第61卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.4
2018年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)04-0663-12 **文献标识码: A**

带非光滑核的多线性 Marcinkiewicz 积分的加权界

王松柏

湖北师范大学数学与统计学院 黄石 435002
E-mail: haiyansongbai@163.com

摘 要 我们引入了带非光滑核的多线性 Marcinkiewicz 积分算子. 设 $p_1,\dots,p_m\in(1,\infty)$ 和 $p\in(0,+\infty)$ 满足 $1/p_1+\cdots+1/p_m=1/p$, 记 $\vec{P}=(p_1,\dots,p_m)$, 又设向量权 $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_m)\in A_{\vec{P}}$ 和 $\nu_{\vec{\omega}}=\prod_{k=1}^m\omega_k^{p/p_k}$, 得到了 Marcinkiewicz 积分算子从 $L^{p_1}(\omega_1)\times\cdots\times L^{p_m}(\omega_m)$ 到 $L^p(\nu_{\vec{\omega}})$ 的常数界.

关键词 多线性 Marcinkiewicz 积分; 非光滑核; 多权
MR(2010) 主题分类 42B25
中图分类 O175.2

Weighted Bounds for Multilinear Marcinkiewicz Integrals with Nonsmooth Kernel

Song Bai WANG

College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, P. R. China
E-mail: haiyansongbai@163.com

Abstract We introduce the multilinear Marcinkiewicz integrals with nonsmooth kernel and get their the weighted bounds from $L^{p_1}(\omega_1)\times\cdots\times L^{p_m}(\omega_m)$ to $L^p(\nu_{\vec{\omega}})$ with $p_1,\dots,p_m\in(1,\infty)$, $1/p_1+\cdots+1/p_m=1/p$ and $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_m)$ a multiple $A_{\vec{P}}$ weights, where $\vec{P}=(p_1,\dots,p_m)$ and $\nu_{\vec{\omega}}=\prod_{k=1}^m\omega_k^{p/p_k}$.

Keywords multilinear Marcinkiewicz integrals; non-smooth kernel; multiple weight
MR(2010) Subject Classification 42B25
Chinese Library Classification O175.2

1 引言

给定 $m\in\mathbb{N}$. 设 $K(x,y_1,\dots,y_m)$ 是定义在 $\overbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}^{m+1}\backslash\{(x,y_1,\dots,y_m):x=y_1=\cdots=$

收稿日期: 2017-09-19; 接受日期: 2017-06-26
基金项目: 湖北省教育厅青年人才资助项目 (Q20162504)

$y_m\}$ 上的局部可积函数. 我们在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上定义多线性算子 F 如下:

$$F(f_1,\ldots,f_m)(x,\tau)=\int_{(B(x,\tau))^m}K(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{k=1}^m f_k(y_k)dy_1\cdots dy_m,$$

从而, 定义多线性 Marcinkiewicz 积分算子 μ 为

$$\mu(f_1,\ldots,f_m)(x)=\left(\int_0^\infty |F(f_1\ldots,f_m)(x,\tau)|^2\frac{d\tau}{\tau^{2m+1}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

首先介绍广义恒等逼近算子族. 称算子族 $\{A_t\}_{t>0}$ 是一个恒等逼近, 是指对任何的 $t>0$, A_t 可以由下述意义下的核来表示: 当 $p\in[1,\infty]$ 时, 对每一个函数 $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 和几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$A_tu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}a_t(x,y)u(y)dy,$$

并且对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $t>0$, 核函数 a_t 满足

$$|a_t(x,y)|\le h_t(x,y)=t^{-n/s}h(|x-y|/t^{1/s}), \tag{1.2}$$

其中, $s>0$ 为常数以及 h 是一个正的有界单调递减函数并存在常数 $\eta>0$,

$$\lim_{r\to\infty}r^{n+\eta}h(r)=0. \tag{1.3}$$

假设 1.1 对每一个固定的 $j, 1\le j\le m$ 存在以 $\{a_t^j(x,y)\}_{t>0}$ 为核函数的恒等逼近 $\{A_t^j\}_{t>0}$ 与核函数 $K_t^j(x;y_1,\ldots,y_m)$, 使得对具有紧支集的有界函数 $f_1,\ldots,f_m$ 和 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\bigcap_{k=1}^m \mathrm{supp}f_k$, 有

$$F(f_1,\ldots,f_{j-1},A_t^jf_j,f_{j+1},\ldots,f_m)(x)=\int_{(B(x,\tau))^m}K_t^j(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{k=1}^m f_k(y_k)d\vec{y},$$

并存在函数 $\phi\in C(\mathbb{R})$, $\phi\subset[-1,1]$, 和常数 $\epsilon\in(0,1]$, 使得对所有的 $x,y_1,\ldots,y_m\in\mathbb{R}^n$ 和 $t>0$, 当 $2t^{1/s}\le|x-y_j|$ 时,

$$\begin{aligned}&|K(x,y_1,\ldots,y_m)-K_t^j(x,y_1,\ldots,y_m)|\\&\quad\lesssim\frac{t^{\epsilon/s}}{(\sum_{k=1}^m|x-y_k|)^{mn+\epsilon-m}}+\frac{1}{(\sum_{k=1}^m|x-y_k|)^{mn-m}}\sum_{1\le i\le m,i\ne j}\phi\left(\frac{|y_i-y_j|}{t^{1/s}}\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

进一步假设核函数 K 满足下面的尺寸条件: 对所有的 $x,y_1,\ldots,y_m\in\mathbb{R}^n$, 只要存在某个 $1\le j\le m$, 满足 $x\ne y_j$, 有

$$|K(x,y_1,\ldots,y_m)|\lesssim\frac{1}{(\sum_{k=1}^m|x-y_k|)^{mn-m}} \tag{1.5}$$

以及正则性条件: 存在常数 $\gamma\in(m,+\infty)$, 使得对 $x,x',y_1,\ldots,y_m\in\mathbb{R}^n$ 满足 $8|x-x'|<\min_{1\le j\le m}|x-y_j|$, 和每个正数 D 满足 $2|x-x'|<D$ 和 $4D<\min_{1\le j\le m}|x-y_j|$ 时, 有

$$|K(x,y_1,\ldots,y_m)-K(x',y_1,\ldots,y_m)|\lesssim\frac{D^\gamma}{(\sum_{k=1}^m|x-y_k|)^{mn+\gamma-m}}. \tag{1.6}$$

再来介绍由 Lerner 等人 [7] 引入的多权概念. 设 $p_1,\ldots,p_m\in[1,\infty)$ 和 $p\in(0,\infty)$ 满足等式 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$. 又设 $\vec{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, $\vec{P}=(p_1,\ldots,p_m)$ 和 $\nu_{\vec{\omega}}=\prod_{k=1}^m\omega_k^{p/p_k}$. 称 $\vec{\omega}\in A_{\vec{P}}$, 如果

$$[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}=\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\nu_{\vec{\omega}}(x)dx\right)\prod_{k=1}^m\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega_k^{1-p_k'}(x)dx\right)^{p/p_k'}<\infty.$$

当某个 $p_k=1$, $(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_k^{1-p_k'}(x)dx)^{1/p_k'}$ 就用 $(\inf_Q \omega_k)^{-1}$ 来代替.

主要结果如下.

定理 1.2 设 $m\geq 2$, μ 为 (1.1) 意义下具有核函数 K 的多线性 Marcinkiewicz 积分算子.

假设:

(1) 对满足 $1/r=1/r_1+\cdots+1/r_m$ 的某数组 $r_1,\ldots,r_m\in(1,\infty)$, $r\in(0,\infty)$, μ 是从 $L^{r_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{r_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 有界的;

(2) 核函数 K 满足尺寸条件 (1.5) 和正则性条件 (1.6);

(3) F 满足假设 1.1. 如果 $p_1,\ldots,p_m\in(1,\infty)$ 满足 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$, 和 $\vec{\omega}\in A_{\vec{P}}$, 则

$$\|\mu(f_1,\ldots,f_m)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}\lesssim[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max\{1,\frac{p_1'}{p},\ldots,\frac{p_m'}{p}\}}\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{L^{p_k}(\omega_k)}. \tag{1.7}$$

现在, 设 b 是一个局部可积函数. 对 $1\leq j\leq m$, 定义交换子 $[b,\mu]_j$ 为

$$[b,\mu]_j(f_1,\ldots,f_m)(x)=\left(\int_0^\infty|[b,F]_j(f_1,\ldots,f_m)(x,\tau)|^2\frac{d\tau}{\tau^{2m+1}}\right)^{1/2},$$

其中

$$[b,F]_j(f_1,\ldots,f_m)(x,\tau)=\int_{(B(x,\tau))^m}K(x,y_1,\ldots,y_m)[b(x)-b(y_j)]\prod_{k=1}^m f_k(y_k)d\vec{y}.$$

令 $b_1,\ldots,b_m$ 为局部可积函数并记 $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_m)$. 由 μ 和 $\vec{b}$ 生成的次线性交换子为

$$\mu_{\vec{b}}(f_1,\ldots,f_m)(x)=\sum_{j=1}^m[b_j,\mu]_j(f_1,\ldots,f_m)(x), \tag{1.8}$$

则有 $\mu_{\vec{b}}$ 的加权常数界.

定理 1.3 设 $m\geq 2$, μ 如定理 1.2 中的多线性 Marcinkiewicz 积分, $\mu_{\vec{b}}$ 为 (1.8) 中定义的交换子. 则只要 $p_1,\ldots,p_m\in(1,\infty)$ 满足 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$, $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$ 和 $\vec{\omega}\in A_{\vec{P}}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mu_{\vec{b}}(f_1,\ldots,f_m)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}\lesssim&\left(\sum_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\right)[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max(1,\frac{p_1'}{p},\ldots,\frac{p_m'}{p})}\\&\times\left([\mu_{\vec{\omega}}]_{A_\infty}+\sum_{k=1}^m[\sigma_k]_{A_\infty}\right)\prod_{k=1}^m\|f_k\|_{L^{p_k}(\omega_k)}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

交换子 $\mu_{\vec{b}}$ 的端点弱型常数界也有如下定理.

定理 1.4 设 $m\geq 2$, μ 如定理 1.2 中的多线性 Marcinkiewicz 积分, $\mu_{\vec{b}}$ 为 (1.8) 中定义的交换子, 则只要 $p_1,\ldots,p_m\in[1,\infty)$ 满足 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$, $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$ 和 $\vec{\omega}\in A_{\vec{P}}$, 有

$$\begin{aligned}&\nu_{\vec{\omega}}\{x\in\mathbb{R}^n:\mu_{\vec{b}}(f_1,\ldots,f_m)(x)>\lambda^m\}\\&\lesssim\left(\sum_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\right)[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max(1,\frac{p_1'}{p},\ldots,\frac{p_m'}{p})}\left([\mu_{\vec{\omega}}]_{A_\infty}+\sum_{k=1}^m[\sigma_k]_{A_\infty}\right)\\&\quad\times\prod_{k=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_k(y_k)|}{\lambda}\log\left(1+\frac{|f_k(y_k)|}{\lambda}\right)\omega_k dy_k\right)^{\frac{1}{m}}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

注 1.5 我们的方法源于文 [1, 2, 5, 6, 8], 但不知道以上的常数界是否是最优的.

2 预备知识

称 $\mathbb{R}^n$ 中的方体是指左开右闭方体

$$Q=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i),\quad a_i<b_i.$$

给定方体 $Q_0\subset\mathbb{R}^n$, 令 $\mathscr{D}(Q_0)$ 表示 Q_0 的所有二进方体, 具体来说, 这些方体是由 Q_0 不断地进行二等分形成的, 每一次划分后, 每一个子方体都有 2^n 个全等的子方体. 称这样的子方体为 Q_0 的后代.

称 $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的二进方体格子, 它是由满足下列性质的方体的集合:

(i) 如果 $Q\in\mathscr{D}$, 则 Q 的后代也在 $\mathscr{D}$ 中;

(ii) 任何两个 $Q',Q''\in\mathscr{D}$ 都有相同的祖辈, i.e., 存在 $Q\in\mathscr{D}$, 使得 $Q',Q''\in\mathscr{D}(Q)$;

(iii) 对每一个紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$, 存在方体 $Q\in\mathscr{D}$ 包含 K.

设 $0<\eta<1$, 称 $\mathbb{R}^n$ 中的方体族 $\mathscr{S}$ 是 η 稀疏的, 如果对每一个方体 $Q\in\mathscr{S}$, 存在可测集 $E_Q\subset Q$, 使得 $|E_Q|\geq\eta|Q|$, 并且 $\{E_Q\}_{Q\in\mathscr{S}}$ 是点态不交的. 通常地, η 仅依赖于维数, 由于它不是本质的, 我们经常略过.

给定一个稀疏集 $\mathscr{S}\subset\mathscr{D}$, 定义稀疏算子 $\mathscr{A}_{\mathscr{S}}$ 和 $\mathscr{A}_{\mathscr{S},L(\log L)}$ 为

$$\mathscr{A}_{\mathscr{S}}(f_1,\dots,f_m)(x)=\sum_{Q\in\mathscr{S}}\prod_{k=1}^{m}\langle f_k\rangle_Q\chi_Q(x),\tag{2.1}$$

这里, $\langle f\rangle_Q$ 表示函数 f 在方体 Q 上的平均值. 以及

$$\mathscr{A}_{\mathscr{S},L(\log L)}(f_1,\dots,f_m)(x)=\sum_{Q\in\mathscr{S}}\prod_{k=1}^{m}\|f_k\|_{L(\log L),Q}\chi_Q(x),\tag{2.2}$$

其中

$$\|f_k\|_{L(\log L),Q}=\left\{\lambda>0,\ \frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{|f_k(y)|}{\lambda}\log\left(1+\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)dy\leq 1\right\}.$$

甚至, 令 $b_1,\dots,b_m$ 为局部可积函数, 也定义

$$\mathscr{A}_{\mathscr{S},b}(f_1,\dots,f_m)(x)=\sum_{Q\in\mathscr{S}}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i(x)-\langle b_i\rangle_Q|\right)\prod_{k=1}^{m}\langle f_k\rangle_Q\chi_Q(x).\tag{2.3}$$

如果 $p_1,\dots,p_m\in(1,\infty)$, $p\in(0,\infty)$ 满足 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$ 和 $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_m)\in A_{\vec{P}}$, 记 $\sigma_j=\omega_j^{1-p_j'}$, $j=1,\dots,m$, 李康伟, Moen 和孙文昌 [9] 证明了

$$\|\mathscr{A}_{\mathscr{S}}(f_1,\dots,f_m)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}\lesssim[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max(1,\frac{p_1'}{p},\dots,\frac{p_m'}{p})}\prod_{j=1}^{m}\|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)},\tag{2.4}$$

陈杰诚和胡国恩 [1] 推广了这个结果

$$\|\mathscr{A}_{\mathscr{S},L(\log L)}(f_1,\dots,f_m)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}\lesssim[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max(1,\frac{p_1'}{p},\dots,\frac{p_m'}{p})}\prod_{j=1}^{m}[\sigma_j]_{A_\infty}\|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)}\tag{2.5}$$

和

$$\|\mathscr{A}_{\mathscr{S},b}(f_1,\dots,f_m)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}\lesssim[\vec{\omega}]_{A_{\vec{P}}}^{\max(1,\frac{p_1'}{p},\dots,\frac{p_m'}{p})}[\nu_{\vec{\omega}}]_{A_\infty}\prod_{j=1}^{m}\|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)}.\tag{2.6}$$

3 定理的证明

设 T 是 m- 次线性算子, 定义 T 为算子

$$\mathscr{M}_T(f_1,\dots,f_m)(x)=\sup_{Q\ni x}\sup_{\xi\in Q}\|T(f_1,\dots,f_m)(\xi)-T(f_1\chi_{3Q},\dots,f_m\chi_{3Q})(\xi)\|_{L^\infty(Q)}.$$

给定方体 Q_0, 对 $x\in Q_0$, 定义局部算子 $\mathscr{M}_T,Q_0$ 为

$$\begin{aligned}&\mathscr{M}_{T,Q_0}(f_1,\dots,f_m)(x)\\&\quad=\sup_{Q\ni x,Q\subset Q_0}\sup_{\xi\in Q}\|T(f_1\chi_{3Q_0},\dots,f_m\chi_{3Q_0})(\xi)-T(f_1\chi_{3Q},\dots,f_m\chi_{3Q})(\xi)\|_{L^\infty(Q)}.\end{aligned}$$

类似于文 [5] 的证明, 李康伟证明了多线性算子的稀疏控制定理.

引理 3.1 [8] 假设次线性算子 T 是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的和 $\mathscr{M}_T$ 是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的, 则对具有紧支集的函数 $f_i\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $i=1,\dots,m$, 存在稀疏族 $\mathscr{S}$, 使得对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|T(f_1,\dots,f_m)(x)|\lesssim\mathscr{A}_{\mathscr{S}}(f_1,\dots,f_m)(x).$$

陈杰诚和胡国恩也证明了交换子的稀疏控制定理.

引理 3.2 [1] 假定 T 和 $\mathscr{M}_T$ 都是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的, 则对紧支集函数 $f_1,f_2,\dots,f_m$, 存在稀疏集 $\mathscr{S}$, 使得对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}|T_{\vec{b}}(f_1,\dots,f_m)(x)|\lesssim&\sum_{i=1}^m\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle|b_i-\langle b_i\rangle Q|\,|f_i|\rangle_Q\prod_{j\neq i}\langle|f_j|\rangle_Q\chi_Q(x)\\&+\sum_{i=1}^m\sum_{Q\in\mathscr{S}}|b_i(x)-\langle b_i\rangle_Q|\prod_{j=1}^m\langle f_j\rangle_Q\chi_Q(x).\end{aligned}\tag{3.1}$$

注 3.3 由广义的 Hölder 不等式知

$$\langle|b_i-\langle b_i\rangle Q||f_i|\rangle_Q\lesssim\|b_i\|_{\mathrm{BMO}}\|f_i\|_{L\log L,Q}.$$

进一步推得 (3.1) 为

$$|T_{\vec{b}}(f_1,\dots,f_m)(x)|\lesssim\mathscr{A}_{\mathscr{S},L\log L}(f_1,\dots,f_m)(x)+\mathscr{A}_{\mathscr{S},\vec{b}}(f_1,\dots,f_m)(x).$$

由著名的 1/3 技巧 (见文 [4, 引理 2.5]), 如果 $\mathscr{S}$ 是一个稀疏集, 则存在二进格子 $\mathscr{D}_1,\dots,\mathscr{D}_{2^n}$ 和稀疏集 $\mathscr{S}_i\subset\mathscr{D}_i$, $i=1,\dots,3^n$, 使得

$$\mathscr{A}_{\mathscr{S}}(f_1,\dots,f_m)(x)\lesssim\sum_{i=1}^{3^n}\mathscr{A}_{\mathscr{S}_i}(f_1,\dots,f_m)(x).$$

结合这个事实, 引理 3.1 和 3.2, 注 3.3, (2.4), (2.5), (2.6), 如文 [1] 中的叙述, 对于定理 1.2–1.4, 仅需证明 μ 和 $\mathscr{M}_\mu$ 是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的.

首先来证明 μ 是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的.

定理 3.4 设 $m\geq 2$, μ 是 (1.1) 意义下具有核函数 K 的多线性 Marcinkiewicz 积分算子并满足假设 1.1. 给定满足 $1/r=1/r_1+\cdots+1/r_m$ 的数组 $r_1,\dots,r_m\in(1,\infty)$, $r\in(0,\infty)$, 设 μ 是从 $L^{r_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{r_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 则 μ 能扩张成一个从 m- 乘积空间 $L^1(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1/m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子.

证明 我们采用文 [2] 的思想. 不失一般性, 利用齐性, 假设 $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=1$. 只需要证明存在常数 $C>0$, 使得

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu(f_1,\dots,f_m)(x)|>\lambda\}|\le C\lambda^{-1/m}. \tag{3.2}$$

为简单起见, 只给出 $m=2$ 的证明过程. 对 $\lambda^{1/2}$ 关于函数组 $\{f_i\}_{i=1}^2$ 运用 Calderón–Zygmund 分解, 有

$$f_i=g_i+b_i=g_i+\sum_i b_{i,k},$$

满足

(a) $|g_i(x)|\le C\lambda^{1/2}$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$;

(b) 存在两两不交的方体列 $\{Q_{i,k}\}$, 使得每一个 $b_{i,k}$ 的支集包含于 $Q_{i,k}$, 并且有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|b_{i,k}(x)|dx\le C\lambda^{1/2}|Q_{i,k}|;$$

(c) $\sum_k|Q_{i,k}|\le C\lambda^{-1/2}$.

置

$$E_\lambda^{(1)}=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu(g_1,g_2)(x)|>\frac{\lambda}{4}\Big\};\quad E_\lambda^{(2)}=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu(b_1,g_2)(x)|>\frac{\lambda}{4}\Big\};$$
$$E_\lambda^{(3)}=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu(g_1,b_2)(x)|>\frac{\lambda}{4}\Big\};\quad E_\lambda^{(4)}=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu(b_1,b_2)(x)|>\frac{\lambda}{4}\Big\}.$$

由次线性性, 只需要证明 (3.2) 式对 4 个集合 $E_\lambda^{(s)}$, $s=1,2,3,4$ 都成立. 首先考虑 $E_\lambda^{(1)}$, 由 Chebychev 不等式 μ 的 $L^{r_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{r_2}(\mathbb{R}^n)\to L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界性, 有

$$|E_\lambda^{(1)}|\le C\lambda^{-r}\|g_1\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n)}^r\|g_2\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^n)}^r\le C\lambda^{-1/2}, \tag{3.3}$$

这里用到不等式 $\|g_i\|_{L^{r_i}(\mathbb{R}^n)}\le C\lambda^{(1-1/r_i)/2}$, $i=1,2$.

接下来考虑 $E_\lambda^{(2)}$. 令 $x_{Q_{i,k}}$ 是方体 $Q_{i,k}$ 的中心, $l(Q_{i,k})$ 为方体 $Q_{i,k}$ 的边长. 利用方体族 $\{Q_{i,k}\}_k$, 定义 Marcinkiewicz 函数为

$$\mathscr{J}_{i,\epsilon}(x)=\sum_k\frac{(l(Q_{i,k}))^{n+\epsilon}}{(l(Q_{i,k})+|x-x_{Q_{i,k}}|)^{n+\epsilon}},$$

并从文 [2, 3] 发现, 当 $p>n/(n+\epsilon)$ 时,

$$\|\mathscr{J}_{i,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C\lambda^{-1/(2p)}, \tag{3.4}$$

其中 ϵ 由式 (1.4) 确定. 取 $t_{1,k}=(l(Q_{1,k}))^s$, 其中 s 如式 (1.2) 所示, 有

$$\mu(b_1,g_2)(x)\le\mu\bigg(\sum_k A_{t_{1,k}}b_{1,k},g_2\bigg)(x)+\mu\bigg(\sum_k(b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k}),g_2\bigg)(x).$$

当 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $y\in Q_{1,k}$ 时, 注意到

$$l(Q_{1,k})+|x-y|\approx l(Q_{1,k})+|x-x_{Q_{1,k}}|.$$

利用 (1.2), (1.3) 和 Calderón–Zygmund 分解的性质 (b), 可得

$$\bigg|\sum_k A_{t_{1,k}}b_{1,k}\bigg|\le C\lambda^{1/2}J_{1,\epsilon}(x),$$

这里用到 $0<\epsilon<\eta$ 和单调递减函数 h 的尺寸估计. 再由 (3.4), 我们估计

$$\begin{aligned}\Big|\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\Big|\mu\Big(\sum_k A_{t_{1,k}}b_{1,k},g_2\Big)(x)\Big|>\frac{\lambda}{4}\Big\}\Big| &\le C\lambda^{-q}\|\sum_k A_{t_{1,k}}b_{1,k}\|^r_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n)}\|g_2\|^r_{L^{r_2}(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C\lambda^{-q}\lambda^{\frac{r}{2}}\lambda^{\frac{r}{2}(1-\frac{1}{r_2})}\|\mathscr{J}_{1,\epsilon}\|^r_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C\lambda^{-1/2}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

记 $Q^*_{i,k}=5Q_{i,k}$, 并且令 $\Omega_i=\bigcup_k Q^*_{i,k}$, $i=1,2$. 由 Calderón–Zygmund 分解的性质 (c), 有 $|\Omega_i|\le C\lambda^{-1/2}$, 则

$$\begin{aligned}&\Big|\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\Big|\mu\Big(\sum_k(b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k}),g_2\Big)(x)\Big|>\frac{\lambda}{4}\Big\}\Big|\\ &\le C\lambda^{-1/2}+\frac{4}{\lambda}\sum_k\int_{(Q^*_{i,k})^c}|\mu((b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k}),g_2)(x)|dx.\end{aligned}\tag{3.6}$$

根据 (1.2), 进一步得

$$\begin{aligned}&\sum_k\int_{(Q^*_{i,k})^c}|\mu((b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k}),g_2)(x)|dx\\ &\le\sum_k\int_{(Q^*_{i,k})^c}\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{B(x,\tau)^2}|K(z,y_1,y_2)-K^1_{t_{1,k}}(z,y_1,y_2)|\,|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}dx\\ &\le C\sum_k\int_{(Q^*_{i,k})^c}\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n+\epsilon-2}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}dx\\ &\quad+C\sum_k\int_{(Q^*_{i,k})^c}\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{1}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-2}}\\ &\quad\times\phi\Big(\frac{|y_1-y_2|}{l(Q_{1,k})}\Big)|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}dx\\ &=I+II.\end{aligned}$$

注意到, 当 $x\notin Q_{1,k}$ 和 $y_1\in Q_{1,k}$ 时, 有

$$\frac12|x-y_1|\ge l(Q_{1,k})=t_{1,k}^{1/s}$$

和

$$\begin{aligned}|x-y_1|+|x-y_2|&\ge(2+\sqrt{n}/2)^{-1}(|x-y_1|+\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|y_1-y_2|)\\ &\approx(2+\sqrt{n}/2)^{-1}(|x-y_1|+\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|x_{Q_{1,k}}-y_2|).\end{aligned}$$

Minkowski 不等式告诉我们

$$\begin{aligned}&\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n+\epsilon-2}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}\\ &\le C\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n+\epsilon-2}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|\Big(\int_{2l(Q_{1,k})}^\infty\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}dy_1dy_2\\ &\le C\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|y_1-y_2|)^{2n+\epsilon}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I &\le C\sum_k\int_{(Q_{1,k}^*)^c}\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|y_1-y_2|)^{2n+\epsilon}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2dx\\
&\le C\sum_k\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|y_1-y_2|)^{2n+\epsilon}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\\
&\le C\sum_k\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(\frac12\sqrt{n}l(Q_{1,k})+|x_{Q_{1,k}}-y_2|)^{2n+\epsilon}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\\
&\le C\lambda^{1/2}\int_{\mathbb{R}^n}|g_2(y_2)|\mathscr{J}_{1,\epsilon}(y_2)dy_2\\
&\le C\lambda^{1/2}\|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\mathscr{J}_{1,\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C\lambda^{1/2}.\end{aligned}$$

另一方面, 根据 ϕ 的支集包含于 $[-1,1]$ 这个假设可得

$$\begin{aligned}&\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{\phi(\frac{|y_1-y_2|}{l(Q_{1,k})})}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-2}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|dy_1dy_2\bigg|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\bigg)^{\frac12}\\
&\quad\le C\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{\phi(\frac{|y_1-y_2|}{l(Q_{1,k})})}{(|x-y_2|+\sqrt{n}l(Q_{1,k}))^{2n-2}}|b_{1,k}(y_1)g_2(y_2)|\bigg(\int_{2l(Q_{1,k})}^\infty\frac{d\tau}{\tau^5}\bigg)^{\frac12}dy_1dy_2\\
&\quad\le C\|b_{1,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(|x-y_2|+\sqrt{n}l(Q_{1,k}))^{2n}}|\chi_{Q_{1,k}^*}(y_2)g_2(y_2)|dy_2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}II &\le C\sum_k\int_{Q_{1,k}^*}(\alpha\lambda)^{1/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{l(Q_{1,k})^n}{(|x-y_2|+\sqrt{n}l(Q_{1,k}))^{2n}}|\chi_{Q_{1,k}^*}(y_2)g_2(y_2)|dy_2dx\\
&\le C\lambda^{1/2}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{\bigcup_k Q_{1,k}^*}(y_2)g_2(y_2)|dy_2\\
&\le C\lambda^{1/2}\|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\bigg|\bigcup_k Q_{1,k}\bigg|^{\frac12}\le C\lambda^{1/2}.\end{aligned}$$

由 I 和 II 的估计, 再结合不等式 (3.5) 和 (3.6), 有

$$|E_\lambda^{(2)}|\le C\lambda^{-1/2}.$$

由对称性, 也有 $|E_\lambda^{(3)}|\le C\lambda^{-1/2}$.

最后估计 $E_\lambda^{(4)}$. 我们做如下分解

$$\mu(b_1,b_2)(x)=\mu\bigg(\sum_k b_{1,k},\sum_j b_{2,j}\bigg)(x)\le\sum_{i=1}^5\mu_i(b_1,b_2),$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_1(b_1,b_2)(x)&=\mu\bigg(\sum_k A_{t_{1,k}}b_{1,k},\sum_j A_{t_{2,j}}b_{2,j}\bigg)(x),\\
\mu_2(b_1,b_2)(x)&=\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j})}\mu(A_{t_{1,k}}b_{1,k},b_{2,j}-A_{t_{2,j}}b_{2,j})(x),\\
\mu_3(b_1,b_2)(x)&=\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j})}\mu(b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k},b_{2,j})(x),\end{aligned}$$

$$\mu_4(b_1,b_2)(x)=\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})>l(Q_{2,j})}\mu(b_{1,k}-A_{t_{1,k}}b_{1,k},A_{t_{2,j}}b_{2,j})(x),$$
$$\mu_5(b_1,b_2)(x)=\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})>l(Q_{2,j})}\mu(b_{1,k},b_{2,j}-A_{t_{2,j}}b_{2,j})(x).$$

对于项 $\mu_1(b_1,b_2)$ 和 $\mu_2(b_1,b_2)$, 可以用类似于处理 $E_\lambda^{(2)}$ 的方法来证明

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu_1(b_1,b_2)(x)|>\lambda/20\}|\le C\lambda^{-1/2}$$

和

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu_2(b_1,b_2)(x)|>\lambda/20\}|\le C\lambda^{-1/2}.$$

现在来考虑项 $\mu_3(b_1,b_2)$. 由条件 (1.2), 有

$$\begin{aligned}\mu_3(b_1,b_2)(x)\le&\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\\&\times\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{B(x,\tau)^2}|K(z,y_1,y_2)-K^1_{t_{1,k}}(z,y_1,y_2)|\,|b_{1,k}(y_1)b_{2,j}(y_2)|dy_1dy_2\bigg|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\bigg)^{\frac12}\\ \le& C\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\\&\times\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n+\epsilon-2}}|b_{1,k}(y_1)b_{2,j}(y_2)|dy_1dy_2\bigg|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\bigg)^{\frac12}\\&+C\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\\&\times\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{B(x,\tau)^2}\frac{1}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-2}}\phi\Big(\frac{|y_1-y_2|}{l(Q_{1,k})}\Big)|b_{1,k}(y_1)b_{2,j}(y_2)|dy_1dy_2\bigg|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\bigg)^{\frac12}\\:=&\,\mu_{31}(b_1,b_2)(x)+\mu_{32}(b_1,b_2)(x).\end{aligned}$$

因为 $x\notin\Omega_1\cup\Omega_2=\bigcup_{i=1}^2\bigcup_k Q^*_{i,k}$ 和 $y_i\in Q_{i,k}$, 所以有

$$|x-y_i|\approx l(Q_{i,k})+|x-x_{Q_{i,k}}|.$$

根据 $l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j})$ 和 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned}|\mu_{31}(b_1,b_2)(x)|&\le C\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{1,k})^\epsilon}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n+\epsilon}}|b_{1,k}(y_1)b_{2,j}(y_2)|dy_1dy_2\\&\le C\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\bigg(\sum_k\frac{l(Q_{1,k})^{\epsilon/2}|b_{1,k}(y_1)|}{(l(Q_{1,k})+|x-y_1|)^{n+\epsilon/2}}\bigg)\bigg(\sum_j\frac{l(Q_{2,j})^{\epsilon/2}|b_{2,j}(y_2)|}{(l(Q_{2,j})+|x-y_2|)^{n+\epsilon/2}}\bigg)dy_1dy_2\\&\le C\lambda\mathscr{J}_{1,\epsilon/2}(x)\mathscr{J}_{2,\epsilon/2}(x),\end{aligned}$$

这就给出了

$$\begin{aligned}\int_{(\bigcup_{i=1}^2\Omega_i)^c}\mu_{31}(b_1,b_2)(x)dx&\le C\lambda\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{J}_{1,\epsilon/2}(x)\mathscr{J}_{2,\epsilon/2}(x)|dx\\&\le C\lambda\|\mathscr{J}_{1,\epsilon/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathscr{J}_{2,\epsilon/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\&\le C\lambda^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

另一方面, 由于 $\{Q_{1,k}\}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两两不交的方体列, 利用 ϕ 支集包含于 $[-1,1]$ 的事实, Minkowski 不等式和 $l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j})$, 可推得

$$\begin{aligned}|\mu_{32}(b_1,b_2)(x)|&\le C\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{\chi_{Q_{1,k}^*}(y_2)}{(l(Q_{2,j})+|x-y_2|)^{2n}}|b_{1,k}(y_1)b_{2,j}(y_2)|dy_1dy_2\\&\le C\sum_k\sum_{j:l(Q_{1,k})\le l(Q_{2,j}))}\|b_{1,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_{\bigcup_k Q_{1,k}^*}(y_2)}{(l(Q_{2,j})+|x-y_2|)^{2n}}|b_{2,j}(y_2)|dy_2\\&\le C(\alpha\lambda)^{1/2}\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}\frac{l(Q_{2,j})^n}{(l(Q_{2,j})+|x-y_2|)^{2n}}|b_{2,j}(y_2)|\chi_{\bigcup_k Q_{1,k}^*}(y_2)dy_2,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{(\bigcup_{i=1}^2\Omega_i)^c}\mu_{32}(b_1,b_2)(x)dx&\le C(\alpha\lambda)^{1/2}\sum_j\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\frac{l(Q_{2,j})^n}{(l(Q_{2,j})+|x-y_2|)^{2n}}|b_{2,j}(y_2)|dy_2dx\\&\le C(\alpha\lambda)^{1/2}\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}|b_{2,j}(y_2)|dy_2\le C\lambda^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu_3(b_1,b_2)(x)|>\frac{\lambda}{20}\right\}\right|&\le\left|\bigcup_{i=1}^2\Omega_i^*\right|+\frac{20}{\lambda}\sum_{i=1}^2\int_{(\bigcup_{i=1}^2\Omega_i^*)^c}|\mu_{3i}(b_1,b_2)(x)|dx\\&\le C\lambda^{-1/2}.\end{aligned}$$

根据对称性, 可同样估计项 $\mu_4(b_1,b_2)$ 和 $\mu_5(b_1,b_2)$, 从而得到 $E_\lambda^{(4)}$ 的预期估计. 联合 $\{E_\lambda^{(i)}\}_{i=1}^4$ 的估计, 得到了不等式 (3.2). 从而完成了证明. 证毕.

接下来需要证明 $\mathscr{M}_\mu$ 是从 $L^1\times\cdots\times L^1$ 到 $L^{1/m,\infty}$ 有界的.

定理 3.5 在定理 1.2 的假设下, 有界算子 $\mathscr{M}_\mu$ 映射 $L^1(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1/m,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

证明 同样, 为了简便起见, 只考虑双线性情形. 对任何的 $\epsilon>0$, 令

$$\mu^\epsilon(f_1,f_2)(x)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{\tau>\max(|x-y_1|,|x-y_2|)>\epsilon}K(x,y_1,y_2)f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\right|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\right)^{\frac12}.$$

可以断言, 对每一个 $\gamma\in(0,1/2)$,

$$\sup_\epsilon|\mu^\epsilon(f_1,f_2)(x)|\lesssim M_\gamma(\mu(f_1,f_2))(x)+Mf_1(x)Mf_2(x),\tag{3.9}$$

其中 $M_\gamma(f)(x)=[M(|f|^\gamma)(x)]^{\frac1\gamma}$.

事实上, 令

$$A_\epsilon(f_1,f_2)(x)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{\substack{\tau>\max(|x-y_1|,|x-y_2|)>\epsilon\\ \epsilon\ge\min(|x-y_1|,|x-y_2|)}}K(x,y_1,y_2)f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\right|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\right)^{\frac12},$$

$$G^\epsilon(f_1,f_2)(x,z)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{\substack{\tau>|x-y_1|>\epsilon\\ \tau>|x-y_2|>\epsilon}}K(z,y_1,y_2)f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\right|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\right)^{\frac12},$$

$$E_\epsilon(f_1,f_2)(x,z)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{\substack{\tau>\max(|x-y_1|,|x-y_2|)>\epsilon\\ \epsilon>\min(|x-y_1|,|x-y_2|)}}K(z,y_1,y_2)f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\right|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\right)^{\frac12}.$$

由 Minkowski 不等式和尺寸条件 (1.5), 有

$$\begin{aligned}A_\epsilon(f_1,f_2)(x) &\lesssim \int_{\substack{\max(|x-y_1|,|x-y_2|)>\epsilon\\ \epsilon>\min(|x-y_1|,|x-y_2|)}} \frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-2}}dy_1dy_2\Big(\int_\epsilon^\infty \frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}\\ &\lesssim \frac{1}{\epsilon^2}\Big(\int_{\substack{|x-y_1|>\epsilon\\ |x-y_2|\le\epsilon}}+\int_{\substack{|x-y_1|\le\epsilon\\ |x-y_2|>\epsilon}}\Big)\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-2}}dy_1dy_2\\ &:= A_\epsilon^1(f_1,f_2)(x)+A_\epsilon^2(f_1,f_2)(x).\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}A_\epsilon^1(f_1,f_2)(x) &\lesssim \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\substack{|x-y_1|>\epsilon\\ |x-y_2|\le\epsilon}} \frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+\epsilon)^{2n-2}}dy_1dy_2\\ &\lesssim \frac{1}{\epsilon^2}\int_{|x-y_2|\le\epsilon}\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k-1}\epsilon<|x-y_1|\le 2^k\epsilon}\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(2^{k-1}\epsilon+\epsilon)^{2n-2}}dy_1dy_2\\ &\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x).\end{aligned}$$

对称地, 有 $A_\epsilon^2(f_1,f_2)(x)\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x)$, 所以 $A_\epsilon(f_1,f_2)(x)\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x)$. 同样, 对 $z\in B(x,\frac{\epsilon}{8})$, 有

$$E_\epsilon(f_1,f_2)(x,z)\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x).$$

甚至, 由正则性条件 (1.6), 对 $z\in B(x,\frac{\epsilon}{8})$,

$$\begin{aligned}&|\mu^\epsilon(f_1,f_2)(x)-G^\epsilon(f_1,f_2)(x)|\\ &\quad\lesssim A_\epsilon(f_1,f_2)(x)+E_\epsilon(f_1,f_2)(x,z)\\ &\qquad+\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\tau>|x-y_1|>\epsilon\\ \tau>|x-y_2|>\epsilon}}|K(x,y_1,y_2)-K(z,y_1,y_2)|f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}\\ &\quad\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x).\end{aligned}$$

注意到 $z\in B(x,\frac{\epsilon}{8})$,

$$\begin{aligned}|G^\epsilon(f_1,f_2)(x)| &\le \Big(\int_0^\infty\Big|\int_{\epsilon<\max(|z-y_1|,|z-y_2|)<\tau}K(z,y_1,y_2)f_(y_1)f_2(y_2)dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}\\ &\quad+\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\frac{\epsilon}{2}<\max(|z-y_1|,|z-y_2|)\\ \max(|z-y_1|,|z-y_2|)<\min(\tau,2\epsilon)}}K(z,y_1,y_2)f_(y_1)f_2(y_2)dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}\\ &\lesssim|\mu(f_1,f_2)(z)|+|\mu(f_1^{(0)},f_2^{(0)})(z)|+\prod_{i=1}^2Mf_i(x),\end{aligned}$$

其中 $f_i^{(0)}(y_i)=f_i(y_i)\chi_{B(x,\epsilon)}(y_i), i=1,2$. 因此, 对任意的 $z\in B(x,\frac{\epsilon}{8})$,

$$|\mu^\epsilon(f_1,f_2)(x)|\lesssim|\mu(f_1,f_2)(z)|+|\mu(f_1^{(0)},f_2^{(0)})(z)|+\prod_{i=1}^2Mf_i(x).$$

结合 T 从 $L^1(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1/2,\infty}(\mathbb{R}^n)$有界的事实和 Kolmogorov 不等式, 可得 (3.9) 式.

现在, 令

$$\mu_\epsilon(f_1,f_2)(x)=\Big(\int_0^\infty\Big|\int_{\substack{\tau>|x-y_1|>\epsilon\\ \tau>|x-y_2|>\epsilon}}K(x,y_1,y_2)f(y_1)f(y_2)dy_1dy_2\Big|^2\frac{d\tau}{\tau^5}\Big)^{\frac12}.$$

由尺寸条件 (1.5), 我们发现

$$|\mu^{\epsilon}(f_1,f_2)(x)-\mu_{\epsilon}(f_1,f_2)(x)|\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x),$$

所以

$$\sup_{\epsilon>0}|\mu_{\epsilon}(f_1,f_2)(x)|\lesssim M_{\gamma}(\mu(f_1,f_2)(x))+Mf_1(x)Mf_2(x).$$

令 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 为一方体以及 $x,\xi\in Q$. 记 B_x 是以 x 为中心, 直径为 $10\sqrt{n}l(Q)$ 的方体, 则 $3Q\subset B_x$. 然后我们可以写

$$\begin{aligned}|\mu(f_1,f_2)(\xi)-\mu(f_1\chi_{3Q},f_2\chi_{3Q})(\xi)|&\le|\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)|\\&\le|\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi)-\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)|+\sup_{\epsilon}|\mu_{\epsilon}(f_1,f_2)(x)|\\&\quad+|\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q},f_2\chi_{B_x\setminus 3Q})(\xi)|+|\mu(f_1\chi_{B_x\setminus 3Q},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)|.\end{aligned}$$

由 Minkowski 不等式和正则性条件 (1.6), 有

$$|\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi)-\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)|\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x).$$

类似于 $A^{\epsilon}(f_1,f_2)$ 的估计, 由尺寸条件 (1.5), 有

$$|\mu(f_1\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q},f_2\chi_{B_x\setminus 3Q})(\xi)|\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x)$$

和

$$|\mu(f_1\chi_{B_x\setminus 3Q},f_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)|\lesssim Mf_1(x)Mf_2(x).$$

结合上面的所有估计, 可得

$$\mathscr{M}_{\mu}(f_1,f_2)(x)\lesssim M_{\gamma}(\mu(f_1,f_2))(x)+Mf_1(x)Mf_2(x).$$

因此, $\mathscr{M}_{\mu}$ 是从 $L^1(\mathbb{R}^n)\times L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1/2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界的. 证毕.

致谢 感谢评审专家的建议.

参 考 文 献

[1] Chen J., Hu G., Weighted vector-valued bounds for a class of multilinear singular integral operators and applications, arXiv: 1606.04768v3.

[2] Duong X., Grafakos L., Yan L., Multilinear operators with non-smooth kernels and commutators of singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2010, **362**: 2089–2113.

[3] Fefferman C., Stein E. M., Some maximal inequalities, *Amer. J. Math.*, 1971, **93**: 107–115.

[4] Hytönen T., Lacey M., Pérez C., Sharp weighted bounds for the q-variation of singular integrals, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2013, **45**: 529–540.

[5] Lerner A., On pointwise estimate involving spares operator, *New York J. Math.*, 2016, **22**: 341–349.

[6] Lerner A., Obmrosi S., Rivera-Rios I., On pointwise and weighted estimates for commutators of Calderón–Zygmund operators, arXiv: 1604.01334.

[7] Lerner A., Ombrosi S., Pérez C., et al., New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón–Zygmund theory, *Adv. Math.*, 2009, **220**: 1222–1264.

[8] Li K., Sparse domination theorem for multilinear singular integral operators with L^r-Hörmander condition, arXiv: 1606.03952.

[9] Li K., Moen K., Sun W., The sharp weighted bound for multilinear maximal functions and Calderón–Zygmund operators, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, **20**: 751–765.