

文章编号: 0583-1431(2018)04-0619-06

文献标识码: A

Dirichlet 空间上的 Bergman 型 Toeplitz 算子

秦 杰 黄 穗

重庆师范大学数学科学学院 重庆 401331
E-mail: qinjie24520@163.com; huangsui2@163.com

摘 要 本文给出了 Dirichlet 空间上以有界调和函数为符号的 Bergman 型 Toeplitz 算子是紧算子的充要条件. 同时刻画了此类 Bergman 型 Toeplitz 算子在 Dirichlet 空间上的交换性.

关键词 Dirichlet 空间; Bergman 型 Toeplitz 算子; 紧算子; 交换性
MR(2010) 主题分类 47B35, 47B47
中图分类 O177.1

The Bergman-Type Toeplitz Operator on Dirichlet Space

Jie QIN Sui HUANG

*School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,
Chongqing 401331, P. R. China
E-mail: qinjie24520@163.com; huangsui2@163.com*

Abstract We give sufficient and necessary conditions for Bergman-type Toeplitz operators on Dirichlet space with bounded harmonic symbols to be a compact operator. And we characterize commuting Bergman-type Toeplitz operators with harmonic symbols on Dirichlet space.

Keywords Dirichlet space; Bergman-type Toeplitz operator; compact; commuting
MR(2010) Subject Classification 47B35, 47B47
Chinese Library Classification O177.1

1 引言

设 \mathbb{D} 是复平面 \mathbb{C} 中的单位开圆盘, dA 表示在 \mathbb{D} 的正规面积测度, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 上的内积. Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 是由 \mathbb{D} 上满足 $\|f\|_{L^{2,1}} = \{|\int_{\mathbb{D}} f dA|^2 + \int_{\mathbb{D}} (|\frac{\partial f}{\partial z}|^2 + |\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|^2) dA\}^{\frac{1}{2}} < \infty$ 的所有光滑函数 f 组成.

收稿日期: 2017-05-14; 接受日期: 2017-10-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501068); 重庆市教委项目 (cstc2015jcyjA00005, KJ1600302);
重庆师范大学研究生科研创新项目 (YKC17010)

Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 按内积 $\langle f, g \rangle_{L^{2,1}} = \int_{\mathbb{D}} f dA \int_{\mathbb{D}} \bar{g} dA + \langle \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \rangle$ 构成 Hilbert 空间.

Dirichlet 空间 \mathfrak{D} 是由 $L^{2,1}(\mathbb{D}, dA)$ 上所有在零点取值为 0 的解析函数构成的闭子空间, 因此 \mathfrak{D} 是一个 Hilbert 空间, 其内积为 $\langle f, g \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle f', g' \rangle$.

Bergman 空间 L_a^2 是由 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 中所有解析函数构成的闭子空间, 故 L_a^2 是一个 Hilbert 空间, 其内积定义为 $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f \bar{g} dA$. 设 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 上的范数, 定义 $\|f\|_{\mathfrak{D}} = \|f'\|$, 则 $\mathfrak{D} \subset L_a^2$.

定义 Sobolev 空间 $L^{\infty,1}(\mathbb{D})$ 为 $L^{\infty,1} = \{f : f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in L^{\infty}(\mathbb{D})\}$, 其中 $L^{\infty}(\mathbb{D})$ 为 \mathbb{D} 上的本性有界可测函数空间. $L^{\infty,1}(\mathbb{D})$ 上的范数为 $\|f\|_{1,\infty} = \max\{\|f\|_{\infty}, \|\frac{\partial f}{\partial z}\|_{\infty}, \|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\|_{\infty}\}$.

令 P 表示从 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 到 L_a^2 上的正交投影. 令 φ 是 \mathbb{D} 上满足 $\varphi f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 的函数, 定义 \mathfrak{D} 上以 φ 为符号的 Toeplitz 算子为

$$T_{\varphi}(f)(z) = P(\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)f(w)}{(1-\bar{z}w)^2} dA(w), \quad f \in \mathfrak{D},$$

$K(z, w) = \frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}$ 为 Bergman 空间上的再生核. 此类 Toeplitz 算子称为 \mathfrak{D} 上的 Bergman 型 Toeplitz 算子.

在经典的 Hardy 空间上, 只有平凡的紧 Toeplitz 算子^[1]. 在 Bergman 空间上, Zhu^[2] 讨论了 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的一些代数性质, 并刻画了 Bergman 空间上的正交投影的性质. Zheng^[3] 证明了 Toeplitz 算子在 Bergman 空间上紧当且仅当其符号在单位圆盘的边界上为 0. Axler 和 Čučković^[4] 证明了两个以调和函数为符号的 Toeplitz 算子在 Bergman 空间上交换的充分必要条件. 在 Dirichlet 空间上情况更为复杂, Cao^[5] 讨论了 Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子的紧性与 Fredholm 性质. Duistermaat^[6] 讨论了 Toeplitz 算子在 Dirichlet 空间上的代数性质. Yu^[7] 给出了以 $L^{\infty,1}$ 中函数为符号的 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件. Lee^[8] 讨论了 Toeplitz 算子在调和 Dirichlet 空间上的代数性质, 包括两个 Toeplitz 算子的乘积问题和交换性.

Chartrand^[9] 给出了 Dirichlet 空间上以有界调和函数为符号的 Bergman 型 Toeplitz 算子有界的充分必要条件. 在此基础上, 本文给出了 Dirichlet 空间上以有界调和函数为符号的 Bergman 型 Toeplitz 算子为紧算子的充分必要条件, 并且刻画了此类 Bergman 型 Toeplitz 算子在 Dirichlet 空间上的交换性.

设 P_{α} 表示 Bergman 投影, 对 $\alpha > -1$, 定义 $P_{\alpha}f(z) = (\alpha+1) \int \frac{(1-|\omega|^2)^{\alpha}}{(1-\bar{z}\omega)^{\alpha+2}} f(\omega) dA(\omega)$, $P_0 = P$, 并且 P_{α} ($\alpha > -1$) 是 Bergman 空间上的有界线性算子^[2].

证明本文的主要内容, 需要以下引理^[9].

引理 1.1 设 φ 是 \mathbb{D} 上的任意有界调和函数. 对 $f \in \mathfrak{D}$, 有

$$(T_{\varphi}f)' = \frac{\partial \varphi}{\partial z} f + P_1(\varphi f'). \quad (1.1)$$

引理 1.2 设 φ 是 \mathbb{D} 上的有界调和函数. Bergman 型 Toeplitz 算子 T_{φ} 在 \mathfrak{D} 上有界当且仅当 $|\frac{\partial \varphi}{\partial z}|^2 dA$ 是一个 \mathfrak{D} -Carleson 测度.

2 Toeplitz 算子的紧性

本节主要讨论由哪种符号 φ 决定的 Toeplitz 算子在 \mathfrak{D} 上是紧算子. 下文总是假设 φ 是一个调和函数. 设

$$\varphi = \varphi(0) + \varphi_+ + \varphi_-, \quad (2.1)$$

其中 φ_+ 是解析函数, φ_- 是共轭解析函数, $\varphi(0) \in \mathbb{C}$. 显然 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi'_+$.

我们从下面的引理开始证明主要结果.

引理 2.1 设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是 \mathfrak{D} 中的一个函数列. 如果 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 在 \mathfrak{D} 中弱收敛到 0, 并且 $\|f_k\|_{\mathfrak{D}} = 1$, 则 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 在 L_a^2 中强收敛到 0.

证明 对任意的 $g \in \mathfrak{D}$, 设 $f_k = \sum_{n=1}^\infty \widehat{f}_k(n)z^n$, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, g \rangle_{\mathfrak{D}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f'_k, g' \rangle = 0. \quad (2.2)$$

因此 $\{f'_k\}_{k=1}^\infty$ 在 L_a^2 中弱收敛到 0.

因为 $\|f_k\|_{\mathfrak{D}}^2 = \|f'_k\|^2 = \sum_{n=1}^\infty n|\widehat{f}_k(n)|^2 = 1$, 因此有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^\infty n|\widehat{f}_k(n)|^2 = 0$.

事实上, $\langle f_k, z^n \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle f'_k, nz^{n-1} \rangle = n\widehat{f}_k(n) \rightarrow 0$, 进而, 对任意的 n 有 $\widehat{f}_k(n) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

因为

$$\|f_k\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{|\widehat{f}_k(n)|^2}{n+1} \leq \sum_{n=1}^N \frac{|\widehat{f}_k(n)|^2}{n+1} + \sum_{n=N+1}^\infty n|\widehat{f}_k(n)|^2,$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|f_k\|$ 收敛到 0. 证明完毕.

定理 2.2 设 φ 是 \mathbb{D} 上满足 $\varphi|_{\partial\mathbb{D}} = 0$ 的有界调和函数, 则 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧的充分必要条件是 φ 是 \mathbb{D} 中的一个共轭解析函数.

证明 使用 (2.1) 式, 则有 $\varphi = \varphi(0) + \varphi_+ + \varphi_-$, 显然 $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi'_+$. 若 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 弱收敛到 0 且 $\|f_k\|_{\mathfrak{D}} = 1$, 由引理 2.1, 有 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 在 L_a^2 中强收敛到 0, 则 $\{f'_k\}_{k=1}^\infty$ 在 L_a^2 中弱收敛到 0.

使用 (1.1) 式, 得到

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}^2 &= \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial z} f_k + P_1(\varphi f'_k) \right\|^2 = \|(T_\varphi f_k)'\|^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial z} f_k \right\|^2 + 2\|P_1(\varphi f'_k)\|^2 \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right\|^2 \|f_k\|^2 + 2\|P_1(\varphi f'_k)\|^2. \end{aligned}$$

若 φ 是共轭解析的, 则 $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$. 令 $P_1(\varphi f'_k) = \mathcal{T}_\varphi f'_k$, 若 $\varphi|_{\partial\mathbb{D}} = 0$, 则 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上是紧算子 [3]. 因此, $\|\mathcal{T}_\varphi f'_k\|$ 在 L_a^2 中收敛到 0, 故 $\|T_\varphi f_k\|$ 在 \mathfrak{D} 中收敛到 0, T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧.

反之, 不失一般性, 假设 $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k}}$, 显然 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 弱收敛到 0 且 $\|f_k\|_{\mathfrak{D}} = 1$. 令 $P_1(\varphi f'_k) = \mathcal{T}_\varphi f'_k$, 假设 $\varphi|_{\partial\mathbb{D}} = 0$, 则 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上紧 [3], 因此 $\|\mathcal{T}_\varphi f'_k\|$ 在 L_a^2 中收敛到 0.

若 T_φ 紧, 则 $\|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}$ 收敛到 0. 通过 (1.1) 式, 有 $\|\frac{\partial\varphi}{\partial z} f_k\|^2 \leq 2\|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}^2 + 2\|P_1(\varphi f'_k)\|^2$. 因此 $\|\frac{\partial\varphi}{\partial z} f_k\|$ 在 L_a^2 中收敛到 0.

设 $\varphi_+(z) = \sum_{m=1}^\infty \widehat{\varphi}(m)z^m$, 则有

$$\varphi'_+(z) = \sum_{m=1}^\infty m\widehat{\varphi}(m)z^{m-1}.$$

记 $\varphi'_+ f_k = \sum_{m=1}^\infty \frac{m\widehat{\varphi}(m)z^{m+k-1}}{\sqrt{k}}$, 故

$$\|\varphi'_+ f_k\|^2 = \sum_{m=1}^\infty \frac{m^2|\widehat{\varphi}(m)|^2}{k(m+k)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_0 \geq N \in \mathbb{N}^+$ (正整数), 对任意 $k \geq K_0$, 满足 $\sum_{m=1}^\infty \frac{m^2|\widehat{\varphi}(m)|^2}{k(m+k)} < \varepsilon$, 特别地, 对 K_0 , 有

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{m^2|\widehat{\varphi}(m)|^2}{K_0(m+K_0)} < \varepsilon,$$

对任意 $m \geq 1$, 有 $m^2|\widehat{\varphi}(m)|^2 < \varepsilon K_0(m + K_0)$, 进而

$$|\widehat{\varphi}(m)|^2 < \varepsilon \frac{K_0(m + K_0)}{m^2}.$$

故 $\widehat{\varphi}(m) = 0$ 对任意 $m \geq 1$ 成立. 故 φ 是共轭解析函数. 证毕.

记 $P_1(\varphi f'_k) = \mathcal{T}_\varphi f'_k$, 则 \mathcal{T}_φ 是 L_a^2 上由 P_1 诱导的 Toeplitz 算子. 使用引理 1.2, 可知 \mathcal{T}_φ 是 L_a^2 上的有界线性算子. 接下来的定理将刻画 T_φ 与 \mathcal{T}_φ 之间重要的联系.

定理 2.3 设 φ 是 \mathbb{D} 上的有界调和函数且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L_a^2$, 则 T_φ 紧当且仅当 \mathcal{T}_φ 紧.

证明 假设 φ 是 \mathbb{D} 上的有界调和函数, 满足 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L_a^2$. 不失一般性, 令 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{D}$ 弱收敛到 0 且 $\|f_k\|_{\mathfrak{D}} = 1$.

记

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}^2 &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_k + P_1(\varphi f'_k) \right\|^2 = \|(T_\varphi f_k)'\|^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_k \right\|^2 + 2 \|P_1(\varphi f'_k)\|^2 \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\|^2 \|f_k\|^2 + 2 \|P_1(\varphi f'_k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

同样地

$$\|P_1(\varphi f'_k)\|^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_k \right\|^2 + 2 \|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}^2 \leq 2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\|^2 \|f_k\|^2 + 2 \|T_\varphi f_k\|_{\mathfrak{D}}^2. \quad (2.4)$$

由 (2.2) 式可知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, f'_k 弱收敛到 0; 使用引理 2.1, 显然当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\| \|f_k\|$ 收敛到 0. 最后, 比较 (2.3) 与 (2.4) 式, 得到 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧当且仅当 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上紧. 证毕.

若 φ 为有界调和函数, 显然当 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L_a^2$, 则 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧当且仅当 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上紧. 同样地, 当 $\varphi \in L^{\infty,1}$, 其结论依然成立.

定理 2.4 设 φ 是 \mathbb{D} 上的有界调和函数且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L_a^2$, 则 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧当且仅当 $\varphi|_{\partial \mathbb{D}} = 0$.

证明 由定理 2.3, 我们有 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧当且仅当 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上紧, 因为 \mathcal{T}_φ 在 L_a^2 上紧当且仅当 $\varphi|_{\partial \mathbb{D}} = 0$ (见文 [3]), 故 T_φ 在 \mathfrak{D} 上紧当且仅当 $\varphi|_{\partial \mathbb{D}} = 0$. 证毕.

3 交换 Toeplitz 算子

本节将刻画以有界调和函数为符号的 Toeplitz 算子的交换性.

设 $e_n = \frac{z^n}{\sqrt{n}}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^+$. 众所周知 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ 是 \mathfrak{D} 的标准正交基, 则 \mathfrak{D} 上的任意有界线性算子 T 对应一个矩阵, 其矩阵系数 a_{jk} 满足 $a_{jk} = \langle T e_k, e_j \rangle_{\mathfrak{D}}$, 其中 $1 \leq k, j \in \mathbb{N}^+$.

设 $c_n = \sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), C 为主对角矩阵, 则

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & c_3 & & \\ & & & c_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

设 \mathfrak{B} 是由 \mathbb{D} 上所有有界函数 φ 构成的集合, 且满足 $|\frac{\partial \varphi}{\partial z}|^2 dA$ 为 \mathfrak{D} -Carleson 测度. 若 $\varphi \in \mathfrak{B}$ 为调和函数, 使用引理 1.2, 显然 T_φ 是 \mathfrak{D} 上的有界线性算子.

下面刻画以调和函数为符号的 Toeplitz 算子 T_φ 在标准正交基 $\{e_n\}$ 下所对应的矩阵.

引理 3.1 设 $\varphi \in \mathfrak{B}$ 为调和函数. 记 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \varphi_n \bar{z}^{-n}$, 则 T_φ 在标准正交基 $\{e_n\}$ 下对应的矩阵为 $CD_\varphi C^{-1}$, 其中

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & \cdots \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \cdots \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \cdots \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

证明 设 a_{jk} 表示 D_φ 矩阵系数. 对 $k, j \geq 1$, 计算可得

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \langle T_\varphi e_k, e_j \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle P(\varphi e_k), e_j \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle \varphi e_k, e_j \rangle_{\mathfrak{D}} \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n e_k, e_j \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \left\langle \sum_{n=-\infty}^{-1} \varphi_n \bar{z}^{-n} e_k, e_j \right\rangle_{\mathfrak{D}} = \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{k}} \varphi_{j-k}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 3.2 设 $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$ 为调和函数. 记

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \varphi_n \bar{z}^{-n}, \quad \psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m z^m + \sum_{m=-\infty}^{-1} \psi_m \bar{z}^{-m}.$$

若 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$, 则 $\varphi_j \psi_{-k} = \psi_j \varphi_{-k}$, 其中 $j, k \in \mathbb{N}^+$.

证明 设 D_φ 和 D_ψ 分别表示 φ 和 ψ 对应的矩阵. 通过引理 3.1 易知, 算子乘积 $T_\varphi T_\psi$ 在标准正交基 $\{e_n\}$ 下的矩阵为 $CD_\varphi D_\psi C^{-1}$. 交换子 $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ 对应的矩阵为 $CD_\varphi D_\psi C^{-1} - CD_\psi D_\varphi C^{-1}$. 若 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$, 使用引理 3.1 有 $CD_\varphi D_\psi C^{-1} = CD_\psi D_\varphi C^{-1}$, 则 $D_\varphi D_\psi = D_\psi D_\varphi$.

使用引理 3.1, 则矩阵 $D_\varphi D_\psi$ 在标准正交基下的矩阵系数 a_{jk} 为 $a_{jk} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{j-i} \psi_{i-k}$, 其中 $j, k \in \mathbb{N}^+$. 因此 $a_{j+1, k+1} = a_{jk} + \varphi_j \psi_{-k}$. 同理, 矩阵 $D_\psi D_\varphi$ 的矩阵系数 a'_{jk} 在标准正交基 $\{e_n\}$ 下满足 $a'_{j+1, k+1} = a'_{jk} + \psi_j \varphi_{-k}$.

因为 $D_\varphi D_\psi = D_\psi D_\varphi$, 因此 $a_{jk} = a'_{jk}$, $a_{j+1, k+1} = a'_{j+1, k+1}$. 故

$$\varphi_j \psi_{-k} = \psi_j \varphi_{-k} \quad (3.1)$$

对任意的 $j, k \in \mathbb{N}^+$ 成立. 证毕.

使用 (2.1), 则对任意的调和函数 φ , 有以下形式 $\varphi = \varphi(0) + \varphi_+ + \varphi_-$, 其中 $\varphi_+(z) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k z^k$, $\varphi_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{-k} \bar{z}^k$, $\varphi(0)$ 为常数.

以下定理刻画两个以调和函数为符号的 Bergman 型 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件.

定理 3.3 设 $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$ 为有界调和函数, 则 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ 当且仅当其符号满足下列条件之一:

- (1) φ 和 ψ 同时解析.
- (2) φ 和 ψ 同时共轭解析.
- (3) φ, ψ 和 1 线性相关.

证明 假设 φ, ψ 和 1 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 α, β, b , 满足 $\alpha\varphi + \beta\psi = b$. 若 $\alpha \neq 0$, 则 $\varphi = \frac{b}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\psi$, 因此 $T_\varphi = T_{\frac{b}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\psi}$, 显然, $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$. 同样地, 若 $\beta \neq 0$ 或 $b \neq 0$, 由前面的结果, 易知 T_φ 与 T_ψ 可交换.

反之, 若 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$, 由引理 3.2, 对任意的 $j, k \in \mathbb{N}^+$, 有 $\varphi_j \psi_{-k} = \psi_j \varphi_{-k}$. 我们通过证明等式 (3.1) 成立蕴含着条件 (1)–(3) 中某一个成立来完成证明.

不失一般性, 假设 $\varphi_j = 0$ ($j \in \mathbb{N}^+$), 由 (3.1) 式可知对任意 $j, k \in \mathbb{N}^+$, 有 $\psi_j \varphi_{-k} = 0$. 若 $\psi_j = 0$, 则条件 (3) 成立; 若 $\psi_j \neq 0$, 则 $\varphi_{-k} = 0$ 对任意的 $k \in \mathbb{N}^+$ 成立. 因此, φ 为 \mathbb{D} 上的解析函数. 另一方面, 假设 $\psi_j = 0$, 故有 (3) 成立或者 ψ 为 \mathbb{D} 上的解析函数. 综上, φ 和 ψ 同时解析或 φ, ψ 与 1 线性相关.

同理, 假设当 $k \in \mathbb{N}^+$ 时, $\varphi_{-k} = 0$ 或 $\psi_{-k} = 0$, 则有 φ 和 ψ 同时共轭解析或者 φ, ψ 与 1 线性相关.

最后, 我们假设对任意的 $j, k \in \mathbb{N}^+$, ψ_{-k} 和 φ_j 都不为 0, 则 $\frac{\varphi_+}{\psi_+} = \frac{\varphi_-}{\psi_-}$, 故存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 满足 $\varphi_+ = c\psi_+$, $\varphi_- = c\psi_-$. 显然 φ, ψ 和 1 线性相关. 证毕.

Yu [7] 给出了 Sobolev 空间的一种正交分解. 设 \mathcal{P}_0 由 \mathbb{D} 上的多项式构成的集合, 其变量为 z 和 \bar{z} , 满足以下形式 $\sum_{j \geq l} \sum_{l \geq 0} a_{l+j, l} z^{l+j} \bar{z}^l$, 其中 j 和 l 取遍 \mathbb{Z} (整数集) 的某一个有限子集, 并且 $\sum_{l \geq 0} a_{l+j, j} = 0$. 令 \mathcal{A}_0 表示 \mathcal{P}_0 的闭包, \mathcal{A} 表示 $\mathcal{A}_0 + \mathbb{C}$, 则有如下分解

$$L^{2,1}(\mathbb{D}) = \mathcal{A} \oplus \mathfrak{D} \oplus \overline{\mathfrak{D}}.$$

令 $\mathfrak{P}[f]$ 表示 f 在 \mathbb{D} 上的 Poisson 扩张, $f|_{\mathbb{T}}$ 表示 f 在 \mathbb{D} 的边界上的迹. 若 $f \in L^{2,1}(\mathbb{D})$, 则存在解析函数 f_1, f_2 和常数 c , 其中 $f_1(0) = f_2(0) = 0$, 满足 $\mathfrak{P}[f|_{\mathbb{T}}] = f_1 + f_2 + c$, 则有

$$f = (f_0 + c) + f_1 + f_2, \quad (3.2)$$

其中 $f_0 = f - \mathfrak{P}[f|_{\mathbb{T}}]$, $f_0 \in \mathcal{A}_0$, $f_1 \in \mathfrak{D}$, $f_2 \in \overline{\mathfrak{D}}$.

设 \mathfrak{H} 表示由 $L^{\infty,1}$ 上所有调和函数构成的集合. 若 $\varphi \in \mathfrak{H}$, 显然 T_φ 在 \mathfrak{D} 上有界. 通过前文的定理, 我们有以下结论.

定理 3.4 设 $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$, 则 $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ 当且仅当其符号满足下列条件之一:

- (1) φ 和 ψ 属于 $\mathbb{C} + \mathfrak{D}$.
- (2) φ 和 ψ 属于 $\mathbb{C} + \overline{\mathfrak{D}}$.
- (3) φ, ψ 和 1 线性相关.

证明 使用 (3.2) 式, 此证明与定理 3.3 类似. 证毕.

注 3.5 若 $\varphi_0 \in \mathcal{A}_0$, 显然 $\tilde{T}_{\varphi_0} = 0$ (由 Dirichlet 核诱导). 不难验证 $\varphi_0 \neq 0$, 蕴涵 $T_{\varphi_0} \neq 0$. 当 $f = z^n$, $\varphi_0(z, \bar{z}) = \sum_{j \geq l} \sum_{l \geq 0} a_{l+j, l} z^{l+j} \bar{z}^l$ 时, 有 $T_{\varphi_0} f = \sum_{j \geq l} \sum_{l \geq 0} a_{l+j, l} \frac{n+j+1}{n+j+l+1} z^{n+j} \neq 0$. 因此, $T_\varphi \neq T_{\mathfrak{P}[\varphi|_{\mathbb{T}]}$ 对任意 $\varphi \in L^{\infty,1}$ 成立. 故本文只讨论了以调和函数为符号的 Toeplitz 算子的交换性.

参 考 文 献

- [1] Douglas R. G., Banach Algebra Techniques in Operator Theory (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [2] Zhu K., Operator Theory in Function Space, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.
- [3] Miao J., Zheng D. C., Compact operator on Bergman space, *Integral Equ. Oper. Theory*, 2004, **48**: 61–79.
- [4] Axler S., Čučković Z., Commuting toepnitz operator with harmonic symbols, *Integral Equ. Oper. Theory*, 1991, **14**: 1–12.
- [5] Cao G. F., Fredholm properties of Toeplitz operators on Dirichlet spaces, *Pacific J. Math.*, 1999, **188**: 209–224.
- [6] Duistermaat J. J., Lee Y. J., Toeplitz operators on Dirichlet space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **300**: 54–67.
- [7] Yu T., ToepLitz operator on the Dirichlet Space, *Integral Equ. Oper. Theory*, 2010, **67**: 163–170.
- [8] Chen Y., Lee Y. J., Nguyen Q. D., Algebraic properties of Toeplitz operators on the harmonic Dirichlet space, *Integral Equ. Oper. Theory*, 2011, **69**: 183–201.
- [9] Chartrand R., Toeplitz operators on Dirichlet-type spaces, *J. Operator Theory*, 2002, **48**: 3–13.