文章编号: 0583-1431(2018)04-0591-10 **文献标识码: A**

非高斯勒维过程驱动下随机粘弹性波动方程的不变测度

梁 飞 乔 焕

西安科技大学理学院 西安 710054
E-mail: fliangmath@126.com; 13700234629@126.com

摘 要 本文研究非高斯勒维过程驱动下一类带有阻尼项的随机粘弹性波动方程. 我们在适当的条件下, 给出温和解生成的转移半群不变测度的存在唯一性.

关键词 随机粘弹性波动方程; 非高斯勒维过程; 不变测度
MR(2010) 主题分类 35A01, 60H15, 35L20
中图分类 O177.2

Invariant Measure of Stochastic Viscoelastic Wave Equation Driven by a Non-Gaussian Lévy Process

Fei LIANG Huan QIAO

College of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054*, P. R. China*
E-mail: *fliangmath@126.com*; 13700234629@126.com

Abstract A damped stochastic viscoelastic wave equation driven by a non-Gaussian Lévy process is studied. Under appropriate conditions, we show the existence of a unique invariant measure associated with the transition semigroup under mild conditions.

Keywords stochastic viscoelastic wave equation; non-Gaussian Lévy process; invariant measure
MR(2010) Subject Classification 35A01, 60H15, 35L20
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

众所周知, 粘弹性物质具有自然的阻尼, 由于这个特殊性质, 使得这些物质混合后保留原有

收稿日期: 2017-06-14; 接受日期: 2017-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501442);
陕西省自然科学基金资助项目 (2016JM1025); 西安市科技局项目 (2017145SF/WM036)

的性质. 从数学的角度, 可以通过积分微分算子来描述这些阻尼效应. 例如粘弹性波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-s)\operatorname{div}(a(x)\nabla u)ds+f(t,u,u_t)=0, & (x,t)\in D\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial D\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x), & x\in D \end{cases} \tag{1.1}$$

用来描述粘弹性物质微粒 x 在时间 t 的位置 $u(x,t)$, 其中 g 是松弛函数项. 方程 (1.1) 解的性质已被很多学者广泛研究 [7, 8, 22, 23]. 当阻尼项为 0 时 ($f(t,u,u_t)=f(t,u)$), Dafermos [8] 证明了当时间趋于无穷, 粘弹性系统的解将退化到 0, 但没有给出精确的退化率. 利用二阶估计的方法, Rivera [22] 给出了一类带有记忆项的线性粘弹性系统解的一致退化率. 对于特殊的情形, Rivera 和 Salvatierra [23] 证明了当 g 指数退化时, 能量也是指数退化的. 另一方面, Cavalcanti 和 Oquendo [7] 考虑带有非线性局部分数阻尼项的非线性方程并获得能量的指数和多项式退化率. 在这些文献中, 证明退化估计的主要方法是 Komornik 和 Zuazua [16] 引入的关于扰动能量的李雅普诺夫泛函技巧. 最近, Alalau-Boussouira 等人 [1] 给出了一般二阶积分微分方程能量退化的一致估计方法. 有关方程 (1.1) 解的渐近性退化估计的更多细节, 见 [3, 11, 13, 21] 及其文献.

本文考虑随机外部环境对系统 (1.1) 的影响. 首先给出一些和勒维过程相关的名词. 令 $(\Omega, \mathscr{F}, (\tilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ 是一个完备的滤波概率空间, $N:\mathscr{B}(Z\times[0,\infty))\times\Omega\to\mathbf{N}\cup\{0\}$ 是特征测度 $\pi(\cdot)$ 定义在 $(Z,\mathscr{B}(Z))$ 上的泊松测度, 这里 $Z=\mathbb{R}^m$ $(m\in\mathbf{N})$, $\tilde{N}(dz,dt):=N(dz,dt)-\pi(dz)dt$ 是带有补偿泊松随机测度. 特征测度

$$\pi(z)=\lambda(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})$$

满足

$$\pi(\{0\})=0,\quad \int_Z 1\wedge|z|^2\pi(dz)<\infty, \tag{1.2}$$

这里, λ 是泊松跳跃参数. 由 (1.2), 当 $Z_1=\{z\in Z;|z|\leq 1\}$ 时, 可定义

$$\overline{\theta}=\int_{Z_1}|z|^2\pi(dz),\quad \underline{\theta}=\pi(Z\setminus Z_1). \tag{1.3}$$

出于气动弹性动力学引起的问题 (描述弹性面板在空气动力下激振), 我们考虑下面由非高斯勒维过程驱动的随机粘弹性波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\Delta u+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau+\kappa u_t(t,x) & \\ \quad =\int_{Z_1}a(u(t-,x),z)\tilde{N}(dz,dt)+\int_{Z\setminus Z_1}b(u(t-,x),z)N(dz,dt), & x\in D,\quad t\in(0,T),\\ u(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0, & x\in\partial D,\quad t\in(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=v_0(x), & x\in D, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中具有光滑边界 ∂D 的有界区域, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ 是外法线导数, $\kappa>0$ 表示阻尼系数. 随机测度 $\tilde{N}(dz,dt)=N(dz,dt)-\pi(dz)dt$ 是补偿为 $N(dz,dt)$ 的补偿泊松随机测度. 另外, 函数 g, $a:\mathbb{R}\times Z_1\to\mathbb{R}$ 和 $b:\mathbb{R}\times Z\setminus Z_1\to\mathbb{R}$ 均为正则函数, 精确定义将在后面给出.

如果 $g\equiv 0$, 方程 (1.4) 则变为随机波动方程. Chow [9] 讨论了一类非线性项为多项式的非耗散随机波动方程, 给出了解的一些性质, 如渐近稳定性和不变测定等. Gao 和 Liang [14] 研究了非

高斯勒维过程驱动的四阶非线性随机梁方程, 获得了解的全局存在性及其不变测度. Kim [15] 和 Barbu 等人 [4] 分别考虑了带有非线性阻尼项和耗散阻尼项的随机波动方程初边值问题, 均证明了不变测度的存在性. 也有另外一些文献关注带有线性阻尼项的随机波动方程解的全局存在性和不变测度, 例如文 [6, 10, 12, 20].

如果 $g \neq 0$, Wei 和 Jiang [25] 研究了白噪声驱动的带有记忆项的随机波动方程

$$u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-s)\Delta u ds+h(u_t)=f(u)+\sigma(t,u,\nabla u)\partial_t W(t,x), \quad x\in D, \quad t\in(0,T). \tag{1.5}$$

当 $h(u_t)=u_t$ 和 $\sigma\equiv 1$ 时, 证明了方程 (1.5) 解的存在唯一性, 并在对 g 适当的假设下, 还获得了能量泛函的退化估计. 在文 [17], 作者将文 [25] 中的存在唯一性结果推广到 $\sigma=\sigma(u,u_t,x,t)$ 的情形. 进一步, 当 $\sigma=\sigma(x,t)$ 时, 利用能量不等式, 他们也证明了要么局部解在 L^2 模意义下以正的概率在有限时刻爆破, 要么平方矩在有限时刻爆破. 最近, Liang 和 Gao [18] 考虑了方程 (1.5) 在附加噪声驱动下 $h(u_t)=|u_t|^{q-2}u_t$ 和 $f(u)=|u|^{p-2}u$ 的情形. 他们证明了: 如果 $q\geq p$, 方程 (1.5) 的解全局存在; 如果 $p>q$, 要么局部解在 L^2 模意义下以正的概率在有限时刻爆破, 要么平方矩在有限时刻趋向无穷. 同时, Liang 和 Gao [19] 还考虑了问题 (1.4) 在补偿泊松随机测度驱动下的情形, 利用适当的能量泛函给出了全局温和解的存在唯一性, 并在适当的附加假设下给出了零解的指数渐近稳定性.

本文研究问题 (1.4) 在比文 [19] 更广泛更一般的非高斯勒维噪声扰动下解的情形. 与随机波动方程相比较, 方程 (1.4) 中的记忆项 $\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$ 将会给问题带来一定的困难. 与文 [19] 相比较, 本文的扰动项更广泛更一般, 处理起来也将更复杂. 我们将采用后推的方法 [5] 证明局部弱解的存在唯一性, 并在证明过程中我们将不对勒维测度做任何假设. 同时, 本文弱解的结果也更强于文 [19] 温和解的结果. 另外, 文 [19] 主要利用李雅普诺夫泛函技巧研究零解的渐近稳定性, 而本文主要研究温和解生成的转移半群不变测度的存在唯一性, 它们是完全不同的两个方面.

本文第 2 部分给出需要的一些假设和弱解全局存在唯一性定理. 第 3 部分, 证明温和解生成的转移半群不变测度的存在唯一性.

2 预备知识

首先, 我们引入一些本文常用的名词. 令 $H=L^2(D)$, 其积和模分别为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$. 令 V 是索伯列夫空间 $H_0^1(D)$, 对于任意的 $\phi\in V$, 定义其模为 $\|\phi\|_V=\|\nabla\varphi\|$. 令 $\mathscr{H}=V\times H$, 对于任意的 $U=(u,v)^T\in\mathscr{H}$, 定义其模为 $\|U\|_{\mathscr{H}}=(\|\nabla u\|^2+\|v\|^2)^{\frac{1}{2}}$. 对于函数 g, a 和 b, 假设

(G1) $g\in C^1[0,\infty)$ 是非负非增函数且满足

$$1-\int_0^\infty g(s)ds=l>0.$$

(G2) 存在一个正的常数 $\alpha>0$, 使得

$$g'(t)\leq-\alpha g(t), \quad \forall\, t\geq 0.$$

(G3) $a:\mathbb{R}\times Z\to\mathbb{R}$ 是可测的, 且存在一个常数 $L_a>0$, 使得

$$a(0,z)\equiv 0, \quad |a(r_1,z)-a(r_2,z)|^2\leq L_a|r_1-r_2|^2|z|^2.$$

(G4) 函数 $b:\mathbb{R}\times Z\setminus Z_1\to\mathbb{R}$ 是可测的, 存在 $L_b>0$, 使得

$$b(0,z)\equiv 0,\quad |b(r_1,z)-b(r_2,z)|^2\le L_b|r_1-r_2|^2|z|^p,\quad \theta_p=\int_{Z\setminus Z_1}|z|^p\pi(dz)<\infty,\quad p\ge 2.$$

注 2.1 在 (G3) 和 (G4) 中, 关于函数对 (a,b) 的一个例子是 $a(r,z)=b(r,z)=\sigma(r)z$, 其中 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个利普希茨映射, $\sqrt{L_a}$ 是利普希茨系数, $\sigma(0)=0$. 在这种情况下, 扰动项在 (1.4) 可写为

$$\sigma(u(t))dN_t,$$

其中 $(N_t)_{t\ge 0}$ 为

$$N_t=\int_0^t\int_{Z_1}z\tilde{N}(dz,ds)+\int_0^t\int_{Z\setminus Z_1}zN(dz,ds).$$

注意到 $\tilde{N}(dz,dt)=N(dz,dt)-\pi(dz)dt$, N 是一个泊松随机测度且满足 (1.2), 有

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta N_t}]=\exp\left[t\left(\mathrm{i}\theta\lambda+\int_Z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}-1-\mathrm{i}\theta z1_{|z|<1})\pi(dz)\right)\right],$$

这里 λ 是泊松跳跃度. 此时由 Lévy–Khintchine 定理, 如 Sato [24] 可得 $(N_t)_{t\ge 0}$是一个勒维测度.

众所周知, 方程 (1.4) 等价于下面的伊藤系统

$$\begin{cases} du=vdt,\\ dv=\left(\Delta u-\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds-\kappa v\right)dt+\int_{Z_1}a(u(t-),z)\tilde{N}(dz,dt)\\ \qquad\quad+\int_{Z\setminus Z_1}b(u(t-),z)N(dz,dt),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x). \end{cases}\tag{2.1}$$

令

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & -\kappa I\end{pmatrix},$$

$$G(U(t)g)=\begin{pmatrix}0\\ -\int_0^t g(t-s)\Delta u ds+\int_{Z_1}a(u(t-),z)\tilde{N}(dz,dt)+\int_{Z\setminus Z_1}b(u(t-),z)N(dz,dt)\end{pmatrix}.$$

这时系统 (2.1) 能被化为一个随机微分方程

$$\begin{cases} dU(t)=\Lambda U(t)dt+G(U(t))dt,\\ U(0)=u(0).\end{cases}\tag{2.2}$$

因此, 我们可以给出方程 (1.4) 解的定义.

定义 2.2 一个 $\mathscr{H}$- 值 $(\tilde{\mathscr{F}}_t)_{t\ge 0}$- 可知的过程 $U(t)=(u,v)^T$ 如果满足下面的两个条件, 则被称为 (1.4) 关于初值为 $U(0)=(u_0(x),v_0(x))^T\in\mathscr{H}$ 的一个弱解:

(1) 对每一个 $T>0$, 依概率几乎处处有 $U\in C([0,T];V)\times\mathbb{D}([0,T];H)$, 其中 $\mathbb{D}([0,T];H)$ 代表所有 RCLL-$(\tilde{\mathscr{F}}_t)_{t\ge 0}$- 可知的随机过程组成的空间.

(2) 当 $t\ge 0$ 时, 对于任意的测试函数 $\phi=(\phi_1,\phi_2)^T\in D(\Lambda^*)$,

$$(U(t),\phi)=(U(0),\phi)+\int_0^t(U(s),\Lambda^*\phi)ds+\int_0^t(G(U(t)),\phi)ds$$

几乎处处成立, 其中 Λ^* 代表 Λ 的伴随算子, $D(\Lambda^*)$ 是其定义域.

在 g 和 a 的假设下, 我们可以获得下面带有补偿泊松随机测度的微分方程组温和解的全局存在唯一性

$$\begin{cases} du = vdt, \\ dv = \left(\Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \kappa v\right)dt + \int_{Z_1} a(u(t-), z)\tilde{N}(dz, dt), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

定理 2.3 (见文 [19, 定理 3.5]) 假设函数 g 和 a 满足条件 (G1), (G3), $(u_0, u_1) \in V \times H$, 则方程组 (2.3) 存在唯一的全局弱解.

定理 2.4 假设条件 (G1), (G2) 和 (G4) 成立. 则对任意的 $U(0) = (u_0(x), v_0(x)) \in \mathscr{H}$, 方程组 (1.4) 存在唯一的全局弱解 $U(t) = (u(t), v(t))_{t\geq 0}$.

证明 由 (1.2) 可知 $\pi(Z \setminus Z_1) < \infty$. 因此, 过程 $(N(Z \setminus Z_1 \times [0,t]))_{t\geq 0}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中的每个有限区间内仅有有限个跳跃点, 即存在递增的跳跃时间 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots \tau_n < \cdots$. 进一步, $(N(A \times [0,t]))_{(A,t)\in\mathscr{B}(Z\setminus Z_1)\times\mathbb{R}_+}$ 能被一个 Z- 值的点过程 $(p(t))_{t\geq 0}$ 代替, 其定义域 D_p 是 $\mathbb{R}_+$ 中的一个可数子集合. 也即是对 $t > 0$, $A \in \mathscr{B}(Z \setminus Z_1)$,

$$N(A \times [0,t]) = \sum_{s\in D_p, s\leq t} \mathbf{1}_A(p(s)). \tag{2.4}$$

因此, 对 $k = 1, 2, \ldots$, $\tau_k \in \{t \in D_p; p(t) \in Z \setminus Z_1\}$, 易见, 当 $k \to \infty$ 时, τ_k 是一个 $(\bar{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$- 停时及 $\tau_k \to \infty$. 此时, 对每一个 $T \in (0, \tau_1)$, 利用定理 2.3 可知方程组 (2.3) 在 $[0, \tau_1)$ 上存在一个唯一的弱解 $U^0(t) \in C([0,T]; V) \times \mathbb{D}([0,T]; H)$. 构造

$$U^1(t) = \begin{cases} U^0(t), \quad t \in [0, \tau_1), \\ U^0(\tau_1-) + \begin{pmatrix} 0 \\ b(u(\tau_1-), p(\tau_1)) \end{pmatrix}^T, \quad t = \tau_1, \end{cases}$$

则 $(U^1(t))_{0<t\leq\tau_1}$ 是方程组 (2.3) 在时间区间 $[0, \tau_1]$ 上的唯一解. 进一步, 定义

$$\begin{cases} \tilde{U}_0^1 = U^1(\tau_1), \\ \tilde{p}(t) = p(t + \tau_1), \\ D_{\tilde{p}} = \{t \geq 0; t + \tau_1 \in D_p\}, \\ \bar{\mathscr{F}}_t = \bar{\mathscr{F}}_{\tau_1 + t}. \end{cases}$$

注意到 $\tau_2 - \tau_1 \in \{t \in D_{\tilde{p}}, \tilde{p}(t) \in Z \setminus Z_1\}$, 我们可以用构造 $(U^1(t))_{0<t\leq\tau_1}$ 的方法构造随机过程 $(\tilde{U}^1(t))_{0<t\leq\tau_2-\tau_1}$. 定义

$$U^2(t) = \begin{cases} U^1(t), & t \in [0, \tau_1], \\ \tilde{U}^1(t - \tau_1), & t \in [\tau_1, \tau_2], \end{cases}$$

则 $U^2(t)$ 是方程组 (1.4) 在时间区间 $[0, \tau_2]$ 上的唯一弱解. 不断地重复上述过程, 我们可以获得方程组 (1.4) 的唯一全局弱解. 证毕.

3 不变测度

本节研究转移半群 $(\mathscr{S}_t)_{t\geq 0}$ 不变测度的存在唯一性, 其中转移半群被定义为

$$\mathscr{S}_t\Phi((u_0, v_0)) = \mathbf{E}[\Phi(U_t^0((u_0, v_0)))], \quad (u_0, v_0) \in \mathscr{H}, \quad \Phi \in C_b(\mathscr{H}), \tag{3.1}$$

这里

$$U_t^0((u_0,v_0))=(u_t^0(u_0),v_t^0(v_0))$$

表示方程 (1.4) 初值为 (u_0,v_0) 的弱解. 至于弱解 $U_t^0((u_0,v_0))$ 的马尔科夫性, 请参阅文 [2].

为了建立 $(\mathscr{S}_t)_{t\geq 0}$ 的不变测度, 令

$$\delta_0=\min\left\{\frac{\lambda_1}{2\kappa},\ \frac{\kappa}{4},\ \frac{\alpha}{2}\right\}, \tag{3.2}$$

其中 λ_1 是带有齐次狄利克雷边界条件 $-\Delta$ 算子的第一特征值, κ 是阻尼系数, α 在 (G2) 中给出. 对于方程组 (1.4) 的弱解 $(U(t))_{t\geq 0}=(u(t),v(t))_{t\geq 0}$, 定义 $\rho_\delta(t)=\delta u(t)+v(t)$. 由方程组 (1.4), 过程 $(\rho_\delta(t))_{t\geq 0}$ 是一个 RCLL-$(\bar{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$ 的半鞅且满足动力系统

$$\begin{cases} d\rho_\delta(t)=(\delta-\kappa)\rho_\delta(t)dt-[\delta(\delta-\kappa)-\Delta]u(t)dt-\displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{Z_1} a(u(t-),z)\tilde{N}(dz,ds)+\int_{Z\setminus Z_1} b(u(t-),z)N(dz,ds), \quad t>0, \\ \rho_\delta(0)=\delta u_0+u_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

此时, 我们能在 $\mathscr{H}$ 上定义能量泛函

$$\mathscr{E}^\delta(u(t))=\|\rho_\delta(t)\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t),$$

其中

$$(g\circ w)(t)=\int_0^t g(t-s)\|w(t)-w(s)\|^2ds.$$

引理 3.1 假设 (G1) 和 (G2) 成立. 如果 $l>\frac{5}{6}$ 且 L_a, L_b, κ 满足

$$\frac{2\bar{\theta}L_a+4\theta_pL_b}{\lambda_1}<\delta_0, \quad \kappa>\theta_p, \tag{3.4}$$

则在条件 (G3) 和 (G4) 下, 存在正的常数 $\delta\leq\delta_0$ 和 $\lambda=\lambda(\delta)$, 使得

$$\mathscr{E}^\delta(u(t),v(t))\leq\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)-\lambda\int_0^t\mathscr{E}^\delta(u(s),v(s))ds+M_t,$$

其中 $(M_t)_{t\geq 0}$ 是一个 RCLL-$(\bar{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$ 的均值为零的鞅, 可表示为

$$\begin{aligned} M_t=&\int_0^t\int_{Z_1}[\|\rho_\delta(s-)+a(u(s-),z)\|^2-\|\rho_\delta(s-)\|^2]\tilde{N}(dz,ds) \\ &+\int_0^t\int_{Z\setminus Z_1}[\|\rho_\delta(s-)+b(u(s-),z)\|^2-\|\rho_\delta(s-)\|^2]\tilde{N}(dz,ds), \quad t\geq 0. \end{aligned}$$

证明 对于任意正的 $\delta\leq\delta_0$, 对 $\|\rho_\delta(t)\|^2$ 用伊藤公式, 可得

$$\begin{aligned} &\|\rho_\delta(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2 \\ &=\|\delta u_0+v_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2-2\delta(\delta-\kappa)\int_0^t(u(s),\rho_\delta(s))ds-2\delta\int_0^t\|\nabla u\|^2ds \\ &\quad+2(\delta-\kappa)\int_0^t\|\rho_\delta\|^2ds-2\int_0^t\left(\rho_\delta,\int_0^s g(s-\xi)\Delta u(\xi)d\xi\right)ds+\int_0^t\int_{Z_1}\|a(u(s),z)\|^2\pi(dz)ds \\ &\quad+\int_0^t\int_{Z\setminus Z_1}[\|b(u(s),z)\|^2+2\langle\rho_\delta(s),b(u(s),z)\rangle]\pi(dz)ds+M_t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

由庞加莱不等式和柯西 - 施瓦茨不等式, 并注意到 $\delta \leq \delta_0$, 有

$$\begin{aligned}
&\delta(\kappa-\delta)(\rho_\delta(s),u(s))-(\kappa-\delta)\|\rho_\delta(s)\|_2^2-\delta\|\nabla u(s)\|_2^2\\
&\leq \delta(\kappa-\delta)\frac{\sqrt{2\delta}}{\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla u(s)\|_2\frac{1}{\sqrt{2\delta}}\|\rho_\delta(s)\|_2-(\kappa-\delta)\|\rho_\delta(s)\|_2^2-\delta\|\nabla u(s)\|_2^2\\
&\leq \delta(\kappa-\delta)\left(\frac{\delta}{\lambda_1}\|\nabla u(s)\|_2^2+\frac{1}{4\delta}\|\rho_\delta(s)\|_2^2\right)-(\kappa-\delta)\|\rho_\delta(s)\|_2^2-\delta\|\nabla u(s)\|_2^2\\
&\leq -\delta\left(1-\frac{\kappa\delta}{\lambda_1}\right)\|\nabla u(s)\|_2^2-\frac{3(\kappa-\delta)}{4}\|\rho_\delta(s)\|_2^2\\
&\leq -\frac{1}{2}\delta\|\nabla u(s)\|_2^2-\frac{\kappa}{2}\|\rho_\delta(s)\|_2^2. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

同时, 由条件 (G1) 和 (G2), 可得

$$\begin{aligned}
&-2\int_0^t\left(\rho_\delta(s),\int_0^s g(s-\xi)\Delta u(\xi)d\xi\right)ds\\
&=2\delta\int_0^t\int_0^s g(s-\xi)\int_D\nabla u(\xi)\nabla u(s)dxd\xi ds+2\int_0^t\int_0^s g(s-\xi)\int_D\nabla u(\xi)\nabla v(s)dxd\xi ds\\
&=2\delta\int_0^t\int_0^s g(\xi)d\xi\|\nabla u(s)\|^2ds+2\int_0^t\int_0^s g(\xi)d\xi\int_D\nabla u(s)\nabla v(s)dxds\\
&\quad+2\delta\int_0^t\int_0^s g(s-\xi)\int_D(\nabla u(\xi)-\nabla u(s))\nabla u(s)dxd\xi ds\\
&\quad+2\int_0^t\int_0^s g(s-\xi)\int_D(\nabla u(\xi)-\nabla u(s))\nabla v(s)dxd\xi ds\\
&=3\delta\int_0^t\int_0^s g(\xi)d\xi\|\nabla u(s)\|^2ds+\delta\int_0^t(g\circ\nabla u)(s)ds+\int_0^t\int_0^s g(\xi)d\xi\frac{d}{ds}\int_D|\nabla u(s)|^2dx\\
&\quad-\int_0^t\int_0^s g(s-\xi)\frac{d}{ds}\int_D|\nabla u(\xi)-\nabla u(s)|^2dxd\xi\\
&=3\delta\int_0^t\int_0^s g(\xi)d\xi\|\nabla u(s)\|^2ds+\delta\int_0^t(g\circ\nabla u)(s)ds+\int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\\
&\quad-\int_0^t g(s)\|\nabla u(s)\|^2ds-(g\circ\nabla u)(t)+\int_0^t(g'\circ\nabla u)(s)ds\\
&\leq 3\delta(1-l)\int_0^t\|\nabla u(s)\|^2ds+(\delta-\alpha)\int_0^t(g\circ\nabla u)(s)ds\\
&\quad+\int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2-(g\circ\nabla u)(t). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

进一步, 将 (3.6) 和 (3.7) 代入 (3.5), 并注意到 $l>\frac{5}{6}$, 可得

$$\begin{aligned}
&\|\rho_\delta(t)\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2+(g\circ\nabla u)(t)\\
&\leq\|\delta u_0+v_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2+\int_0^t\int_{Z_1}\|a(u(s),z)\|^2\pi(dz)ds\\
&\quad-\int_0^t\left[\frac{1}{2}\delta\|\nabla u(s)\|^2+\delta(g\circ\nabla u)(s)+\kappa\|\rho_\delta(s)\|^2\right]ds\\
&\quad+\int_0^t\int_{Z\setminus Z_1}[\|b(u(s),z)\|^2+2(\rho_\delta(s),b(u(s),z))]\pi(dz)ds+M_t. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

再由条件 (G3) 和 (G4), 可得

$$\int_{Z_1}[\|a(u(t),z)\|^2]\pi(dz)\le\frac{\overline{\theta}L_a}{\lambda_1}\|\Delta u(t)\|^2 \tag{3.9}$$

和

$$\left|\int_{Z\setminus Z_1}[\|b(u(t),z)\|^2+2\langle\rho_\delta(t),b(u(t),z)\rangle]\pi(dz)\right|\le\frac{2\theta_pL_b}{\lambda_1}\|\Delta u(t)\|^2+\theta_p\|\rho_\delta(t)\|^2. \tag{3.10}$$

通过 (3.4), 可选取一个正的

$$\delta\in\left(\frac{\overline{\theta}L_a+2\theta_pL_b}{\lambda_1},\delta_0\right],$$

此时 (3.8) 暗示

$$\mathscr{E}^\delta(u(t),v(t))\le\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)-\lambda\int_0^t\mathscr{E}^\delta(u(s),v(s))ds+M_t,$$

其中

$$\lambda=\min\left\{\delta-\frac{2\overline{\theta}L_a+4\theta_pL_b}{\lambda_1},\kappa-\theta_p\right\}>0.$$

证毕.

注 3.2 注意到参数 δ_0 依赖于参数 κ, 我们可适当选取 L_a 和 L_b, 使得

$$\theta_p\vee\sqrt{2\lambda_1}<\frac{\lambda_1^2}{2\overline{\theta}L_a+4\theta_pL_b},$$

并取

$$\kappa\in\left(\theta_p\vee\sqrt{2\lambda_1},\frac{\lambda_1^2}{2\overline{\theta}L_a+4\theta_pL_b}\right),$$

则 (3.2) 和 (3.4) 可以同时成立.

接下来, 采用 Chow [9] 的方法讨论本文的主要结果. 实际上, 我们有

定理 3.3 在引理 3.1 的条件下, 式 (3.1) 所定义的转移半群 $(\mathscr{S}_t)_{t\ge0}$ 在 $(\mathscr{H},\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ 上存在唯一的不变测度.

证明 为了延拓方程组 (1.4) 的时间为整个实数区域 $\mathbb{R}$, 对 $t\ge0$, 令 $(\bar{N}(A\times[0,t]))_{A\in\mathscr{B}(Z)}$ 是泊松随机测度 $(N(A\times[0,t]))_{A\in\mathscr{B}(Z)}$ 的一个独立副本. 对于任意的 $A\in\mathscr{B}(Z)$ 和 $t\in\mathbb{R}$, 定义

$$\hat{N}=\begin{cases}N(A\times[0,t]), & t\ge0,\\ \bar{N}(A\times[0,-t]), & t<0.\end{cases}$$

令 $\tilde{\hat{N}}$ 是 $\hat{N}$ 的补偿泊松随机测度. 对每一个 $s\in\mathbb{R}$, 考虑系统

$$\begin{cases}du=vdt,\\ dv=\left(\Delta u-\displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds-\kappa v\right)dt+\displaystyle\int_{Z_1}a(u(t-),z)\tilde{N}(dz,dt)\\ \qquad\quad+\displaystyle\int_{Z\setminus Z_1}b(u(t-),z)N(dz,dt),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x).\end{cases} \tag{3.11}$$

假设 $(u_0,v_0)\in V\times H$, 由定理 2.4 知, 上述系统对每个 $T>0$ 均存在唯一解

$$(U_t^s((u_0,v_0)))_{t>s}\in C([s,T];V)\times\mathbb{D}([s,T];H).$$

因此, 由 Gronwall 引理及引理 3.1 知, 存在正的常数 $\delta\le\delta_0$ 和 $\lambda=\lambda(\delta)$, 使得下式成立:

$$\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(U_t^s((u_0,v_0)))]\le \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)],\quad t>s. \tag{3.12}$$

对任意的 $s_1>s_2>0$, 定义

$$\hat{U}_t^{1,2}((u_0,v_0))=(\hat{u}(t),\hat{v}(t))=(u_t^{-s_1}(u_0)-u_t^{-s_2}(u_0),v_t^{-s_1}(v_0)-v_t^{-s_2}(v_0)),$$

则 $\hat{U}_t^{1,2}((u_0,v_0))$ 满足

$$\begin{cases} d\hat{u}=\hat{v}dt,\\ d\hat{v}=\left(\Delta\hat{u}+\displaystyle\int_0^t g(t-s)(\Delta u_t^{-s_1}-\Delta u_t^{-s_2})dt-\kappa\hat{v}\right)dt+\displaystyle\int_{Z_1}\hat{a}(u_{t-}^{-s_1},u_{t-}^{-s_2},z)\tilde{\hat{N}}(dz,dt)\\ \qquad +\displaystyle\int_{Z\setminus Z_1}\hat{b}(u_{t-}^{-s_1},u_{t-}^{-s_2},z)\hat{N}(dz,dt),\\ \hat{u}(x,-s_2)=u_{-s_2}^{-s_1}(x)-u_0(x),\quad \hat{v}(x,-s_2)=v_{-s_2}^{-s_1}(x)-v_0(x),\quad x\in D, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{m}(\hat{u}(t))&=m(\|\nabla u_t^{-s_1}\|^2)\Delta u_t^{-s_1}-m(\|\nabla u_t^{-s_2}\|^2)\Delta u_t^{-s_2},\\ \hat{a}(u_{t-}^{-s_1},u_{t-}^{-s_2},z)&=a(u_t^{-s_1},z)-a(u_t^{-s_2},z),\\ \hat{b}(u_{t-}^{-s_1},u_{t-}^{-s_2},z)&=b(u_t^{-s_1},z)-b(u_t^{-s_2},z). \end{aligned}$$

令 $\hat{\rho}=\delta\hat{u}+\hat{v}$. 相似于引理 3.1, 这时也存在正的常数 $\delta\le\delta_0$ 和 $\lambda=\lambda(\delta)$, 使得

$$\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(\hat{U}_t^{1,2}((u_0,v_0)))]\le \mathrm{e}^{-\lambda(t+s_2)}\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(\hat{u}(-s_2),\hat{v}(-s_2))],\quad t>-s_2. \tag{3.14}$$

由 (3.12) 知存在正的常数 $C>0$, 使得

$$\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(\hat{u}(-s_2),\hat{v}(-s_2))]\le C[1+\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)]. \tag{3.15}$$

联立 (3.14) 和 (3.15), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(\hat{U}_t^{1,2}((u_0,v_0)))]&=\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(U_t^{-s_1}((u_0,v_0))-U_t^{-s_2}((u_0,v_0)))]\\ &\le C\mathrm{e}^{-\lambda(t+s_2)}[1+\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)],\quad t>-s_2. \end{aligned}$$

在上式中令 $t=0$, 则对任意的 $(u_0,v_0)\in\mathscr{H}$, 有

$$\mathbf{E}[\mathscr{E}^\delta(U_0^{-s_1}((u_0,v_0))-U_0^{-s_2}((u_0,v_0)))]\le C\mathrm{e}^{-\lambda s_2}[1+\mathscr{E}^\delta(u_0,v_0)],$$

且当 $s_2\to\infty$ 时, 它将趋于零. 这暗示 $(U_0^{-s})_{s\ge0}$ 是空间 $L^2(\Omega;\mathscr{H})$ 中的柯西列. 因此, 当 $s\to\infty$ 时, 存在唯一的随机向量 $U_0^{-\infty}((u_0,v_0))\in L^2(\Omega;\mathscr{H})$ 在 $L^2(\Omega;\mathscr{H})$ 意义下, 使得

$$U_0^{-s}((u_0,v_0))\to U_0^{-\infty}((u_0,v_0)).$$

对每一个 $s\ge0$, 向量过程

$$U_0^{-s}((u_0,v_0))=(u_0^{-s}(u_0),v_0^{-s}(v_0)),\quad U_s^0((u_0,v_0))=(u_s^0(u_0),v_s^0(v_0))$$

在同一个概率空间具有相同的分布. 令 $\mu(\cdot)$ 是 $(V\times H,\mathscr{B}(V\times H))$ 上的诱导概率测度, 则 $\mu(\cdot)$ 是转移半群 $(\mathscr{S}_t)_{t\ge0}$ 的唯一不变测度. 证毕.

参 考 文 献

[1] Alabau-Boussouira F., Cannarsa P., Sforza D., Decay estimates for second order evolution equations with memory, *J. Funct. Anal.*, 2008, **254**: 1342–1372.

[2] Applebaum D., Lévy Process and Stochastic Calculus, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[3] Appleby J. A. D., Fabrizio M., Lazzari B., et al., On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2006, **16**: 1677–1694.

[4] Barbu V., Prato G. D., Tubaro L., Stochastic wave equations with dissipative damping, *Stochastic Proc. Appl.*, 2007, **117**: 1001–1013.

[5] Caraballo T., Kloeden P. E., Schmalfuß B., Exponentially stable stationary solutions for stochastic evolution equations and their perturbation, *Appl. Math. Optim.*, 2004, **50**: 183–207.

[6] Carmona R., Nualart D., Random non-linear wave equation: Smoothness of solutions, *Probab. Theory Related Fields*, 1993, **95**: 87–102.

[7] Cavalcanti M., Oquendo N, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIMA J. Control Optim.*, 2003, **42**: 1310–1324.

[8] Dafermos C. M., An abstract Volterra equation with application to linear viscoelasticity, *J. Diff. Equ.*, 1970, **7**: 554–589.

[9] Chow P. L., Asymptotics of solutions to semilinear stochastic wave equations, *Ann. Appl. Probab.*, 2006, **16**: 757–789.

[10] Crauel H., Debussche A., Flandoli F., Random attractors, *J. Dynam. Diff. Equ.*, 1997, **9**: 307–341.

[11] Dafermos C. M., Asymptotic stabiblity in linear viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**: 297–308.

[12] Dalang R., Frangos N., The stochastic wave equation in two spatial dimensions, *Ann. Probab.*, 1998, **26**: 187–212.

[13] Fabrizio M., Lazzari B., On the existence and the asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1991, **116**: 139–152.

[14] Gao H. J., Liang F., On the stochastic beam equation driven by a non-Gaussian Lévy process, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2014, **19**: 1027–1045.

[15] Kim J. U., On the stochastic wave equation with nonlinear damping, *Appl. Math. Optim.*, 2008, **58**: 29–67.

[16] Komornik V., Zuazua E., A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pures Appl.*, 1990, **60**: 33–54.

[17] Liang F., Gao H. J., Explosive solutions of stochastic viscoelastic wave equations with damping, *Rev. Math. Phys.*, 2011, **23**: 883–902.

[18] Liang F., Gao H. J., Global existence and explosive solution for stochastic viscoelastic wave equation with nonlinear damping, *Rev. Math. Phys.*, 2014, **26**, ID 1450013.

[19] Liang F., Gao H. J., Stochastic nonlinear wave equation with memory driven by compensated Poisson random measures, *J. Math. Phys.*, 2014, **55**, ID 033503.

[20] Millet A., Morien P. L., On a nonlinear stochastic wave equation in the plane: Existence and uniqueness of the solution, *Ann. Appl. Probab.*, 2001, **11**: 922–951.

[21] Mũnoz Rivera J. E., Barbosa Sobrinho J., Existence and uniform rates of decay for contact problems in viscoelasticity, *Appl. Anal.*, 1997, **67**: 175–199.

[22] Rivera J. E. M., Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, 1994, **52**: 629–648.

[23] Rivera J. E. M., Salvatierra A. P., Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials, *Quart. Appl. Math.*, 2001, **59**: 557–578.

[24] Sato K., Lévy Process and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[25] Wei T. T., Jiang Y. M., Stochastic wave equations with memory, *Chin. Ann. Math.*, 2010, **31B**: 329–342.