

文章编号: 0583-1431(2018)04-0601-08

文献标识码: A

L -函数的唯一性

林伟川

福建宁德师范学院数学系 宁德 352100
福建师范大学数学与信息学院 福州 350117
E-mail: sxlwc936@fjnu.edu.cn

林培强

福建师范大学数学与信息学院 福州 350117
E-mail: lpq.fj@hotmail.com

摘 要 本文利用 Nevanlinna 理论, 研究了在广义 Selberg 类中的 L -函数的唯一性. 证明了存在两个集合 S_1 (含有一个或两个元素), S_2 (含有三个元素), 使得当 $E(S_i, f) = E(S_i, L)$, $i = 1, 2$ 时, 有 $f \equiv L$.

关键词 黎曼 ζ 函数; L -函数; 分担集合; 唯一性

MR(2010) 主题分类 30D30, 30D35, 11M06

中图分类 O174.52

Uniqueness Theorems of L -Functions

Wei Chuan LIN

Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde 352100, P. R. China
School of Mathematics and Information, Fujian Normal University,
Fuzhou 350117, P. R. China
E-mail: sxlwc936@fjnu.edu.cn

Pei Qiang LIN

School of Mathematics and Information, Fujian Normal University,
Fuzhou 350117, P. R. China
E-mail: lpq.fj@hotmail.com

Abstract Using Nevanlinna theory, we study the uniqueness theorems of L -functions in the (extended) Selberg class and prove that there exist two sets S_1 (including one or two elements) and S_2 (including three elements) such that $f \equiv L$ if $E(S_i, f) = E(S_i, L)$ for $i = 1, 2$.

Keywords Riemann ζ function; L -function; sharing-set; uniqueness

MR(2010) Subject Classification 30D30, 30D35, 11M06

Chinese Library Classification O174.52

收稿日期: 2014-05-27; 接受日期: 2017-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371225); 福建省自然科学基金资助项目 (2011J01006)

1 引言及主要结果

1859 年, 著名数学家 Bernhard Riemann 提出: Riemann ζ 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

所有的非平凡零点都应该位于直线 $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (临界线 critical line) 上. 此猜想是 1900 年大数学家 David Hilbert 列出 23 个数学问题中的第 8 个问题, 也是 2000 年美国克雷数学研究所公布的 7 个千禧年数学问题之一, 至今尚无人给出一个合理的证明. 但围绕着 Riemann 猜想, 数学工作者对 Riemann ζ 函数进行了许多研究, 其中包括对 Riemann ζ 函数的推广 (L -函数) 进行研究. L -函数是数论中的重要研究对象, 其值分布问题已经被广泛地研究, 主要涉及 L -函数的零点的分布, 或更一般地, 涉及 L -函数的 c 值点, 即方程 $L(s) = c$ 在复平面 \mathbb{C} 上的解集^[9].

1989 年, Selberg^[7] 提出了 Selberg 类, 其中包括 Riemann ζ 函数及大多数的 Dirichlet 级数. Selberg 类是指形如

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

并且满足以下假设的 Dirichlet 级数的全体:

- (1) Ramanujan 假设. 对任意 $\epsilon > 0$, $a(n) \ll n^\epsilon$.
- (2) 解析延拓. 存在非负整数 k 使得 $(s-1)^k L(s)$ 是有穷级的整函数.
- (3) 函数方程. L 满足下列方程:

$$\Lambda_L(s) = \overline{\omega \Lambda_L(1 - \bar{s})},$$

其中, $\Lambda_L = L(s) Q^s \prod_{j=1}^K \Gamma(\lambda_j s + \nu_j)$, Q, λ_j 是正实数, 复数 ν_j, ω 满足 $\operatorname{Re} \nu_j \geq 0$ 且 $|\omega| = 1$.

(4) Euler 乘积. $L(s) = \prod_p \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}})$, 系数 $b(p^k)$ 满足 $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ 对某个 $\theta < \frac{1}{2}$ 成立, 这里 p 取遍所有素数.

备注 1 若 Dirichlet 级数 $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ 仅满足假设 (1)–(3), 则称 $L(s)$ 为广义 Selberg 类中的 L -函数. 本文所刻画的 L -函数皆为广义 Selberg 类中的 L -函数.

L -函数可解析延拓为复平面上的亚纯函数. 从这个角度看, 研究一个 L -函数和一个亚纯函数何时恒等就变得很有意义. 为此, 下面介绍函数分担值 (集) 的定义.

设 f 与 g 为两个亚纯函数, a 为任一复数, 如果 $f-a$ 与 $g-a$ 在计 (不计) 重数之下具有相同的零点, 则称 f 与 g 分担 a CM (IM). 设 S 是由 $\hat{\mathbb{C}} (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ 中的不同元素组成的一个集合, 定义

$$E(S, f) = \bigcup_{a \in S} \{z \mid f(z) = a, \text{计重数}\}, \quad \overline{E}(S, f) = \bigcup_{a \in S} \{z \mid f(z) = a, \text{不计重数}\}.$$

如果 $E(S, f) = E(S, g)$, 则称 f 和 g 分担集合 S CM. 如果 $\overline{E}(S, f) = \overline{E}(S, g)$, 则称 f 和 g 分担集合 S IM.

2010 年, Li^[4] 考虑 L -函数和亚纯函数分担两个值的情况, 获得如下结果.

定理 1.1^[4] 设 f 是具有有穷极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数, a, b 是两个判别的有穷复数. 若 f, L 分担 a CM, b IM, 则 $f \equiv L$.

备注 2 观察函数 $f = \frac{2\zeta}{\zeta+1}$, ζ 为 Riemann ζ 函数. 显然, f 具有无穷多个极点, 且 f 和 ζ 分担 $0, 1$ CM, 但它们并不恒等. 因此, 亚纯函数 f 具有有穷个极点是必要的. 随后, Li 和 Yi^[6] 在有穷个极点的条件下, 证明了定理 A 在三个 IM 分担值下仍然成立.

众所周知, 著名的 Gross 问题^[2] 促进众多数学工作者对具有分担值集的亚纯函数唯一性问题的深入研究, 得到一系列优秀的结果^[1, 2, 5, 11, 12]. 由 Gross 问题和定理 1.1, 自然地考虑问题: 如何寻找两个有限分担集合使得亚纯函数和 L -函数在满足分担条件下必恒等? 为了研究此问题, 我们先考察如下多项式

$$P(\omega) = (n-1)\omega^n - n\omega^{n-1},$$

其中 $n \geq 3$.

通过简单计算, 易知当 $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ 时, 函数 $P(\omega) + c$ 仅有单零点; 函数 $P(\omega) + 1$ 仅在 $\omega = 1$ 处是 2 重零点, 其余零点皆是单零点; 函数 $P(\omega)$ 仅在 $\omega = 0$ 处是 $n-1$ 重零点, 其余零点皆是单零点.

借助多项式 $P(\omega)$, 本文定义了具有 $n (\geq 3)$ 个元素的集合

$$S = \{\omega \mid P(\omega) + c = (n-1)\omega^n - n\omega^{n-1} + c = 0\}, \quad (1.1)$$

其中 $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. 若无特别声明, 文中各处出现的集合 S 均如 (1.1) 所定义. 同时, 我们证明了 L -函数涉及分担集合 S 的几个唯一性定理.

定理 1.2 设 f 为具有有穷个极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数. 若 $\overline{E}(\{0, 1\}, f) = \overline{E}(\{0, 1\}, L)$, $E(S, f) = E(S, L)$ 且 $n \geq 3$, $c \in \mathbb{C} - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, 则 $f \equiv L$.

备注 3 定理 1.2 中, 常函数 c 的要求是必须的. 当 $c = 0, 1$ 时, 由 $P(\omega)$ 的特征可知, 集合 S 包含的元素个数小于 n . 当 $c = \frac{1}{2}$ 时, 若 $n = 3$, 则

$$S = \left\{ \omega \mid 2\omega^3 - 3\omega^2 + \frac{1}{2} = 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

考察函数 $f = 1 - \zeta$, ζ 为 Riemann ζ 函数. 显然, f 仅有一个可能的极点, 且 f 和 ζ 分担 $\{0, 1\}$, S CM, 但它们并不恒等.

推论 1.3 设 f 为具有有穷个极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数, 则存在两个集合 S_1 (含有两个元素), S_2 (含有三个元素), 使得当 $\overline{E}(S_1, f) = \overline{E}(S_1, L)$, $E(S_2, f) = E(S_2, L)$ 时, $f \equiv L$ 成立.

定理 1.4 设 f 为具有有穷个极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数. 若 $\overline{E}(\{1\}, f) = \overline{E}(\{1\}, L)$, $E(S, f) = E(S, L)$ 且 $n \geq 3$, $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, 则 $f \equiv L$.

备注 4 定理 1.4 的条件 $n \geq 3$ 是精确的, 当 $n = 2$ 时,

$$S = \{\omega \mid \omega^2 - 2\omega + c = 0\} = \{1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c}\}.$$

考察函数 $f = 2 - \zeta$, ζ 为 Riemann ζ 函数. 显然, f 仅有一个可能的极点, 且 f 和 ζ 分担 1 和 S CM, 但 $f \neq \zeta$.

推论 1.5 设 f 为具有有穷个极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数, 则存在两个集合 S_1 (含有一个元素), S_2 (含有三个元素), 使得当 $\overline{E}(S_1, f) = \overline{E}(S_1, L)$, $E(S_2, f) = E(S_2, L)$ 时, $f \equiv L$ 成立.

推论 1.6 设 f 为具有有穷个极点的非常数亚纯函数, L 是非常数 L -函数, 则存在两个集合 S_1 (含有一个元素或者二个元素), S_2 (含有三个元素), 使得当 $E(S_i, f) = E(S_i, L)$, $i = 1, 2$ 时, $f \equiv L$ 成立.

在文 [11], Yi 证明了对于任意两个整函数 f 和 g , 如果存在两个分担集合 S_1, S_2 满足 $E(S_i, f) = E(S_i, g)$, $i = 1, 2$, 则 $f \equiv g$ 成立, $\max\{\#(S_1), \#(S_2)\} \geq 3$, 其中 $\#(S_i)$ 表示集合 S_i 的元素个数. 本文定理 1 和 2 表明, Yi^[11] 的结果对亚纯函数也有成立的可能.

2 主要引理

本文采用亚纯函数的 Nevanlinna 理论的标准记号^[3, 10], 当 f 的级 $\rho(f) < \infty$ 时, $S(r, f)$ 表示任意满足 $S(r, f) = O(\log r)$ 的量; 当 f 的级 $\rho(f) = \infty$ 时, $S(r, f)$ 表示任意满足 $S(r, f) = O(\log(rT(r, f)))$ 的量, 可能除去 r 的一个线性测度为有限的集合. 同时, 介绍本文引理或定理证明中所需要的辅助函数

$$F = P(f), \quad G = P(L), \quad H = \left(\frac{F''}{F'} - 2 \frac{F'}{F+c} \right) - \left(\frac{G''}{G'} - 2 \frac{G'}{G+c} \right), \quad U = \frac{F'}{F+c} - \frac{G'}{G+c},$$

这里 $P(\omega) = (n-1)\omega^n - n\omega^{n-1}$, $n \geq 3$.

下面, 给出一些定理证明中所需要的引理.

引理 2.1^[8] 若 L 为非常数 L -函数, 则 $T(r, L) = \frac{d_L}{\pi} r \log r + O(r)$, $r \rightarrow \infty$, 这里 $d_L = 2 \sum_{j=1}^K \lambda_j$ 称为 L -函数的次数, 其中 K 和 λ_j 由 L -函数定义中的假设 (3) 函数方程给出.

引理 2.2^[10] 设 f 为非常数亚纯函数, $Q(f) = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n$, 其 $a_0 (\neq 0)$, a_1, \dots, a_n 均为 f 的小函数, 即

$$T(r, a_i) = o(T(r, f)), \quad r \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $T(r, Q(f)) = nT(r, f) + S(r, f)$.

引理 2.3 若具有有穷个极点的非常数亚纯函数 f 和非常数 L -函数 L 满足 $E(S, f) = E(S, L)$, 则

$$(n-1)T(r, f) \leq nT(r, L) + S(r, f), \quad (n-1)T(r, L) \leq nT(r, f) + S(r, L),$$

进而有 $\rho(f) = \rho(L) \leq 1$.

证明 因为 f 只有有穷个极点, 则 $\overline{N}(r, f) = S(r, f)$. 此外, L -函数 L 只可能在 $s = 1$ 处取极点, 所以 $\overline{N}(r, L) = S(r, L)$. 设 $S = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 根据 Nevanlinna 第二基本定理, 有

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b_i}\right) + S(r, f) \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b_i}\right) + S(r, f) \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-b_i}\right) + S(r, f) \\ &\leq nT(r, L) + S(r, f). \end{aligned}$$

同理, 可以证明 $(n-1)T(r, L) \leq nT(r, f) + S(r, L)$. 再根据引理 2.1, 有 $\rho(f) = \rho(L) \leq 1$. 证毕.

引理 2.4 设具有有穷个极点的非常数亚纯函数 f 和 L -函数 L 满足 $\overline{E}(\{1\}, f) = \overline{E}(\{1\}, L)$, $E(S, f) = E(S, L)$. 若 $H \neq 0$, $n \geq 3$, 则

$$N_1\left(r, \frac{1}{F+c}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r, f),$$

其中 $\overline{N}_0(r, \frac{1}{f'})$ 为 f' 的零点扣除 $f(f-1)(F+c)$ 的零点的精简计数函数, $\overline{N}_0(r, \frac{1}{L'})$ 类似定义.

证明 因为 $E(S, f) = E(S, L)$, 所以 F, G 分担 $-c$ CM, 通过计算可以发现 $F+c, G+c$ 的公共单零点是 H 的零点. 注意到

$$\begin{aligned} m(r, H) &\leq m\left(r, \frac{F''}{F'}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F+c}\right) + m\left(r, \frac{G''}{G'}\right) + m\left(r, \frac{G'}{G+c}\right) + \log 4 \\ &= S(r, F') + S(r, F) + S(r, G') + S(r, G) \\ &= S(r, F) + S(r, G) = S(r, f). \end{aligned}$$

根据 Nevanlinna 第一基本定理, 易得

$$N_1\left(r, \frac{1}{F+c}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{H}\right) \leq m(r, H) + N(r, H) + O(1) \leq N(r, H) + S(r, f).$$

因为 F, G 分担 $-c$ CM, 所以 $F+c$ 的零点不是 H 的极点. 于是, H 的极点只能来自 F', G' 的零点和 F, G 的极点, 即来自 $f, f-1, L, L-1$ 的零点, f' 的非 $f(f-1)(F+c)$ 的零点, L' 的非 $L(L-1)(G+c)$ 的零点和 f, L 的极点. 因为 $\overline{E}(\{1\}, f) = \overline{E}(\{1\}, L)$, $f-1$ 与 $L-1$ 有相同的零点. 还应该注意到, H 的极点都是单极点. 于是

$$\begin{aligned} N(r, H) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, L) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) \\ &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

证毕.

引理 2.5 设有穷个极点的非常数亚纯函数 f 和非常数 L -函数 L 满足

$$\overline{E}(\{0, 1\}, f) = \overline{E}(\{0, 1\}, L),$$

且 $P(f) \equiv P(L)$. 若 $n \geq 3$, 则 $f \equiv L$.

证明 由 $P(f) \equiv P(L)$ 得

$$\begin{aligned} (f-1)^2(f-\alpha_1)(f-\alpha_2) \cdots (f-\alpha_{n-2}) &\equiv (L-1)^2(L-\alpha_1)(L-\alpha_2) \cdots (L-\alpha_{n-2}), \quad (2.1) \\ f^{n-1}\left(f - \frac{n}{n-1}\right) &\equiv L^{n-1}\left(L - \frac{n}{n-1}\right), \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$ 为多项式函数 $P(\omega) + 1$ 不等于 1 的零点. 又由 $\overline{E}(\{0, 1\}, f) = \overline{E}(\{0, 1\}, L)$ 知 f, L 分担 $0, 1$ CM. 根据定理 1.1, 得 $f \equiv L$. 证毕.

引理 2.6 设非常数亚纯函数 f 和非常数 L -函数 L 分担 1 IM, $n \geq 3$. 若 $P(f) \equiv P(L)$, 则 $f \equiv L$.

证明 首先由 $P(f) \equiv P(L)$ 可得 (2.1) 式. 又根据 f 和 L 分担 1 IM, 可知 f, L 分担 $1, \infty$ CM. 所以 $0, \infty$ 是 $\frac{f-1}{L-1}$ 的 Picard 例外值. 不妨设

$$\frac{f-1}{L-1} = e^{p(s)}, \quad (2.2)$$

其中 $p(s)$ 是一个线性多项式.

设

$$P(\omega) + 1 = c_0(\omega - 1)^n + c_1(\omega - 1)^{n-1} + \cdots + c_{n-2}(\omega - 1)^2, \quad (2.3)$$

计算可得 $c_0 = n - 1$, $c_1 = n^2 - 2n$. 注意到 $n \geq 3$, 因此 c_0, c_1 都不等于零. 将 (2.2) 式和 (2.3) 式代入 $P(f) + 1 \equiv P(L) + 1$, 得

$$c_0(e^{np(s)} - 1)(L - 1)^n + c_1(e^{(n-1)p(s)} - 1)(L - 1)^{n-1} + \cdots + c_{n-2}(e^{2p(s)} - 1)(L - 1)^2 \equiv 0.$$

设

$$M = c_0(e^{np(s)} - 1)(L - 1)^n + c_1(e^{(n-1)p(s)} - 1)(L - 1)^{n-1} + \cdots + c_{n-2}(e^{2p(s)} - 1)(L - 1)^2,$$

根据引理 2.1, 有

$$\deg p = \rho(L) \leq 1.$$

于是, 对任意整数 $2 \leq k \leq n$, $T(r, c_{n-k}(e^{kp(s)} - 1)) = o(T(r, L))$, $r \rightarrow \infty$. 若 $e^{np(s)} \not\equiv 1$, 则 $c_0(e^{np(s)} - 1) \not\equiv 0$, 根据引理 2.2 和 2.1, 有

$$T(r, M) = nT(r, L - 1) + S(r, L - 1) = \frac{nd_L}{\pi} r \log r + O(r),$$

与 $M \equiv 0$ 矛盾. 因此, $e^{np(s)} \equiv 1$. 类似地, 可以证明 $e^{(n-1)p(s)} \equiv 1$, 从而有 $e^{p(s)} \equiv 1$, 即 $f \equiv L$. 证毕.

引理 2.7 非常数 L -函数不存在 ∞ 以外的广义 Picard 例外值.

证明 设 L 为一非常数 L -函数, 则 ∞ 是 L 的广义 Picard 例外值, L 至多有一个有穷的广义 Picard 例外值. 因为 L 是 L -函数, 所以存在非负整数 k , 使得 $(s - 1)^k L(s)$ 是一个有穷级的整函数.

假设 a 是 L 的有穷广义 Picard 例外值, 且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 分别是 $L - a$ 的 k_1, k_2, \dots, k_t 阶零点, 则

$$\frac{(s - 1)^k (L(s) - a)}{(s - \beta_1)^{k_1} (s - \beta_2)^{k_2} \cdots (s - \beta_t)^{k_t}} = e^{q(s)},$$

其中 $q(s)$ 是一个多项式.

根据引理 2.1, $\rho(L) \leq 1$. 显然, $\deg q \geq 1$, 否则, L 是有理函数. 因此, $\deg q = \rho(L) = 1$. 不妨设 $q(s) = a_0 s + a_1$, 计算可得

$$T(r, L) = \frac{|a_0|}{\pi} r + O(\log r),$$

与引理 2.1 矛盾. 所以, 任何有穷数都不是 L 的广义 Picard 例外值. 证毕.

3 定理的证明

定理 1.2 的证明 首先, 我们断言 $U \equiv 0$. 若 $U \not\equiv 0$, 注意到当 $n \geq 3$ 时, $f(f - 1)$ 的零点是 F' 的零点. 由 $\overline{E}(\{0, 1\}, f) = \overline{E}(\{0, 1\}, L)$, 易知 $f(f - 1)$ 的零点也是 G' 的零点, 因此是 U 的零点. 所以

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{U}\right).$$

根据 $E(S, f) = E(S, L)$ 可知, $F + c, G + c$ 的零点不是 U 的极点, 则 U 的极点只能来自 F' 和 G' 的极点. 因此

$$N(r, U) \leq \overline{N}(r, F') + \overline{N}(r, G') \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, L) = S(r, f). \quad (3.1)$$

又注意到

$$m(r, U) \leq m\left(r, \frac{F'}{F+c}\right) + m\left(r, \frac{G'}{G+c}\right) + \log 2 = S(r, f). \quad (3.2)$$

根据引理 2.3 可知 $S(r, f) = S(r, L)$. 再结合 (3.1), (3.2) 式, 有

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \\ &\leq N\left(r, \frac{1}{U}\right) + S(r, f) \\ &\leq m(r, U) + N(r, U) + S(r, f) \\ &= S(r, f), \end{aligned}$$

这就导致矛盾. 因此, $U \equiv 0$. 通过积分运算可得 $F \equiv AG + B$, 其中 A, B 是常数, 且 $A \neq 0$. 可以断言存在点 s_1 , 使得 $P(f(s_1)) = -c$. 否则 f 有 $n(\geq 3)$ 个 Picard 例外值, 矛盾. 所以 $Ac - B = c$. 于是得到

$$F \equiv AG + (A-1)c, \quad A \neq 0. \quad (3.3)$$

根据 $\overline{E}(\{0, 1\}, f) = \overline{E}(\{0, 1\}, L)$, 可以区分以下三种情况讨论.

情况 1 若 f, L 有公共零点 s_2 , 则 $P(f(s_2)) = P(L(s_2)) = 0$, 代入 (3.3) 式得 $A = 1$.

情况 2 若 f, L 有公共 1- 值点 s_3 , 则 $P(f(s_3)) = P(L(s_3)) = -1$, 代入 (3.3) 式得 $A = 1$.

情况 3 若 f, L 无公共零点, 1- 值点, 根据引理 2.7, 则存在判别的两个点 s_4, s_5 , 使得 $f(s_4) = L(s_5) = 0, f(s_5) = L(s_4) = 1$, 代入 (3.3) 式, 经简单计算得

$$A = -1, \quad c = \frac{1}{2}.$$

与定理 1 的假设 $c \neq \frac{1}{2}$ 矛盾.

综合以上情况可知 $A = 1$, 即 $P(f) \equiv P(L)$. 根据引理 2.5 可得 $f \equiv L$. 证毕.

定理 1.4 的证明 分三种情况考虑:

情况 1 $H \neq 0$ 且 $U \neq 0$.

类似定理 1, 由 $\overline{E}(\{1\}, f) = \overline{E}(\{1\}, L)$, 可得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{U}\right). \quad (3.4)$$

根据引理 2.3 可知 $S(r, f) = S(r, L)$. 再结合 (3.1), (3.2), (3.4) 式, 有

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq S(r, f).$$

因为 $E(S, f) = E(S, L)$, 所以 F, G 分担 $-c$ CM, 进而

$$N_1\left(r, \frac{1}{F+c}\right) = N_1\left(r, \frac{1}{G+c}\right).$$

依次利用 Nevanlinna 第二基本定理, 引理 2.4, Nevanlinna 第一基本定理和引理 2.2, 得

$$\begin{aligned}
 n[T(r, f) + T(r, L)] &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{F+c}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \\
 &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{G+c}\right) + \overline{N}(r, L) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-1}\right) - \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r, L) \\
 &\leq N_1\left(r, \frac{1}{F+c}\right) + \frac{1}{2}\left[N\left(r, \frac{1}{F+c}\right) + N\left(r, \frac{1}{G+c}\right)\right] + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \\
 &\quad - \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) - \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r, f) \\
 &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) + 3\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \frac{n}{2}[T(r, f) + T(r, L)] + S(r, f) \\
 &\leq \left(1 + \frac{n}{2}\right)[T(r, f) + T(r, L)] + S(r, f).
 \end{aligned}$$

这与 $n \geq 3$ 矛盾. 因此, 这种情况被排除了.

情况 2 $U \equiv 0$. 类似定理 1.2, 同样可得 (3.3) 式. 再由 $\overline{E}(\{1\}, f) = \overline{E}(\{1\}, L)$ 及引理 2.7, f, L 必有公共 1- 值点. 所以 $P(f) \equiv P(L)$. 最后, 根据引理 2.6 可得 $f \equiv L$.

情况 3 $H \equiv 0$. 积分得

$$F = \frac{AG + B}{CG + D},$$

其中 A, B, C, D 是常数, 且 $AD - BC \neq 0$. 若 $C \neq 0$, 注意到 $AG + B, CG + D$ 都是关于 L 的 n 次多项式, 根据引理 2.7, 可得 F 或者为常数函数, 或者有无穷多个极点, 这与定理假设矛盾. 于是必有 $C = 0, D \neq 0$, 从而有

$$F = \frac{A}{D}G + \frac{B}{D}.$$

类似情况 2, 可得 $f \equiv L$. 证毕.

致谢 感谢审稿人的建设性意见.

参 考 文 献

- [1] Frank G., Reinders M., A unique range set for meromorphic functions with 11 elements, *Complex Var. Theory Appl.*, 1998, **37**(1-4): 185-193.
- [2] Gross F., Factorization of Meromorphic Functions and Some Open Problems, *Complex Analysis*, Springer, Berlin, 1977.
- [3] Hayman W. K., Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [4] Li B. Q., A result on value distribution of L -functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, **138**(6): 2071-2077.
- [5] Lin W. C., Yi H. X., Uniqueness theorems for meromorphic functions that share three sets, *Complex Var. Theory Appl.*, 2003, **48**(4): 315-327.
- [6] Li X. M., Yi H. X., Results on value distribution of L -functions, *Mathe. Nachr.*, 2013, **286**(13): 1326-1336.
- [7] Selberg A., Old and New Conjectures and Results About a Class of Dirichlet Series, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory, Maiori, 1989, **1992**: 367-385.
- [8] Steuding J., How many values can L -functions share, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, 2004, **7**: 70-81.
- [9] Steuding J., Value-distribution of L -functions, Springer, Berlin, 2007.
- [10] Yang C. C., Yi H. X., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Science Press, Beijing, 2003.
- [11] Yi H. X., On a question of Gross concerning uniqueness of entire functions, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1998, **57**(2): 343-349.
- [12] Yi H. X., Meromorphic functions that share two sets, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2002, **45**(1): 75-82.