到 $V(x)$ 有正的下界, 选择 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小后固定, 易知

$$(\|u_n^\pm\|_{W^{1,4}} + \|u_n^\pm\|_{H_W^1})^p \geq C_1\|u_n^\pm\|_{W^{1,4}}^4 + \|u_n^\pm\|_{H_W^1}^2 \geq C_2(\|u_n^\pm\|_{W^{1,4}} + \|u_n^\pm\|_{H_W^1})^4.$$

因此存在 $C > 0$, 使得 $\|u_n^\pm\| \geq C$, 情形 2 讨论完毕. 根据紧嵌入 $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$, $2 \leq s < 22^*$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_n^\pm)u_n^\pm dx = \int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_\mu^\pm)u_\mu^\pm dx, \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u_n^\pm)dx = \int_{\mathbb{R}^3}F(x,u_\mu^\pm)dx, \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n^\pm|^2dx = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_\mu}|u_\mu^\pm|^2dx. \tag{3.11}$$

由引理 3.1 和 3.4, 结合 Fatou 引理, 存在 $(s_{u_\mu}, t_{u_\mu}) \in (0,1] \times (0,1]$, 使得 $\bar{u}_\mu := s_{u_\mu}u_\mu^+ + t_{u_\mu}u_\mu^- \in M_\mu$. 由于条件 ($\mathrm{f}_5$) 蕴含 $uf(x,u) - 4F(x,u)$ 是非负函数并且关于 $|u|$ 是增函数, 因此得

$$m_\mu \leq I_\mu(\bar{u}_\mu) = I_\mu(\bar{u}_\mu) - \frac{1}{4}\langle I'_\mu(\bar{u}_\mu), \bar{u}_\mu\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\left(I_\mu(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'_\mu(u_n), u_n\rangle\right) = m_\mu.$$

证毕.

引理 3.6 设 $u_\mu \in M_\mu$ 并且 $I_\mu(u) = m_\mu$, 则 u_μ 是 I_μ 的临界点.

证明 受文 [13, 引理 2.5] (也见文 [18]) 的启发, 此处用反证法. 假设 u_μ 不是 I_μ 的临界点. 我们能找到 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\psi^\pm \not\equiv 0$, 使得 $\langle I'_\mu(u), \psi\rangle) \leq -1$. 选择 $\varepsilon > 0$ 很小, 使得

$$\langle I'_\mu(su^+ + tu^- + \sigma\psi), \psi\rangle \leq -\frac{1}{2}, \quad \forall (s,t,\sigma) \in B_\varepsilon(1,1,0), \tag{3.12}$$

其中 $B_\varepsilon(1,1,0)$ 是原点在 $(1,1,0)$, 半径为 ε 的球. 引进光滑截断函数 $0 \leq \eta \leq 1$ 满足

$$\eta(s,t) = \begin{cases} 1, & (s,t) \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(1,1)}, \\ 0, & (s,t) \in B_\varepsilon^c(1,1). \end{cases}$$

我们做如下扰动

$$\gamma(s,t)=\begin{cases} su^+ + tu^-, & (s,t)\in B_\varepsilon^c(1,1),\\ su^+ + tu^- + \varepsilon\eta(s,t)\psi, & (s,t)\in B_\varepsilon(1,1). \end{cases}$$

注意到 $\gamma(s,t)$ 关于 $(E,\|\cdot\|)$ 是连续曲线, 当 $\varepsilon>0$ 很小, 得 $\gamma(s,t)^\pm\not\equiv 0$, $(s,t)\in B_\varepsilon(1,1)$. 我们断言 $\sup_{s,t\geq 0} I_\mu(\gamma(s,t))<m_\mu$.

如果 $(s,t)\in B_\varepsilon^c(1,1)$, 根据引理 3.1, $I_\mu(\gamma(s,t))<m_\mu$. 如果 $(s,t)\in B_\varepsilon(1,1)$, 利用中值定理, 存在 $\bar\sigma\in(0,\varepsilon)$, 使得

$$\begin{aligned} I_\mu(\gamma(s,t)) &= I_\mu(su^+ + tu^-) + \langle I_\mu'(su^+ + tu^- + \bar\sigma\eta(s,t)\psi), \eta(s,t)\psi\rangle \\ &\leq I_\mu(su^+ + tu^-) - \frac{1}{2}\eta(s,t) < m_\mu. \end{aligned}$$

断言得证.

然而, 由引理 3.1, $(s,t)\in(1-\frac{\varepsilon}{2},1)\times(1-\frac{\varepsilon}{2},1)$,

$$\langle I_\mu'(su^+ + tu^- + \varepsilon\eta(s,t)\psi), u^+\rangle > 0,\quad \langle I_\mu'(su^+ + tu^- + \varepsilon\eta(s,t)\psi), u^-\rangle > 0.$$

类似地, $(s,t)\in(1,1+\frac{\varepsilon}{2})\times(1,1+\frac{\varepsilon}{2})$,

$$\langle I_\mu'(su^+ + tu^- + \varepsilon\eta(s,t)\psi), u^+\rangle < 0,\quad \langle I_\mu'(su^+ + tu^- + \varepsilon\eta(s,t)\psi), u^-\rangle < 0.$$

从而存在唯一 $(s_0,t_0)\in(1-\frac{\varepsilon}{2},1+\frac{\varepsilon}{2})\times(1-\frac{\varepsilon}{2},1+\frac{\varepsilon}{2})$, 使得 $s_0u^+ + t_0u^- + \varepsilon\eta(s_0,t_0)\psi\in M_\mu$. 这与断言矛盾. 证毕.

类似于引理 2.3 和引理 2.4, 在子列意义下, 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_\mu\to u_0\not\equiv 0$, $\mu\to 0$, u_0 是 I 的临界点. 最后要证明 u_0 变号.

引理 3.7 u_0 变号.

证明 这里我们对 μ 取极限, 因而不能使用引理 3.5 的证明过程. 在 (3.2) 中选择试验函数 $\varphi=u_\mu^+$, 结合 Sobolev 不等式, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u_\mu^+|^2dx + 2S\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^2dx + C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^pdx,$$

其中 $S=\inf_{0\neq u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx}{(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2^*}dx)^{\frac{2}{2^*}}}$. 注意到 $V(x)$ 有正的下界, 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 由内插不等式及 Young 不等式, 易知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^2dx + \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^pdx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^2dx\right)^{\frac{p\theta}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{22^*}} \\ &\leq \theta C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^2dx\right)^{\frac{p}{2}} + (1-\theta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\right)^{\frac{p}{22^*}}. \end{aligned}$$

这蕴含存在与 μ 无关的 $\delta>0$, 使得 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^2dx\geq\delta$ 或 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\geq\delta$. 不失一般性, 假设 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx\geq\delta$. 借鉴引理 2.4 的第 4 步, 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中, $u_\mu\nabla u_\mu\to u_0\nabla u_0$, $\mu\to 0$. 因此在 $L^{22^*}(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_\mu^+\to u_0^+$. 从而得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_0^+|^{22^*}dx = \lim_{\mu\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\mu^+|^{22^*}dx \geq \delta > 0.$$

因此 $u_0^+\neq 0$. 类似地, 有 $u_0^-\neq 0$. 证毕.

致谢 感谢审稿人和编辑的鼓励与帮助.

参 考 文 献

[1] Azzollini A., Pomponio A., Ground state solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **345**: 90–108.

[2] Bartsch T., Liu Z., Weth T., Nodal solutions of a p-Laplacian equation, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2005, **91**(3): 129–152.

[3] Bartsch T., Liu Z., Weth T., Sign-changing solutions of superlinear Schrödinger equations, *Comm. Partial Diff. Equ.*, 2004, **29**: 25–42.

[4] Bartsch T., Wang Z. Q., Existence and multiplicity rresults for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$, *Comm. Partial Diff. Equ.*, 1995, **20**: 1725–1741.

[5] Benci V., Fortunato D., An eigenvalue problem for the Schrödinger–Maxwell equations, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1998, **11**: 283–293.

[6] Benci V., Fortunato D., Solitary waves of the nonlinear Klein–Gordon equation coupled with the Maxwell equations, *Rev. Math. Phys.*, 2002, **14**: 409–420.

[7] Fang Y., Zhang J., Multiplicity of solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell system, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2011, **10**: 1267–1279.

[8] Feng X., Zhang Y., Existence of non-trivial solution for a class of modified Schrödinger–Poisson equations via perturbation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **442**: 673–683.

[9] Huang Y., Liu X., Sign-changing solutions for p-biharmonic equations with Hardy potantial in half-space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **444**: 1417–1437.

[10] Ianni I., Sign-changing radial solutions for the Schrödinger–Poisson–Slater problem, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2013, **41**: 365–385.

[11] Ianni I., Vaira G., Non-radial sign-changing solutions for the Schrödinger–Poisson problem in the semi classical limit, *Nonlinear Diff. Equ. and Appl. Nodea.*, 2012, **224**: 741–776.

[12] Liu J., Liu X., Wang Z. Q., Multiple sign-changing solutions for quasilinear elliptic equations via perturbation method, *Comm. Partial Diff. Equ.*, 2014, **39**: 2216–2239.

[13] Liu J. Q., Wang Y., Wang Z. Q., Solutions for quasilinear Schrödinger equations via Nehari method, *Comm. Partial Diff. Equ.*, 2004, **29**: 879–901.

[14] Liu X., Liu J., Wang Z. Q., Quasilinear elliptic equations with critical growth via perturbation method, *J. Diff. Equ.*, 2013, **254**: 102–124.

[15] Liu X., Liu J., Wang Z. Q., Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *Calc. Var. Partial Diff. Equ.*, 2013, **46**: 641–669.

[16] Liu Z., Sun J., Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations, *J. Diff. Equ.*, 2001, **172**: 257-299.

[17] Liu Z., Wang Z. Q., Zhang J., Infinitely many sign-changing solutions for the nonlinear Schrödinger–Poisson system, *Annali di Matematica*, 2016, **195**: 775–794.

[18] Ruiz D., Siciliano G., Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*, 2010, **23**: 1221–1233.

[19] Shuai W., Wang Q., Existence and asymptotic behavior of sign-changing solutions for the nonlinear Schrödinger–Poisson system in $\mathbb{R}^3$, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**: 3267–3282.

[20] Wang J., Tian L., Xu J., et al., Existence and concentration of positive solutions for semilinear Schrödinger–Poisson systems in $\mathbb{R}^3$, *Calc. Var. Partial Diff. Equ.*, 2013, **48**: 243–273.

[21] Wang J., Tian L., Xu J., et al., Existence of multiple solutions for Schrödinger–Poisson systems with critical groth, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**: 2441–2471.

[22] Wang Z., Zhou H., Sign-changing solutions for the nonlinear Schrödinger–Poisson system in $\mathbb{R}^3$, *Calc. Var. Partial Diff. Equ.*, 2015, **52**: 927–943.

[23] Wu X., Wu K., Existence of positive solutions, negative solutions and high energy solutions for quasi-linear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2014, **16**: 48–64.

[24] Zhang W., Liu X., Infinitely many sign-changing solutions for a quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **427**: 722–740.

[25] Zhao L., Zhao F., Positive solutions for Schrödinger–Poisson equations with critical exponent, *Nonlinear Anal.*, 2009, **70**: 2150–2164.

[26] Zou W. M., Schechter M., Critical Point Theory and Its Applications, Springer, New York, 2006.